2026

المعاصر

إعداد نخبة من خبراء التعليم

الكتاب الأساسى

- الجبر والاحتمال
- الهندسة

الصف الثالث الإعدادى

الفصل الدراسى الثانى

الرياضيات



تطبيق
المعاصر التفاعلى

المعاصر

إعداد نخبة من خبراء التعليم

الكتاب الأساسى

- الجبر والاحتمال
- الهندسة

الصف الثالث الإعدادى

الفصل الدراسى الثانى

٢٠٢٦

الرياضيات



مكتبة الطلبة
للطبع والنشر والتوزيع
٣ شارع كامل صدقى - الفجالة
تليفون: ٢٥٩٠٢٩٩٧ - ٢٥٩٣٧٧٩١ - ٠٢/٢٥٩٣٤٠١٢
www.gpseducation.com



الخط الساخن
١٥٠١٤



بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

الحمد لله الذى وفقنا لتقديم هذا الكتاب من مجموعة كتب «المعاصر» فى الرياضيات... نقدمه إلى أبنائنا الطلبة آملين أن يجدوا فيه المعلم والموجه الذى يعينهم على فهم كل صعب، ويذلل أمامهم كل مغلق وغامض، ويأخذ بأيديهم إلى طريق النجاح والتفوق.

ونقدمه إلى إخواننا المدرسين ليكون لهم عونًا على أداء رسالتهم الشاقة، ونافذة يطلون منها على خبرات إخوة لهم أمضوا قرابة الثلاثين عامًا فى حقل التدريس والتوجيه.

ونحن لن نلجأ - فى هذا التقديم - إلى تقييم عملنا وجهدنا من خلال سرد لمزايا هذا الكتاب وما استحدث فيه، ولكننا نترك ذلك لكل من يطوى صفحة منه أو يقرأ سطرًا فيه، لكى يبدى فيه رأيًا ... إن كان نقدًا فنحن نرحب به ... وإن كانت كلمة ثناء فهى خير مقابل نرجوه، وأعز وسام نضعه على صدورنا.

والله لا يضيع أجر من أحسن عملًا، وهو ولى التوفيق،

« المؤلفون »

بطاقة فهرسة

فهرسة أثناء النشر إعداد إدارة الشئون الفنية - دار الكتب المصرية

المعاصر فى الرياضيات / إعداد نخبة من خبراء التعليم.-

القاهرة : جى بى إس للطبع والنشر والتوزيع، ٢٠٢٥ - ٣ مج ؛ ٢٤ سم.

الصف الثالث الإعدادى، الفصل الدراسى الثانى

المحتويات : جـ١. الكتاب الأساسى

جـ٢. الجزء الخاص بالتقويم المستمر. -

جـ٣. الإجابات.

تدمك : ٠ - ٢٣٦ - ٩٧٠ - ٩٧٧ - ٩٧٨

١ - الرياضيات - تعليم وتدريس. ٢ - التعليم الإعدادى.

٣ - الرياضيات - أسئلة وأجوبة. ٥١٠,٧

رقم الإيداع : ٢٥٥١٤ / ٢٠٢٥





التطبيق التفاعلى من سلسلة كتب ...

المعاصر الامتحان

كيفية الاستخدام: **1.** نزل التطبيق. **2.** أنشئ حسابك. **3.** أدخل الكود الموجود على ظهر الغلاف.

استمتع بجميع مزايا التطبيق

لجميع المواد الدراسية



تصنيف بلوم للمستويات المعرفية



ملاحظة: تم تصنيف الأسئلة بداخل كل تمرين طبقًا لمستويات هرم بلوم والإشارة لها كالتالى:

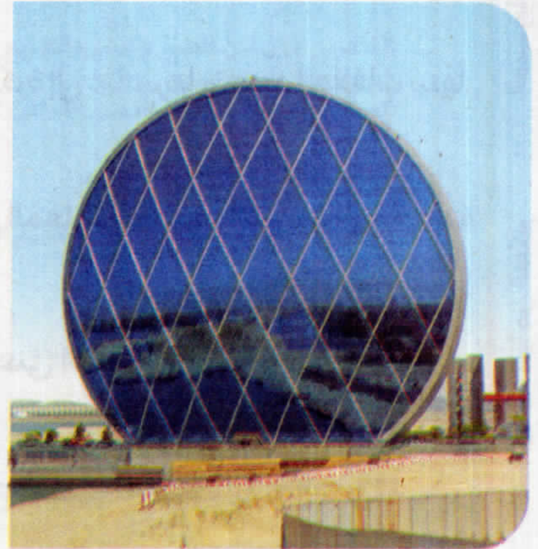
● تذكر ● فهم ● تطبيق ● حل مشكلات (تحليل أو تقويم أو ابتكار)

محتويات الكتـاب

أولًا	الجبـــر والاحتمال



ثانيًا	الهندســـة



توزيع مقرر الرياضيات للصف الثالث الإعدادى
الفصل الدراسى الثانى

الشهر	م	الموضوعات: الجبر والاحتمال (فترة ونصف)	الموضوعات: الهندسة (فترة ونصف)
فبراير	1	**الوحدة الأولى : المعادلات** • حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين بيانيًا وجبريًا.	**الوحدة الرابعة : الدائرة** • تعاريف ومفاهيم أساسية.
	2	• تمارين على حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين جبريًا.	• أوضاع نقطة ومستقيم ودائرة بالنسبة لدائرة.
	3	• حل معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد بيانيًا.	• تعيين الدائرة – علاقة أوتار الدائرة بمركزها.
مارس	4	• حل معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد جبريًا باستخدام القانون العام.	• تابع : علاقة أوتار الدائرة بمركزها.
	5	• حل معادلتين فى متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية.	**الوحدة الخامسة : الزوايا والأقواس فى الدائرة** • الزاوية المركزية وقياس الأقواس
	6	• تابع : حل معادلتين فى متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية.	• العلاقة بين الزاويتين المحيطية والمركزية المشتركتين فى نفس القوس.
	7	**أجازة عيد الفطر المبارك**	
	8	**الوحدة الثانية : دوال الكسور الجبرية والعمليات عليها** • مجموعة أصفار الدالة كثيرة الحدود.	• الزوايا المحيطية المرسومة على نفس القوس.
أبريل	9	• الدالة الكسرية الجبرية – تساوى كسرين جبريين.	• الشكل الرباعى الدائرى.
	10	• العمليات على الكسور الجبرية.	• خواص الشكل الرباعى الدائرى.
	11	• تمارين على العمليات على الكسور الجبرية.	• تابع : خواص الشكل الرباعى الدائرى.
	12	**الوحدة الثالثة : الاحتمال** • العمليات على الأحداث.	• العلاقة بين مماسات الدائرة.
مايو	13	• الحدث المكمل – الفرق بين حدثين.	• الزاوية المماسية.
	14	• تمارين على الاحتمالات.	• تمارين على الوحدة الخامسة.
	15	مراجعة عامة على المنهج	
	16	بداية امتحانات الفصل الدراسى الثانى	

أولًا | الجبـــر والاحتمال





مراجعة على تحليل المقاديـر الجبرية

١ إخراج العامل المشترك : $أب + أحـ = أ(ب + حـ)$

• $٦ سـ^٢ ص + ١٠ سـ ص^٢ = ٢ سـ ص (٣ سـ + ٥ ص)$

• $٢ أ (سـ + ص) - ب (سـ + ص) = (سـ + ص) (٢ أ - ب)$

لاحظ أن : العامل المشترك عبارة عن مقدار جبرى وهو (سـ + ص)

---

٢ الفرق بين مربعين : $أ^٢ - ب^٢ = (أ + ب) (أ - ب)$

• $سـ^٢ - ٩ = (سـ + ٣) (سـ - ٣)$

• $١٦ سـ^٤ - ٨١ = (٤ سـ^٢ + ٩) (٤ سـ^٢ - ٩) = (٤ سـ^٢ + ٩) (٢ سـ + ٣) (٢ سـ - ٣)$

لاحظ : استمرارنا فى التحليل حتى يكون التحليل تامًا.

• $٢ سـ^٣ - ٧٢ سـ = ٢ سـ (سـ^٢ - ٣٦) = ٢ سـ (سـ + ٦) (سـ - ٦)$

لاحظ : إخراجنا للعامل المشترك أولاً.

---

٣ مجموع المكعبين : $أ^٣ + ب^٣ = (أ + ب) (أ^٢ - أب + ب^٢)$

الفرق بين مكعبين : $أ^٣ - ب^٣ = (أ - ب) (أ^٢ + أب + ب^٢)$

• $سـ^٣ + ٨ = (سـ + ٢) (سـ^٢ - ٢ سـ + ٤)$

• $٣ سـ^٤ ص - ٨١ سـ ص^٤ = ٣ سـ ص (سـ^٣ - ٢٧ ص^٣)$

$= ٣ سـ ص (سـ - ٣ ص) (سـ^٢ + ٣ سـ ص + ٩ ص^٢)$

---

٤ المقدار الثلاثى على الصورة : $سـ^٢ + ب سـ + حـ$

حاصل ضربهما = ١٢

• $سـ^٢ + ٧ سـ + ١٢ = (سـ + ٣) (سـ + ٤)$

مجموعهما = ٧

حاصل ضربهما = -١٢

• $سـ^٢ + سـ - ١٢ = (سـ + ٤) (سـ - ٣)$

مجموعهما = ١

٥ المقدار الثلاثى على الصورة : أ س^٢ + ب س + حـ

• ٦ س^٢ + ٧ س + ٢

ضربهما = ٦ ضربهما = ٢

= (٢ س + ١) (٣ س + ٢)

طريقة المقص :

(٢س + ١)	(٦س + ١)
(٣س +٢)	(٢س - ٥)

• ٣٦ س^٣ - ٨٤ س^٢ - ١٥ س

= ٣ س (١٢ س^٢ - ٢٨ س - ٥) = ٣ س (٦ س + ١) (٢ س - ٥)

---

٦ المقدار الثلاثى المربع الكامل : • أ^٢ + ٢ أ ب + ب^٢ = (أ + ب)^٢

• أ^٢ - ٢ أ ب + ب^٢ = (أ - ب)^٢

• س^٢ + ١٠ س + ٢٥ = (س + ٥)^٢

• ٩ س^٢ - ٢٤ س ص + ١٦ ص^٢

= (٣ س - ٤ ص)^٢

• ٤ س^٢ - ١٠ س + ٢٥

مقدار ثلاثى غير مربع كامل

لأن : الحد الأوسط ≠ ± ٢ × √(٤ س^٢) × √٢٥

فى المقدار الثلاثى المربع الكامل :

* كل من الحد الأول والثالث مربع كامل.

* الحد الأوسط = ± ٢ × √الحد الأول × √الحد الثالث

---

٧ التحليل بالتقسيم

• أ س + أ ص + ب س + ب ص

= أ (س + ص) + ب (س + ص)

= (س + ص) (أ + ب)

لاحظ أننا : قسمنا المقدار إلى مقدارين كل منهما يتكون من حدين.

• س^٢ - ص^٢ + ٢ س - ٢ ص = (س - ص) (س + ص) + ٢ (س - ص)

= (س - ص) (س + ص + ٢).

• س^٢ - ٢ س ص + ص^٢ - ٩

= (س^٢ - ٢ س ص + ص^٢) - ٩

= (س - ص)^٢ - (٣)^٢

= (س - ص + ٣) (س - ص - ٣)

لاحظ أننا : قسمنا المقدار إلى مقدار ثلاثى مربع كامل وحد جبرى مربع كامل.

تمريـــن لمراجعة

تحليل المقادير الجبرية

حلل كلاً مما يأتي تحليلًا كاملًا :

١) ٢٥ س^{٢} − ٩ ص^{٢}

٢) ٢ س^{٥} + ٥٤ س^{٢}

٣) ٢ ص^{٢} + ٥ ص + ٣

٤) ٢ س^{٤} − ١٨

٥) ٢ س^{٢} − ٢٠ س + ٤٨

٦) س^{٢} + ٨ س + ١٦

٧) ٨ س^{٣} + ٢٧

٨) ص^{٢} − ٥٠ ص − ٥١

٩) ٢٥ س^{٢} − ٣٠ س + ٩

١٠) س^{٢} − ٨١

١١) ص^{٥} − ص

١٢) ٣ س^{٢} + ٧ س − ٦

١٣) س^{٢} − ٨ س + ١٢

١٤) ٣ س^{٣} + ٢ س^{٢} + ١٢ س + ٨

١٥) س^{٣} − ١٢٥

١٦) ٤ س^{٢} − ١٢ س + ٩

١٧) أ^{٣} + ٣ أ^{٢} − ٩ أ − ٢٧

١٨) −٢ س^{٢} − ١٥ س − ٧

١٩) س^{٢} − ٧ س + ١٠

٢٠) ٩ س^{٤} − ١٦ ص^{٤}

٢١) س^{٤} − ٩ س^{٢} + ٢٠

٢٢) ١ − ٤ س^{٢}

٢٣) ٥ س^{٢} − ٣ س − ٢

٢٤) ٣ س^{٤} − ١٥ س^{٣} + ١٢ س^{٢}

٢٥) ٣ س^{٢} − ١٩ س + ٦

٢٦) ٤ س^{٢} + ٢٨ س ص + ٤٩ ص^{٢}

٢٧) س^{٦} − ٦٤ ص^{٦}

٢٨) ٢ ص^{٤} − ٤ ص^{٣} + ٧ ص − ١٤

٢٩) س^{٤} − ٥ س^{٢} − ٢٤

٣٠) ٩ س^{٤} − ١٣ س^{٢} ص^{٢} + ٤ ص^{٤}

الوحـــدة الأولى
المعادلات

الدرس الأول :

حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين بيانيًا وجبريًا.

الدرس الثانى :

حل معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد بيانيًا وجبريًا.

الدرس الثالث :

حل معادلتين فى متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية.

أهداف الوحدة: بعد دراسة هذه الوحدة يجب أن يكون التلميذ قادرًا على أن :

- يستدعى ما تم دراسته سابقًا عن تحليل المقادير الجبرية.
- يحل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين بيانيًا.
- يحل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين جبريًا بطريقة الحذف وطريقة التعويض.
- يحدد عدد حلول معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين.
- يحل مسائل لفظية تؤول فى حلها إلى معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين.
- يحل معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد بيانيًا.
- يحل معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد باستخدام القانون العام.
- يحدد عدد حلول معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد.
- يحل مسائل لفظية تؤول فى حلها إلى معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد.
- يحل معادلتين فى متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية.
- يحل مسـائل لفظيـة تؤول فى حلهـا إلى معادلتين فى متغيريـن إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية.
- يستخدم الآلة الحاسبة فى حل المعادلات.

يمكنك

حل الامتحانات التفاعلية على الدروس من خلال مسح QR code الخاص بكل امتحان





الدرس 1

حل معادلتين من الدرجة الأولى في متغيرين بيانيًا وجبريًا



أولًا حل معادلتين من الدرجة الأولى في متغيرين بيانيًا

* المقصود بحل معادلتين آنيًا إيجاد الزوج المرتب أو الأزواج المرتبة التي تحقق المعادلتين في آن واحد.
* حيث إن مجموعة الحل للمعادلة من الدرجة الأولى في متغيرين في ح × ح يمثلها بيانيًا خط مستقيم.

إذًا لحل المعادلتين بيانيًا نتبع الآتي :

ارسم في المستوى الديكارتي الخطين المستقيمين الممثلين للمعادلتين ليكونا $ل_1$ ، $ل_2$ فتكون مجموعة الحل عبارة عن نقط تقاطع المستقيم $ل_1$ مع المستقيم $ل_2$ وتوجد ثلاث حالات.

١ $ل_1$ ، $ل_2$ يتقاطعان في نقطة ولتكن (ك ، م)

* يوجد حل وحيد هو (ك ، م)
* مجموعة الحل = {(ك ، م)}

٢ $ل_1$ ، $ل_2$ منطبقان

* يوجد عدد لا نهائي من الحلول.

٣ $ل_1$ ، $ل_2$ متوازيان

* لا يوجد حل.
* مجموعة الحل = $\varnothing$

والأمثلة الثلاثة في الجدول التالي توضح جميع الحالات السابقة.

مثال ١

ل$_1$: ٢س − ص = ٥

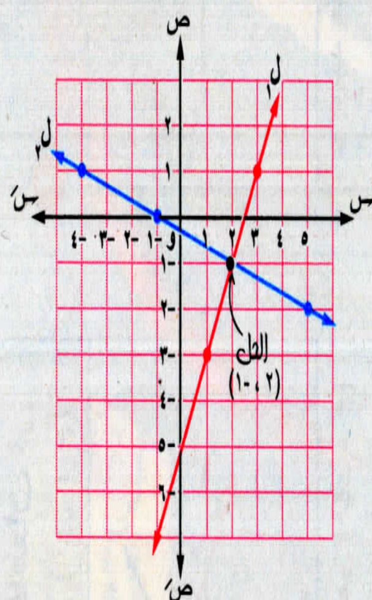
ل$_2$: س + ٣ ص + ١ = ٠

∵ ل$_1$: ص = ٢ س − ٥ ∴

س	١	٢	٣
ص	−٣	−١	١

∵ ل$_2$: س = −٣ ص − ١ ∴

س	−١	−٤	٥
ص	٠	١	−٢



مجموعة الحل فى ح^2 هى {(٢ ، −١)}

مثال ٢

ل$_1$: ص = ٢ س − ٤

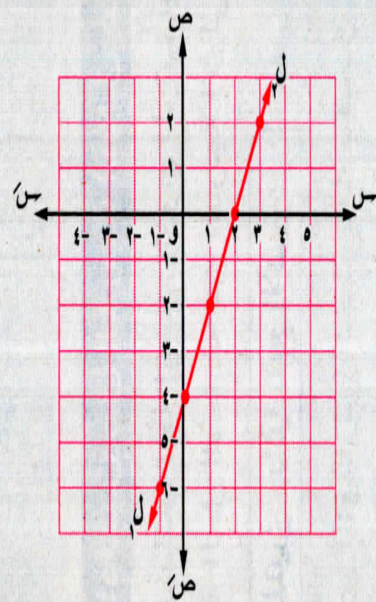
ل$_2$: ٤ س = ٢ ص + ٨

∵ ل$_1$: ص = ٢ س − ٤ ∴

س	٠	١	−١
ص	−٤	−٢	−٦

∵ ل$_2$: س = $\frac{٢ ص + ٨}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$ ص + ٢ ∴

س	٢	٣	١
ص	٠	٢	−٢



مجموعة الحل فى ح^2 هى {(س ، ص) : ص = ٢ س − ٤ ، (س ، ص) ∈ ح^2}

مثال ٣

ل$_1$: ص = ٢ س − ٢

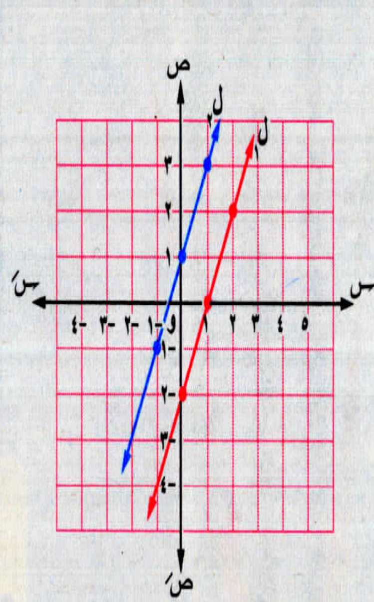
ل$_2$: ٢ ص − ٤ س − ٢ = ٠

∵ ل$_1$: ص = ٢ س − ٢ ∴

س	٢	١	٠
ص	٢	٠	−٢

∵ ل$_2$: ص = ٢ س + ١ ∴

س	٠	١	−١
ص	١	٣	−١



مجموعة الحل فى ح^2 هى ∅

ملاحظات على الأمثلة السابقة

- **فى مثال ١ :** إذا قمت بالتعويض عن س = ٢ ، ص = -١ فى كل معادلة من المعادلتين ستجد أن كلًا منهما تتحقق ، وهذا معناه أن الزوج المرتب (٢ ، -١) يحقق كلًا من المعادلتين. هذه الطريقة يمكن استخدامها للتأكد من صحة الحل البيانى.
- **فى مثال ٢ :** لاحظ أن المعادلتين : ص = ٢ س - ٤ ، ٤ س = ٢ ص + ٨ هما صورتان مختلفتان لنفس المعادلة ، فالمعادلة ٤ س = ٢ ص + ٨ يمكن كتابتها على الصورة :
  ٢ ص = ٤ س - ٨ وهى نفسها المعادلة : ص = ٢ س - ٤
  (وذلك بقسمة كل من طرفيها على ٢)
- **فى مثال ٣ :** يمكن كتابة المعادلتين على الصورة : ص - ٢ س = -٢ ، ص - ٢ س = ١
  ومن الواضح أنه لا يوجد زوج مرتب يحقق كلًا من المعادلتين فى نفس الوقت لأن المقدار (ص - ٢ س) لا يمكن أن يساوى -٢ ، ١ فى نفس الوقت لجميع قيم س ، ص وهذا معناه أن مجموعة الحل = ∅

تحديد عدد الحلول بدون الرسم البيانى

يمكنك تحديد عدد حلول معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين بدون رسمهما بيانيًا باتباع الآتى :



مثال ٤

أوجد عدد حلول كل زوج من المعادلات الآتية :

١ س + ٢ ص = ١ ، ٢ س + ٣ ص = ١٢

٢ ٤ س − ص + ٧ = ٠ ، ٢ ص − ٨ س = ١٤

٣ ٢ س − ٣ ص = ٦ ، ص = $\frac{٢}{٣}$ س + ٣

الحل

١ ∵ $م_١ = \frac{- \text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-١}{٢}$ ، $م_٢ = \frac{- \text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-٢}{٣}$

∴ $م_١ \neq م_٢$ ∴ المستقيمان متقاطعان فى نقطة ∴ عدد الحلول = ١

٢ ∵ $م_١ = \frac{- \text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-٤}{-١} = ٤$ ، $م_٢ = \frac{-(-٨)}{٢} = ٤$ ∴ $م_١ = م_٢$

، المستقيمان يقطعان محور الصادات فى ذات النقطة (٠ ، ٧)

∴ المستقيمان منطبقان

∴ عدد الحلول = عدد لا نهائى

لاحظ أنه :
يمكن إيجاد نقطة التقاطع مع محور الصادات بوضع س = ٠ وإيجاد قيمة ص المناظرة.

٣ ∵ $م_١ = \frac{- \text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-٢}{-٣} = \frac{٢}{٣}$ ، $م_٢$ = معامل س = $\frac{٢}{٣}$

∴ $م_١ = م_٢$

، ∵ المستقيم الأول يقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، −٢)

، المستقيم الثانى يقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ٣)

∴ المستقيمان متوازيان لتساوى الميلين واختلاف النقطتين ∴ عدد الحلول = ٠

حاول بنفسك ١

أوجد بيانيًا فى ح × ح مجموعة حل المعادلتين :

ص = س + ٢ ، ص + ٢ س = ٨

ثانيًا حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين جبريًا

تعتمد هذه الطريقة على التخلص من أحد المتغيرين فنحصل على معادلة من الدرجة الأولى فى متغير واحد ، ويمكن الحصول على قيمة هذا المتغير بحل هذه المعادلة ، ثم نعوض بالقيمة التى حصلنا عليها فى أى من المعادلتين وبذلك نحصل على قيمة المتغير الآخر الذى سبق التخلص منه ، ونتبع فى ذلك إحدى الطريقتين :

١ طريقة التعويض.

٢ طريقة الحذف.

وفيما يلى سنتعرض لكل طريقة على حدة.

١ طريقة التعويض

المثال التالى يوضح استخدام طريقة التعويض لحل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين جبريًا.

مثال ٥

أوجد باستخدام طريقة التعويض مجموعة الحل للمعادلتين الآتيتين فى ح × ح :

٢ س − ص = ٥ ، س + ٣ ص + ١ = ٠

الحل

لاستخدام طريقة التعويض نتبع الخطوات التالية :

١ نحصل على أحد المتغيرين بدلالة المتغير الآخر من إحدى المعادلتين وذلك بوضع هذا المتغير فى أحد طرفى المعادلة على أن يكون معامله الوحدة.

من المعادلة الأولى :

∵ ٢ س − ص = ٥

∴ ص = ٢ س − ٥

٢ بالتعويض عن قيمة ص فى المعادلة الثانية نحصل على معادلة من الدرجة الأولى فى متغير واحد (س) وبحلها نحصل على قيمة س

بالتعويض عن قيمة ص = ٢ س − ٥ فى المعادلة الثانية :

∴ س + ٣ (٢ س − ٥) + ١ = ٠ ∴ س + ٦ س − ١٥ + ١ = ٠

∴ ٧ س − ١٤ = ٠ ∴ ٧ س = ١٤ ∴ س = ٢

٣ بالتعويض عن قيمة س فى المعادلة الناتجة من الخطوة الأولى نحصل على قيمة ص

∴ ص = ٢ × ٢ − ٥ ∴ ص = −١

∴ مجموعة الحل = {(٢ ، −١)}

ملاحظـة

فى المثال السابق :

يمكن الحل عن طريق الحصول على المتغير س بدلالة المتغير ص من المعادلة الثانية كالتالى :

- من المعادلة الثانية : ∵ س + ٣ ص + ١ = ٠ ∴ س = −٣ ص − ١ (١)
- بالتعويض عن قيمة س فى المعادلة الأولى : ∴ ٢ (−٣ ص − ١) − ص = ٥

∴ −٦ ص − ٢ − ص = ٥ ∴ −٧ ص = ٧ ∴ ص = −١

- بالتعويض فى المعادلة (١) : ∴ س = −٣ × (−١) − ١ ∴ س = ٢

∴ مجموعة الحل = {(٢ ، −١)} وهى نفس النتيجة التى حصلنا عليها سابقًا.

حاول بنفسك ٢

أوجد جبريًا فى ح × ح باستخدام طريقة التعويض مجموعة الحل للمعادلتين :

س − ص = ٤ ، ٢ س + ص = ١١

٢ طريقة الحذف

المثال التالى يوضح استخدام طريقة الحذف لحل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين جبريًا.

مثال ٦

أوجد باستخدام طريقة الحذف مجموعة الحل للمعادلتين الآتيتين فى ح × ح :

٢ س − ص = ٥ ، س + ٣ ص + ١ = ٠

الحل

لاستخدام طريقة الحذف نتبع الخطوات التالية :

١ نكتب كلًا من المعادلتين على الصورة : أ س + ب ص = حـ

∴ ٢ س − ص = ٥ (١)

، س + ٣ ص = −١ (٢)

٢ نجعل معامل أحد المتغيرين «س أو ص» فى إحدى المعادلتين معكوسًا جمعيًا لمعامل نفس المتغير فى المعادلة الأخرى.

∴ بضرب طرفى المعادلة (٢) فى −٢ لنجعل معامل س فى المعادلة (٢) معكوسًا جمعيًا لمعامل س فى المعادلة (١) :

∴ −٢ س − ٦ ص = ٢ (٣)

٣ بجمع المعادلتين (٣) ، (١) نحصل على معادلة من الدرجة الأولى فى متغير واحد (ص) وبحلها نحصل على قيمة ص

بجمع المعادلتين (٣) ، (١) :

∴ −٧ ص = ٧ ∴ ص = −١

٤ **بالتعويض عن قيمة ص فى إحدى المعادلتين نحصل على معادلة من الدرجة الأولى فى متغير واحد (س) وبحلها نحصل على قيمة س**

∴ بالتعويض عن ص = -١ فى المعادلة (٢) ينتج أن : س + ٣ × (-١) = -١

∴ س - ٣ = -١ ∴ س = ٢

∴ مجموعة الحل = {(٢ ، -١)}

لاحظ أن : مجموعة الحل هى نفسها التى حصلنا عليها باستخدام طريقة التعويض فى مثال (٥) وباستخدام الحل البيانى فى مثال (١)

! ملاحظة

فى المثال السابق :

يمكن الحل عن طريق جعل معاملى ص فى المعادلتين أحدهما معكوس جمعى للآخر كالتالى :

بضرب طرفى المعادلة (١) فى ٣ :

∴ ٦ س - ٣ ص = ١٥ ، ∵ س + ٣ ص = -١

بالجمع : ∴ ٧ س = ١٤ ∴ س = ٢

وبالتعويض عن س = ٢ فى المعادلة (١) ينتج أن : ٢ × ٢ - ص = ٥

∴ ٤ - ص = ٥ ∴ ص = -١

∴ مجموعة الحل = {(٢ ، -١)} وهى نفس النتيجة التى حصلنا عليها سابقًا.

مثال ٧

أوجد قيمة كل من أ ، ب فيما يأتى : ص = أ س - ب ، أ ص + ب س = ٨

علمًا بأن (٢ ، ١) حل للمعادلتين.

الحل

∵ (٢ ، ١) حل للمعادلة : ص = أ س - ب ∴ ١ = ٢ أ - ب (١)

، ∵ (٢ ، ١) حل للمعادلة : أ ص + ب س = ٨ ∴ أ + ٢ ب = ٨ (٢)

وبضرب المعادلة (١) × ٢ $\therefore$ ٤ أ − ٢ ب = ٢ (٣)

وبجمع (٢) ، (٣) : $\therefore$ ٥ أ = ١٠ $\therefore$ أ = $\frac{١٠}{٥}$ = ٢

وبالتعويض فى (٢) : $\therefore$ ٢ + ٢ ب = ٨ $\therefore$ ٢ ب = ٨ − ٢ = ٦

$\therefore$ ب = $\frac{٦}{٢}$ = ٣

حاول بنفسك ٣

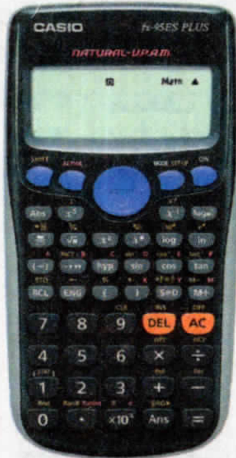
أوجد جبريًا فى ح × ح باستخدام طريقة الحذف مجموعة الحل للمعادلتين :

س + ص = ٣ ، ٢ س − ٣ ص = ١

ثالثًا حل معادلتين آنيتين من الدرجة الأولى فى متغيرين باستخدام الآلة الحاسبة

يمكنك باستخدام الآلة الحاسبة من النوع الذى يدعم حل المعادلات التأكد من حل المعادلتين التى سبق لك حلهما بيانيًا وجبريًا بالتعويض والحذف وهما :

٢ س − ص = ٥ ، س + ٢ ص + ١ = ٠ كالتالى :



خطوة (١) نضع كل معادلة على الصورة : أ س + ب ص = حـ

$\therefore$ ٢ س − ص = ٥ ، س + ٢ ص = −١

خطوة (٢) نضغط على مفتاح MODE ونختار من القائمة (EQN) بضغط مفتاح الرقم المكتوب أمامها.

خطوة (٣) نختار المعادلة التى على الصورة : $(a_nx + b_ny = c_n)$ بضغط مفتاح الرقم المكتوب أمامها.

خطوة (٤) ندخل معاملات س ، ص والحد المطلق بإشاراتها بالترتيب للمعادلة الأولى ثم للمعادلة الثانية ، وذلك باستخدام مفتاح الإدخال = فى كل مرة.

خطوة (٥) نضغط = فتظهر لنا قيمة س وهى ٢ ثم نضغط مرة أخرى = فتظهر لنا قيمة ص وهى −١ فتكون مجموعة الحل = {(٢ ، −١)}

وهى نفس النتيجة التى حصلت عليها سابقًا.

تطبيقات على حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين

فى هذا النوع من المسائل اللفظية يسير الحل كما يلى :

1. نفرض أحد المجهولين س والآخر ص
2. من معطيات المسألة نكون معادلتين من الدرجة الأولى فى س ، ص
3. نحل المعادلتين جبريًا أو بيانيًا لنحصل على قيمة س ، قيمة ص ويفضل حلهما جبريًا.

مثال ٨

عددان نسبيان مجموعهما ١٤ ، وضعف أكبرهما يزيد عن ثلاثة أمثال أصغرهما بمقدار ٣ فأوجد العددين.

الحل

نفرض أن العدد الأكبر = س ، وأن العدد الأصغر = ص

∵ مجموعهما = ١٤ ∴ س + ص = ١٤ (١)

، ∵ ضعف الأكبر يزيد عن ثلاثة أمثال الأصغر بمقدار ٣

∴ ٢ × العدد الأكبر – ٣ × العدد الأصغر = ٣ ∴ ٢ س – ٣ ص = ٣ (٢)

ولحل المعادلتين (١) ، (٢) : نضرب طرفى المعادلة (١) × ٣

∴ ٣ س + ٣ ص = ٤٢ (٣)

وبجمع (٢) ، (٣) : ∴ ٥ س = ٤٥ ∴ س = ٩

وبالتعويض فى (١) : ∴ ٩ + ص = ١٤ ∴ ص = ٥

∴ العدد الأكبر = ٩ ، والعدد الأصغر = ٥

مثال ٩

مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٢ سم ومحيطه ٢٨ سم. أوجد كلًا من طول وعرض المستطيل.

الحل

نفرض أن الطول = س سم ، العرض = ص سم ∴ س – ص = ٢ (١)

، (س + ص) × ٢ = ٢٨ ∴ س + ص = ١٤ (٢)

وبجمع (١) ، (٢) : ∴ ٢ س = ١٦ ∴ س = ٨

وبالتعويض فى (٢) : ∴ ٨ + ص = ١٤ ∴ ص = ٦

∴ طول المستطيل = ٨ سم ، عرض المستطيل = ٦ سم

مثال ١٠

عدد مكون من رقمين ، ورقم عشراته ضعف رقم آحاده ، وإذا عُكس وضع رقميه كان العدد الناتج ينقص عن العدد الأصلى بمقدار ٢٧ أوجد العدد الأصلى.

الحل

نفرض أن رقم الآحاد = س ، وأن رقم العشرات = ص

∵ رقم العشرات ضعف رقم الآحاد ∴ ص = ٢ س (١)

العدد الأصلى = س + ١٠ ص

وإذا عكسنا وضع الرقمين أى أصبح الآحاد = ص ، العشرات = س

فإن العدد الناتج = ص + ١٠ س

ويمكن توضيح ذلك بالجدول المقابل :

	رقم الآحاد	رقم العشرات	العدد
العدد الأصلى	س	ص	س + ١٠ ص
العدد الناتج	ص	س	ص + ١٠ س

، ∵ العدد الناتج ينقص عن العدد الأصلى بمقدار ٢٧

∴ العدد الأصلى − العدد الناتج = ٢٧ ∴ (س + ١٠ ص) − (ص + ١٠ س) = ٢٧

∴ س + ١٠ ص − ص − ١٠ س = ٢٧

∴ ٩ ص − ٩ س = ٢٧ ∴ ص − س = ٣ (٢)

وبالتعويض عن قيمة ص = ٢ س من المعادلة (١) فى المعادلة (٢) :

∴ ٢ س − س = ٣ ∴ س = ٣

وبالتعويض عن قيمة س = ٣ فى المعادلة (١) :

∴ ص = ٢ × ٣ ∴ ص = ٦

∴ رقم الآحاد = ٣ ، رقم العشرات = ٦ ∴ العدد الأصلى = ٦٣

حاول بنفسك ٤

عددان مجموعهما ١٢ وضعف أحدهما يزيد عن الآخر بمقدار ٣ أوجد العددين.

تمارين 1



على حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين بيانيًا وجبريًا



اختبار تفاعلى

● تذكر ● فهم ○ تطبيق ● حل مشكلات | أسئلة كتاب الوزارة

١ أوجد بيانيًا فى ح × ح مجموعة الحل لكل زوج من المعادلات الآتية :

١ ص = ٢ س − ٣ ، س + ٢ ص = ٤ (الغربية ٢٤) «{(٢ ، ١)}»

٢ س + ص = ٥ ، س − ص = ١ (ج. سيناء ١٣) «{(٣ ، ٢)}»

٣ ٣ س + ص = ٥ ، ص + ٣ س = ٨ «∅»

٤ ٢ س + ص = ٤ ، ٨ − ٢ ص = ٤ س «عدد لا نهائى»

٥ ٢ س + ص = ٠ ، س + ٢ ص = ٣ «{(−١ ، ٢)}»

٦ ص = −٣ ، س − ص = ٥ «{(٢ ، −٣)}»

---

٢ أوجد جبريًا فى ح × ح مجموعة الحل لكل زوج من المعادلات الآتية :

١ س = ص ، س + ٣ ص = ٨ «{(٢ ، ٢)}»

٢ ص = س − ١ ، ص + ٢ س = ٥ «{(٢ ، ١)}»

٣ ٢ س − ص = ٣ ، س + ص = ٩ (القاهرة ٢٥) «{(٤ ، ٥)}»

٤ س + ٥ ص = ٤ ، ٢ س − ٥ ص = ١١ (مطروح ١٨) «{(٥ ، $-\frac{1}{5}$)}»

٥ س = ص + ٤ ، ٣ س + ٤ ص = ٥ (الدقهلية ١٨) «{(٣ ، −١)}»

٦ ٢ س − ص = ٣ ، س + ٢ ص = ٤ (أسيوط ٢٣ ، المنوفية ٢٤) «{(٢ ، ١)}»

٧ ٣ س + ٢ ص = ٤ ، س − ٣ ص = ٥ (الجيزة ٢٥ ، الجيزة ٢٣ ، كفر الشيخ ١٩) «{(٢ ، −١)}»

٨ ٣ س + ٤ ص = ٢٤ ، س − ٢ ص = −٢ (الغربية ١٨ ، الجيزة ١٢) «{(٤ ، ٣)}»

٩ ٣ س − ص = −٤ ، ص − ٢ س = ٣ (أسوان ١٩) «{(−١ ، ١)}»

١٠ س + ٢ ص = ٥ ، ٣ س = ص + ٨ (الشرقية ١٨) «{(٣ ، ١)}»

١١ ٥ ص + س = ٢ ، ٢ س − ٣ ص + ٩ = ٠ «{(−٣ ، ١)}»

١٢ ٢ ص − ٣ ـس = ٧ ، ٣ ص + ٢ ـس = ٤ «{(−١ ، ٢)}»

١٣ ـس + ٢ ص = ١ ، ٢ ـس + ٤ ص = −٥ «∅»

١٤ $\frac{س}{٦} + \frac{ص}{٣} = \frac{١}{٣}$ ، $\frac{س}{٢} + \frac{٢ص}{٣} = ١$ «{(٢ ، ٠)}»

٣ أوجد فى ح × ح مجموعة الحل لكل زوج من المعادلات الآتية جبريًا وبيانيًا :

١ ص = ـس + ٤ ، ـس + ص = ٤ «{(٠ ، ٤)}» (الغربية ١٩ ، سوهاج ١٦)

٢ ٣ ـس − ص + ٤ = ٠ ، ص = ٢ ـس + ٣ «{(−١ ، ١)}»

٣ ٢ ـس + ص = ١ ، ـس + ٢ ص = ٥ «{(−١ ، ٣)}»

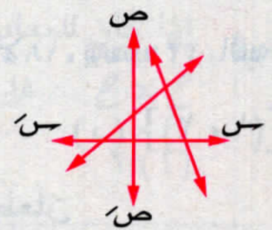
٤ ـس + ٢ ص = ٨ ، ٣ ـس + ص = ٩ «{(٢ ، ٣)}»

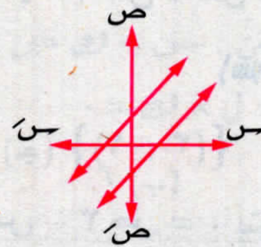
٥ ـس − ص = ٤ ، ٣ ـس + ٢ ص = ٧ «{(٣ ، −١)}» (دمياط ١٣)

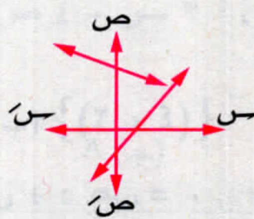
٦ ٣ ـس + ٤ ص = ١١ ، ٢ ـس + ص − ٤ = ٠ «{(١ ، ٢)}»

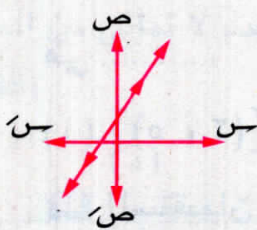
٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ أى من الأشكال التالية يمثل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين ليس لهما حل مشترك ؟ (بورسعيد ١٩)


(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

٢ نقطة تقاطع المستقيمين : ـس + ٣ = ٠ ، ص = ٥ هى .... (الإسماعيلية ٢٥ ، القليوبية ٢٣)

(أ) (٣ ، ٥) (ب) (−٣ ، ٥) (جـ) (−٣ ، −٥) (د) (٣ ، −٥)

٣ نقطة تقاطع المستقيمين : ـس + ٢ = ٠ ، ص = ـس هى .... (الدقهلية ١٧)

(أ) (٢ ، ٢) (ب) (٢ ، ٠) (جـ) (−٢ ، −٢) (د) (٠ ، ٠)

٤ نقطة تقاطع المستقيمين : ـس + ٣ = ٠ ، ص − ٥ = ٠ تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

٥ مجموعة حل المعادلتين : س + ص = ٠ ، ص − ٥ = ٠ فى ح × ح

هى .... (الجيزة ٢٣)

(أ) {(−٥ ، ٥)} (ب) {(٥ ، −٥)} (جـ) {(٥ ، ٥)} (د) {(−٥ ، −٥)}

٦ مجموعة حل المعادلتين : س + ٣ ص = ٤ ، ٣ ص + س = ١ فى ح × ح

هى .... (أسوان ٢٣)

(أ) $\varnothing$ (ب) {(١ ، ١)} (جـ) {(٠ ، $\frac{١}{٣}$)} (د) {(٠ ، ٠)}

٧ المستقيمان : ٣ س = ٧ ، ٢ ص = ٩ يكونان .... (مطروح ١٦ ، الأقصر ١٦)

(أ) متوازيين. (ب) منطبقين.

(جـ) متقاطعين وغير متعامدين. (د) متعامدين.

٨ المستقيمان الممثلان للمعادلتين : س + ٥ ص = ١ ، س + ٥ ص − ٨ = ٠

يكونان .... (البحيرة ٢٣ ، البحيرة ١٧ ، الجيزة ١٦)

(أ) متوازيين. (ب) منطبقين.

(جـ) متعامدين. (د) متقاطعين وغير متعامدين.

٩ مجموعة حل المعادلتين : س − ٢ ص = ١ ، ٣ س + ص = ١٠ فى ح × ح

هى .... (سوهاج ١٨ ، بورسعيد ١٣ ، الفيوم ١١)

(أ) {(٥ ، ٢)} (ب) {(٢ ، ٤)} (جـ) {(١ ، ٣)} (د) {(٣ ، ١)}

١٠ المستقيمان : ٣ س + ٥ ص = ٠ ، ٥ س − ٣ ص = ٠ يتقاطعان

فى .... (سوهاج ٢٥ ، الإسكندرية ١٤ ، البحيرة ١١)

(أ) نقطة الأصل. (ب) الربع الأول.

(جـ) الربع الثانى. (د) الربع الرابع.

١١ عدد حلول معادلة الدرجة الأولى فى متغيرين يساوى .... (القاهرة ٢٣)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائى.

١٢ عدد حلول المعادلة : س = ١ فى ح × ح .... حلًا. (الوادى الجديد ٢٣)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى.

١٣ عدد حلول المعادلتين : س − $\frac{1}{2}$ ص = ٤ ، ٢ س − ص = ٢ فى ح^{2} هو .... (القليوبية ١٦ ، المنوفية ١٦)

(أ) حل وحيد. (ب) حلان. (جـ) عدد لا نهائى. (د) صفر.

١٤ إذا كان المستقيمان الممثلان للمعادلتين : س + ٣ ص = ٤ ، س + أ ص = ٧ متوازيين فإن : أ = ... (القليوبية ١٨)

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٧ (د) ١١

١٥ إذا كان للمعادلتين : س + ٢ ص = ١ ، ٢ س + ك ص = ٢ حل وحيد فى ح × ح فإن ك لا يمكن أن تساوى .... (الدقهلية ١٧)

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) −٢ (د) −٤

١٦ إذا كانت نقطة تقاطع المستقيمين : س − ١ = ٠ ، ص = ٢ ك تقع فى الربع الرابع فإن : ك يمكن أن تساوى .... (كفر الشيخ ١٦)

(أ) −٥ (ب) ٠ (جـ) ١ (د) ٥

١٧ إذا كان للمعادلتين : س + ٤ ص = ٧ ، ٣ س + ك ص = ٢١ عدد لا نهائى من الحلول فى ح × ح فإن : ك = ... (الإسماعيلية ٢٥ ، المنوفية ٢٣ ، سوهاج ١٩ ، البحيرة ١٨ ، قنا ١٧)

(أ) ٤ (ب) ٧ (جـ) ١٢ (د) ٢١

١٨ إذا كان للمعادلتين : س − ك ص = ل ، ٢ س − ٤ ص = ١ عدد لا نهائى من الحلول فى ح × ح فإن : ل × ك = ... (الشرقية ٢٤)

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) ٨ (د) ٤

---

٥ ما عدد حلول كل زوج من المعادلات الآتية :

١ ٧ س + ٤ ص = ٦ ، ٥ س − ٢ ص = ١٤

٢ ٤ س + ٢ ص = ١٠ ، ص = −٢ س − ٥

٣ ٩ س + ٦ ص = ٢٤ ، ٣ س + ٢ ص = ٨

---

٦ أوجد قيمة كل من أ ، ب فيما يأتى :

أ س + ب ص − ٥ = ٠ ، ٣ أ س + ب ص = ١٧ علمًا بأن : (٣ ، −١) حل المعادلتين.

(الغربية ٢٥ ، الدقهلية ٢٣ ، الأقصر ١٨ ، دمياط ١٧ ، الغربية ١٦) «٢ ، ١»

٧ إذا كان : (أ ، ٢ب) حلًا للمعادلتين : ٣س − ص = ٥ ، س + ص = −١

فأوجد : قيمتى أ ، ب (الدقهلية ١٧) «١ ، −١»

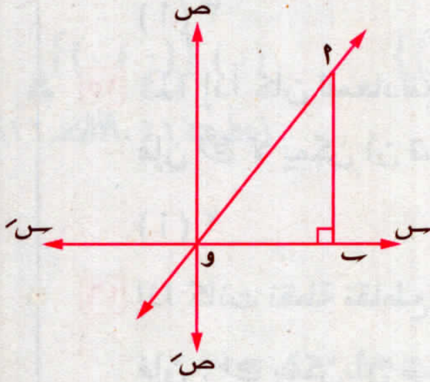
---

٨ إذا كانت : د (س) = أ $س^٢$ + ب ، وكانت د (١) = ٥ ، د (٢) = ١١

فأوجد : قيمتى أ ، ب (الفيوم ٠٩) «٢ ، ٣»

---

٩ فى الشكل المقابل :



معادلة $\overleftrightarrow{\text{وأ}}$ هى : ٣ص = ٤س

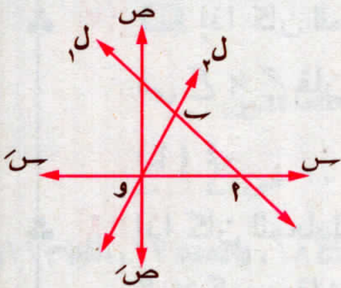
، معادلة $\overleftrightarrow{\text{بأ}}$ هى : س = ٦

أوجد : محيط △ وأب

«٢٤ وحدة طول»

---

١٠ فى الشكل المقابل :



إذا كانت معادلة الخط المستقيم $ل_١$ هى : س + ص = ٦

ومعادلة الخط المستقيم $ل_٢$ هى : ص − ٢س = ٠

حيث $ل_١ \cap ل_٢$ = {ب} ، و نقطة الأصل ، أ ∈ $\overleftrightarrow{\text{س س َ}}$

أوجد : مساحة △ وأب (الشرقية ١٥) «١٢ وحدة مربعة»

تطبيقات على حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين

١ عددان نسبيان مجموعهما ٦٣ ، والفرق بينهما ١١ أوجد العددين. (البحيرة ١٦) «٣٧ ، ٢٦»

---

٢ عددان صحيحان مجموعهما ٥٤ ، ضعف العدد الأول يساوى العدد الثانى فأوجد العددين. «١٨ ، ٣٦»

---

٣ عددان إذا أُضيف ثلاثة أمثال العدد الأول إلى ضعف العدد الثانى كان الناتج ١٣ وإذا أُضيف العدد الأول إلى ثلاثة أمثال العدد الثانى كان الناتج ١٦ فما العددان ؟ (بورسعيد ١٧) «١ ، ٥»

---

٤ مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٤ سم ، فإذا كان محيط المستطيل ٢٨ سم أوجد مساحة المستطيل. (القليوبية ١٩ ، القاهرة ١٧ ، الإسكندرية ١٢) «٤٥ $سم^٢$»

٥ إذا كان : حا (أ + ب) = $\frac{1}{2}$ ، طا (٢ أ − ب) = $\sqrt{3}$ حيث (أ + ب) ، (٢ أ − ب) قياسا زوايتين حادتين. أوجد قيمة كلًا من : أ ، ب «٤٠° ، ٢٠°»

---

٦ إذا كان عدد الفرق الرياضية المشاركة فى بطولة كأس الأمم الأفريقية ١٦ فريقًا ، وكان عدد الفرق غير العربية يزيد عن ثلاثة أمثال عدد الفرق العربية بمقدار ٤

أوجد عدد الفرق العربية المشاركة فى البطولة. «٣ فرق»

---

٧ مجموع عمرى أب وابنه ٥٥ سنة فإذا كان عمر الأب يزيد عن أربعة أمثال عمر ابنه بمقدار ٥ سنوات ، فما عمر كل منهما ؟ «٤٥ سنة ، ١٠ سنوات»

---

٨ زاويتان متكاملتان ضعف قياس أكبرهما يساوى سبعة أمثال قياس الصغرى.

أوجد قياس كل زاوية. «١٤٠° ، ٤٠°»

---

٩ زاويتان حادتان فى مثلث قائم الزاوية الفرق بين قياسيهما ٥٠° أوجد قياس كل زاوية.

(قنا ٢٣ ، البحيرة ١٩ ، القليوبية ١٨ ، دمياط ١٧) «٧٠° ، ٢٠°»

---

١٠ إذا كان ثمن ٤ أقلام وكتابين ٢٢ جنيهًا ، وإذا زاد عدد الأقلام قلمًا ونقص عدد الكتب كتابًا لأصبح الثمن الكلى ٢٠ جنيهًا ، أوجد ثمن كل من القلم والكتاب. «٣ جنيهات ، ٥ جنيهات»

---

١١ عدد مكون من رقمين ومجموع رقميه يساوى ثلاثة أمثال رقم آحاده ورقم عشراته يزيد ٤ عن رقم آحاده ، فما هو هذا العدد ؟ «٨٤»

---

١٢ عدد مكون من رقمين مجموعهما ١١ وإذا عكس وضع الرقمين فإن العدد الناتج يزيد عن العدد الأصلى بمقدار ٢٧ فما العدد الأصلى ؟ (كفر الشيخ ١٦) «٤٧»

---

١٣ عدد مكون من رقمين فإذا كان العدد يساوى خمسة أمثال مجموع رقميه ، وإذا عُكس وضع الرقمين كان العدد الناتج يزيد عن العدد الأصلى بمقدار ٩ فما العدد الأصلى ؟ «٤٥»

---

١٤ عدد نسبى إذا طرح من كل من بسطه ومقامه واحد لأصبح العدد النسبى مساويًا $\frac{1}{2}$ ، وإذا أضيف إلى المقام ٥ لأصبح العدد النسبى مساويًا $\frac{1}{3}$ أوجد العدد النسبى. «$\frac{4}{7}$»

١٥ إذا كان مجموع عمرى أحمد وأسامة الآن ٤٣ سنة ، وبعد ٥ سنوات يكون الفرق بين عمريهما ٣ سنوات أوجد عمر كل منهما بعد ٧ سنوات. «٣٠ سنة ، ٢٧ سنة»

---

١٦ منذ خمس سنوات كان عمر مجدى خمسة أمثال عمر ابنته دينا ، وبعد أربع سنوات من الآن يصير عمر مجدى ثلاثة أمثال عمر دينا فما عمر كل منهما الآن ؟ «٥٠ سنة ، ١٤ سنة»

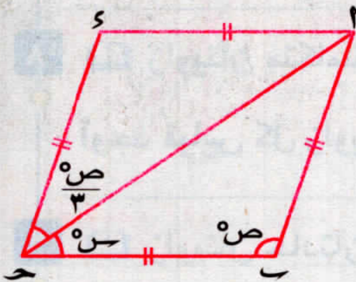
---

١٧ مستطيل محيطه ٢٤ سم ، وإذا نقص طوله ٤ سم وزاد عرضه ٢ سم صار مربعًا.

أوجد مساحة المربع. (الإسماعيلية ١٣) «٢٥ سم^2»

---

١٨ فى الشكل المقابل :



أ ب جـ ء معين ، ق (∠ ب) = ص°

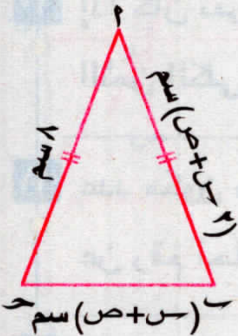
، ق (∠ أ جـ ب) = س°

، ق (∠ أ جـ ء) = $\frac{ص°}{٣}$

أوجد : قيمة ص «١٠٨°»

---

١٩ فى الشكل المقابل :



أ ب جـ مثلث فيه : أ ب = أ جـ

، ومحيطه ٢٢ سم

أوجد : س ، ص «٢ ، ٤»

للمتفوقين

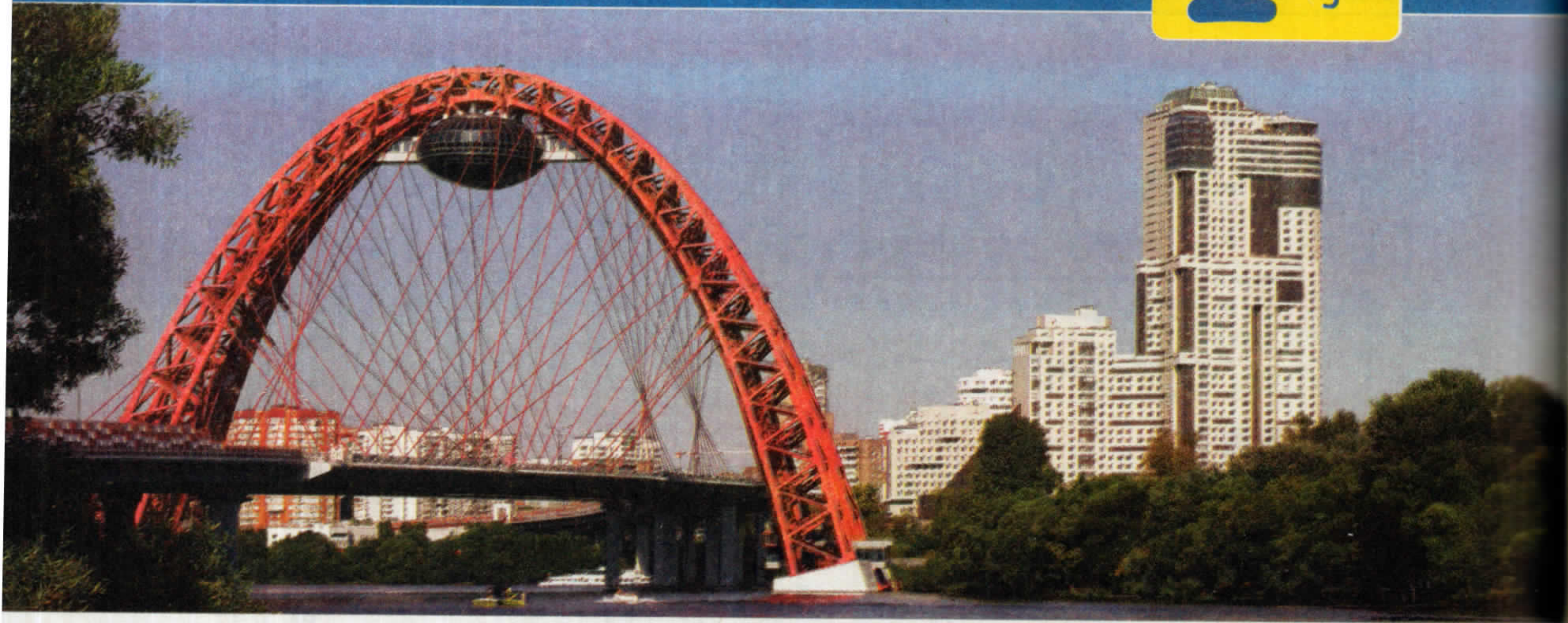
١ إذا كان : $\frac{١}{ل} + \frac{١}{م} = ٣$ ، $\frac{٢}{ل} + \frac{٣}{م} = ١٠$ فأوجد قيمة كل من : ل ، م «-١ ، $\frac{١}{٤}$»

---

٢ يُراد تحويل مبلغ ٨ جنيهات إلى ٢١ ورقة مالية بعضها فئة ٢٥ قرشًا والبعض الآخر فئة ٥٠ قرشًا فكم عدد الورقات المالية لكل فئة ؟ «١٠ فئة ٢٥ قرشًا ، ١١ فئة ٥٠ قرشًا»

الدرس 2

حل معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد بيانيًا وجبريًا



أولًا حل معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد بيانيًا

لحل المعادلة التربيعية فى مجهول واحد بيانيًا اتبع الخطوات الآتية :

١ ضع المعادلة على الصورة : ٩ س^٢ + ب س + حـ = ٠

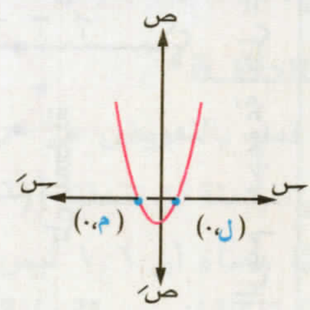
٢ افرض أن : د (س) = ٩ س^٢ + ب س + حـ ثم ارسم منحنى الدالة د

٣ عيِّن نقط تقاطع منحنى الدالة د مع محور السينات

فتكون الإحداثيات السينية لنقط التقاطع هذه هى حلول المعادلة.

وعلى هذا فإنه توجد ثلاث حالات :

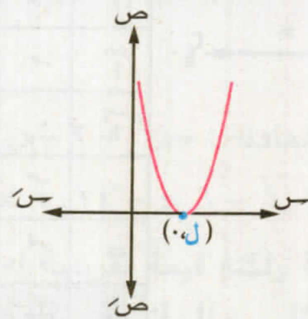
١ **المنحنى يقطع محور السينات فى نقطتين.**



يوجد **حلان** للمعادلة فى ح

، م.ح = {ل ، م}

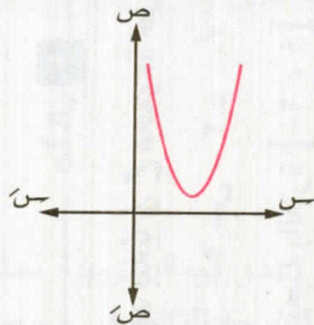
٢ **المنحنى يمس محور السينات فى نقطة واحدة.**



يوجد **حل وحيد** للمعادلة فى ح

، م.ح = {ل}

٣ **المنحنى لا يقطع محور السينات.**



لا يوجد حل للمعادلة فى ح

، م.ح = ∅

والأمثلة المذكورة فى الجدول التالى توضح الحالات الثلاث السابقة :

مثال ١

أوجد بيانيًا فى ح مجموعة حل المعادلة :

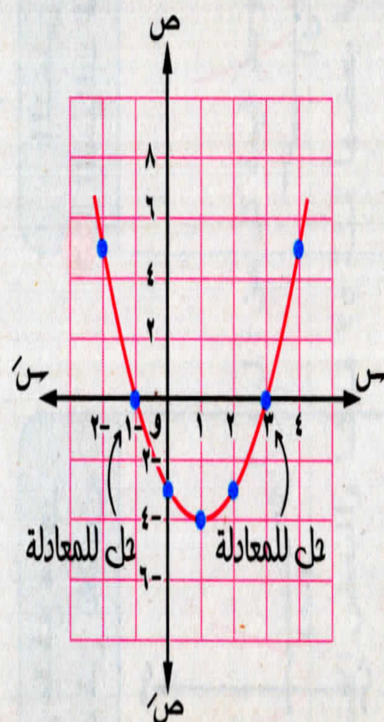
$س^٢ - ٢س - ٣ = ٠$

مستعينًا بالفترة [-٢ ، ٤]

الحل

نفرض أن : د (س) = $س^٢ - ٢س - ٣$

س	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤
ص	٥	٠	-٣	-٤	-٣	٠	٥



من الرسم : مجموعة الحل = {٣ ، -١}

مثال ٢

أوجد بيانيًا فى ح مجموعة حل المعادلة :

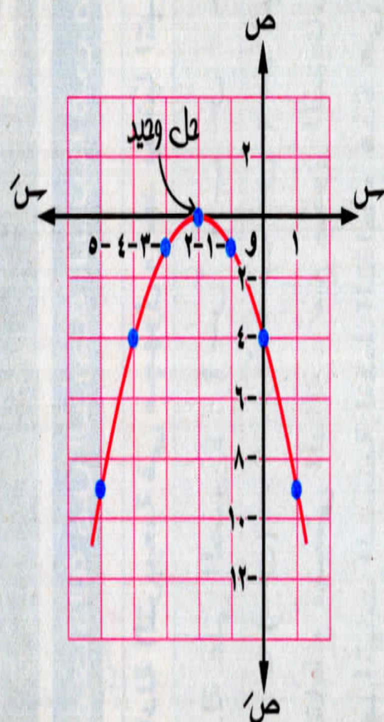
$-س^٢ - ٤س - ٤ = ٠$

مستعينًا بالفترة [-٥ ، ١]

الحل

نفرض أن : د (س) = $-س^٢ - ٤س - ٤$

س	-٥	-٤	-٣	-٢	-١	٠	١
ص	-٩	-٤	-١	٠	-١	-٤	-٩



من الرسم : مجموعة الحل = {-٢}

مثال ٣

أوجد بيانيًا فى ح مجموعة حل المعادلة :

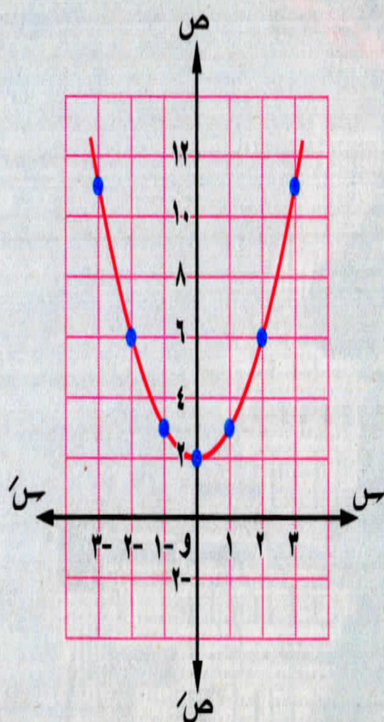
$س^٢ + ٢ = ٠$

مستعينًا بالفترة [-٣ ، ٣]

الحل

نفرض أن : د (س) = $س^٢ + ٢$

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
ص	١١	٦	٣	٢	٣	٦	١١



من الرسم : مجموعة الحل = ∅

ملاحظات على الأمثلة الثلاثة السابقة

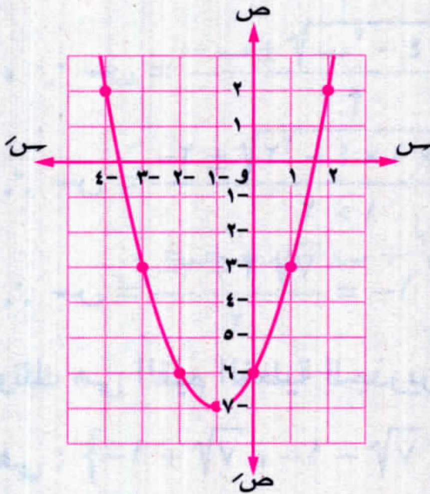
- في مثال (١) : * نقطة رأس المنحنى هى (١ ، −٤)   * القيمة الصغرى للدالة هى : −٤
  * معادلة محور تماثل المنحنى هى س = ١
- في مثال (٢) : * نقطة رأس المنحنى هى (−٢ ، ٠)   * القيمة العظمى للدالة هى : صفر
  * معادلة محور تماثل المنحنى هى س = −٢
- في مثال (٣) : * نقطة رأس المنحنى هى (٠ ، ٢)   * القيمة الصغرى للدالة هى : ٢
  * معادلة محور تماثل المنحنى هى س = صفر

حاول بنفسك ١

ارسم منحنى الدالة د : د (س) = س^{٢} + ٢ س − ٣ على الفترة [−٤ ، ٢]
ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة : س^{٢} + ٢ س − ٣ = ٠

مثال ٤

ارسم الشكل البيانى للدالة د : د (س) = س^{٢} + ٢ س − ٦ متخذاً س ∈ [−٤ ، ٢]
ومن الرسم أوجد جذرى المعادلة : د (س) = ٠ فى ح



الحل

د (س) = س^{٢} + ٢ س − ٦

س	−٤	−٣	−٢	−١	٠	١	٢
ص	٢	−٣	−٦	−٧	−٦	−٣	٢

من الرسم : القيم التقريبية لجذرى المعادلة : س^{٢} + ٢ س − ٦ = ٠
هى : ١,٦ ، −٣,٦

ملاحظة

إذا قمت بالتعويض عن س = ١,٦ فى المعادلة : س^{٢} + ٢ س − ٦ = ٠
فإن المعادلة لن تتحقق [(١,٦)^{٢} + ٢ × ١,٦ − ٦ = −٠,٢٤ ≠ ٠]
وهذا معناه أن ١,٦ ليس جذرًا للمعادلة ولكنه قيمة تقريبية له وكذلك −٣,٦ هو قيمة تقريبية لجذر المعادلة الآخر **وبصفة عامة فإن استخدام الرسم البيانى لإيجاد جذرى معادلة الدرجة الثانية فى مجهول واحد لا يعطى دائمًا قيمًا دقيقة لجذرى المعادلة.**

ثانيًا حل معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد باستخدام القانون العام

رأينا فى المثال السابق أن :

استخدام الرسم البيانى فى إيجاد جذرى المعادلة : $س^٢ + ٢س - ٦ = ٠$ أعطى قيمًا تقريبية للجذرين ولذلك فمن الأفضل حل هذه المعادلة باستخدام القانون العام كما سيتضح لك فيما يلى :

القانون العام لحل معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد

إذا كانت : $أ س^٢ + ب س + حـ = ٠$ حيث أ ، ب ، حـ أعداد حقيقية ، $أ \neq ٠$

فإن : $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ حـ}}{٢ أ}$

أى أن : مجموعة الحل للمعادلة = $\left\{ \frac{-ب + \sqrt{ب^٢ - ٤ أ حـ}}{٢ أ} ، \frac{-ب - \sqrt{ب^٢ - ٤ أ حـ}}{٢ أ} \right\}$

- **وفيما يلى كيفية استخدام القانون العام لحل المعادلة : $س^٢ + ٢س - ٦ = ٠$**

$\because$ أ = ١ ، ب = ٢ ، حـ = -٦

، $\because$ $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ حـ}}{٢ أ}$

$\therefore$ $س = \frac{-٢ \pm \sqrt{٢^٢ - ٤ \times ١ \times (-٦)}}{٢ \times ١} = \frac{-٢ \pm \sqrt{٤ + ٢٤}}{٢} = \frac{-٢ \pm \sqrt{٢٨}}{٢} = \frac{-٢ \pm ٢\sqrt{٧}}{٢}$

$\therefore$ $س = \frac{-٢ + ٢\sqrt{٧}}{٢} = -١ + \sqrt{٧}$ أ، $س = \frac{-٢ - ٢\sqrt{٧}}{٢} = -١ - \sqrt{٧}$

وتلك هى القيم الفعلية للجذرين بدون تقريب فتكون مجموعة حل المعادلة فى ح

هى : $\{-١ + \sqrt{٧} ، -١ - \sqrt{٧}\}$

ويمكن حساب قيم تقريبية لكل من الجذرين مثل :

$س = -١ + \sqrt{٧} \approx ١,٦٤٦$ لأقرب ثلاثة أرقام عشرية

$\approx ١,٦$ لأقرب رقم عشرى واحد

، $س = -١ - \sqrt{٧} \approx -٣,٦٤٦$ لأقرب ثلاثة أرقام عشرية

$\approx -٣,٦$ لأقرب رقم عشرى واحد

مثال ٥

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

١ $س^٢ - ٥ س - ٦ = ٠$

٢ $٨ س (س - ١) = -٢$

٣ $\frac{٥}{س^٢} - \frac{٤}{س} = -١$

الحل

١ ∵ $أ = ١$ ، $ب = -٥$ ، $ح = -٦$

، ∵ $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ ح}}{٢ أ}$

∴ $س = \frac{-(-٥) \pm \sqrt{(-٥)^٢ - ٤ \times ١ \times (-٦)}}{٢ \times ١}$

$= \frac{٥ \pm \sqrt{٢٥ + ٢٤}}{٢ \times ١} = \frac{٥ \pm \sqrt{٤٩}}{٢} = \frac{٥ \pm ٧}{٢}$

∴ $س = \frac{٥ + ٧}{٢} = ٦$ أ، $س = \frac{٥ - ٧}{٢} = -١$

∴ مجموعة الحل = {٦ ، -١}

حل آخر باستخدام التحليل :

∵ $س^٢ - ٥ س - ٦ = ٠$

∴ $(س + ١)(س - ٦) = ٠$

∴ إما $س + ١ = ٠$ ومنها $س = -١$

أ، $س - ٦ = ٠$ ومنها $س = ٦$

∴ مجموعة الحل = {٦ ، -١}

٢ قبل الحل باستخدام القانون العام ضع المعادلة على الصورة : $أ س^٢ + ب س + ح = ٠$

∵ $٨ س (س - ١) = -٢$ ∴ $٨ س^٢ - ٨ س = -٢$

∴ $٨ س^٢ - ٨ س + ٢ = ٠$

∴ $أ = ٨$ ، $ب = -٨$ ، $ح = ٢$

∴ $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ ح}}{٢ أ} = \frac{-(-٨) \pm \sqrt{(-٨)^٢ - ٤ \times ٨ \times ٢}}{٢ \times ٨}$

$= \frac{٨ \pm \sqrt{٦٤ - ٦٤}}{١٦} = \frac{٨ \pm \sqrt{٠}}{١٦} = \frac{٨}{١٦} = \frac{١}{٢}$

∴ مجموعة الحل = $\{\frac{١}{٢}\}$

٣ ∵ $\frac{٥}{\text{س}^{٢}} - \frac{٤}{\text{س}} = -١$ بضرب طرفى المعادلة فى $\text{س}^{٢}$

∴ $٥ - ٤\,\text{س} = -\,\text{س}^{٢}$ ∴ $\text{س}^{٢} - ٤\,\text{س} + ٥ = ٠$

∴ $\text{أ} = ١$ ، $\text{ب} = -٤$ ، $\text{ح} = ٥$

∴ $\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أ}\,\text{ح}}}{٢\,\text{أ}} = \frac{٤ \pm \sqrt{١٦ - ٤ \times ١ \times ٥}}{٢ \times ١} = \frac{٤ \pm \sqrt{-٤}}{٢}$

، ∵ $\sqrt{-٤} \notin \text{ح}$

∴ لا توجد حلول حقيقية للمعادلة : $\text{س}^{٢} - ٤\,\text{س} + ٥ = ٠$

∴ مجموعة الحل = $\emptyset$

ملاحظات على المثال السابق

- **فى رقم ١** : قيمة المقدار : $\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أ}\,\text{ح} = ٤٩ > ٠$ وكان للمعادلة حلان هما ٦ ، −١

  وبصفة عامة : إذا كان $\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أ}\,\text{ح} > ٠$ فإن للمعادلة **حلان مختلفان** فى ح

- **فى رقم ٢** : قيمة المقدار : $\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أ}\,\text{ح} = ٠$ وكان للمعادلة حل وحيد هو $\frac{١}{٢}$

  وبصفة عامة : إذا كان $\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أ}\,\text{ح} = ٠$ فإن للمعادلة **حل وحيد** فى ح

- **فى رقم ٣** : قيمة المقدار : $\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أ}\,\text{ح} < ٠$ ولم يكن للمعادلة حلول حقيقية

  وبصفة عامة : إذا كان $\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أ}\,\text{ح} < ٠$ فإن المعادلة **ليس لها حلول** فى ح

حاول بنفسك ٢

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين :

١ $٢\,\text{س}^{٢} + ٧\,\text{س} - ٤ = ٠$

٢ $\text{س}^{٢} - ٢\,\text{س} - ١ = ٠$ مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد.

ثالثًا حل معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد باستخدام الآلة الحاسبة

يمكن حل معادلات الدرجة الثانية فى مجهول واحد

مثل : $س^٢ + ٢ س = ٦$

باستخدام الآلة الحاسبة من النوع الذى يدعم حل المعادلات كالتالى :

خطوة (١) نضع المعادلة على الصورة : $أ س^٢ + ب س + حـ = ٠$

∵ $س^٢ + ٢ س = ٦$ ∴ $س^٢ + ٢ س - ٦ = ٠$

خطوة (٢) نضغط على مفتاح MODE ونختار من القائمة (EQN) بضغط مفتاح الرقم المكتوب أمامها.

خطوة (٣) نختار المعادلة التى على الصورة : $(a x^2 + b x + c = 0)$ بضغط مفتاح الرقم المكتوب أمامها.

خطوة (٤) ندخل معاملات : $س^٢$ ، س ، والحد المطلق بإشاراتها بالترتيب باستخدام مفتاح الإدخال =

خطوة (٥) نضغط = فيظهر لنا القيمة الأولى لـ س وهى : $-١ + \sqrt{٧}$

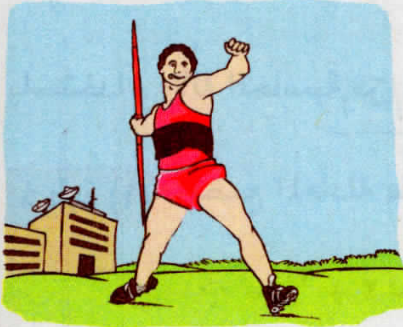
ثم نضغط = مرة أخرى فنحصل على القيمة الثانية لـ س وهى : $-١ - \sqrt{٧}$

حاول بنفسك ٣

باستخدام الآلة الحاسبة أوجد مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين فى ح :

١ $س^٢ - ٩ س + ١٨ = ٠$ ٢ $س (س - ٤) = ٣$

مثال ٦



فى إحدى مسابقات رمى الرمح كان مسار الرمح لأحد اللاعبين

يتبع العلاقة : ص = − ٠,٠٠٨ $س^٢$ + ٠,٥٦ س + ١,٢

حيث س تمثل المسافة الأفقية التى يقطعها الرمح

من نقطة القذف

، ص تمثل ارتفاع الرمح عن سطح الأرض (بالمتر)

أوجد المسافة الأفقية التى يقطعها الرمح حتى يسقط بداية من نقطة القذف لأقرب جزء من مائة.

الحــل

لإيجاد المسافة الأفقية التى يقطعها الرمح حتى يسقط بداية من نقطة القذف

نضع ص = ٠ فى العلاقة المعطاة فنحصل على المعادلة من الدرجة الثانية الآتية :

− ٠,٠٠٨ $س^٢$ + ٠,٥٦ س + ١,٢ = ٠

وبحلها نحصل على المسافة المطلوبة ∴ أ = − ٠,٠٠٨ ، ب = ٠,٥٦ ، حـ = ١,٢

$$∴ س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ حـ}}{٢ أ} = \frac{-٠,٥٦ \pm \sqrt{(٠,٥٦)^٢ - ٤ \times (-٠,٠٠٨) \times ١,٢}}{٢ \times -٠,٠٠٨}$$

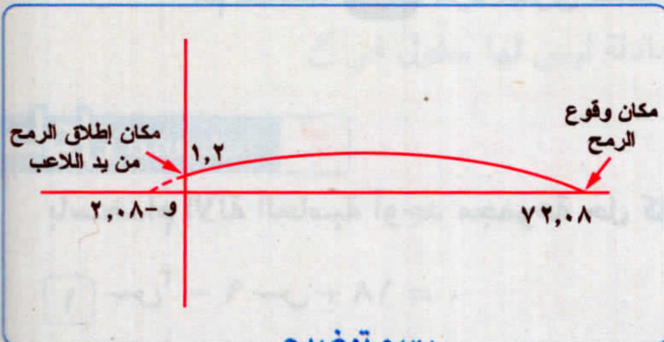
$$∴ س = \frac{-٠,٥٦ + \sqrt{٠,٣٥٢}}{-٠,٠١٦} \approx -٢,٠٨$$

(مرفوض لأن المسافة لابد أن تكون موجبة)

$$أ، س = \frac{-٠,٥٦ - \sqrt{٠,٣٥٢}}{-٠,٠١٦} \approx ٧٢,٠٨$$

أى أن : الرمح سوف يسقط تقريبًا على

بُعد ٧٢,٠٨ مترًا من نقطة القذف.



رسم توضيحى

على حل معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد بيانيًا وجبريًا

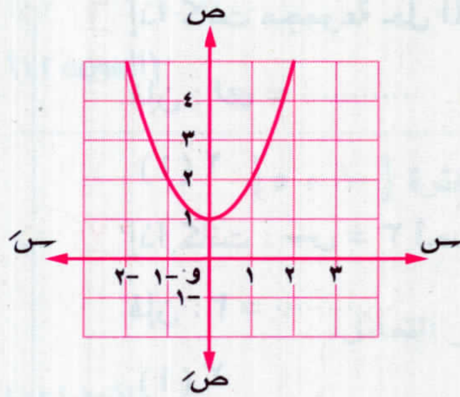


اختبار تفاعلى

● تذكر ● فهم ● تطبيق ● حل مشكلات | أسئلة كتاب الوزارة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ الشكل المقابل يمثل منحنى دالة تربيعية د



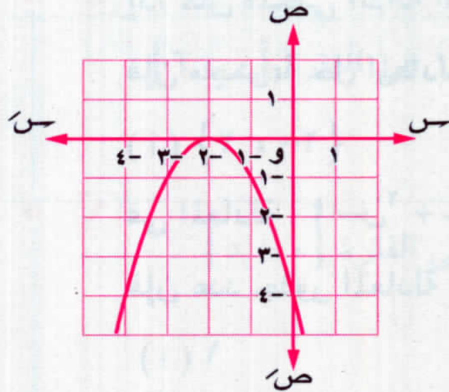
فإن مجموعة حل المعادلة : د (س) = صفر

فى ح هى .... (القاهرة ١٦)

(أ) ∅ (ب) {١}

(ج) {٠} (د) {(٠ ، ١)}

٢ فى الشكل المقابل :



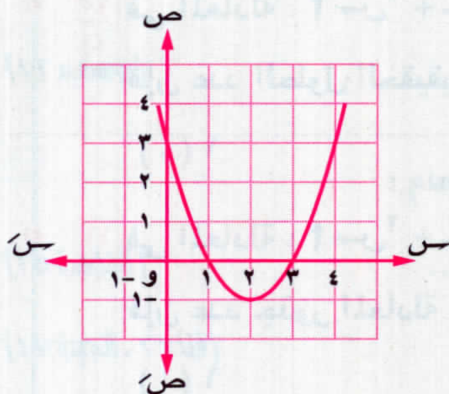
مجموعة حل المعادلة : د (س) = صفر

فى ح هى ....

(أ) {-٢} (ب) {-٢ ، ٤}

(ج) {٤} (د) ∅

٣ فى الشكل المقابل :



مجموعة حل المعادلة : د (س) = صفر

فى ح هى .... (القاهرة ١٥)

(أ) (٢ ، -١) (ب) {(٣ ، ١)}

(ج) {٣ ، ١} (د) (٠ ، ٣)

٤ إذا كان منحنى الدالة التربيعية د يمر بالنقاط (-١ ، ٠) ، (٠ ، -٤) ، (٤ ، ٠)

فإن مجموعة حل المعادلة : د (س) = ٠ فى ح هى .... (المنوفية ٢٥ ، الغربية ١٩)

(أ) {-١ ، ٠} (ب) {-٤ ، ٠} (ج) {-١ ، ٤} (د) {٤ ، -٤}

٥ منحنى الدالة د حيث د (س) = $س^2$ – ٥ س يقطع محور السينات فى النقطتين .... (كفر الشيخ ١٣)

(أ) (٢ ، ٠) ، (٠ ، ٥)   (ب) (٠ ، ٠) ، (٥ ، ٠)

(جـ) (٢ ، ٠) ، (–٥ ، ٠)   (د) (٠ ، ٠) ، (–٥ ، ٠)

٦ إذا كانت مجموعة حل المعادلة : ٤ $س^2$ + ٤ س + ك = صفر هى $\{-\frac{1}{2}\}$

فإن : ك = ... (الإسماعيلية ١٣)

(أ) ٢   (ب) ١   (جـ) –١   (د) –٨

٧ إذا كانت : س = ٣ أحد حلول المعادلة : $س^2$ – أ س – ٦ = ٠

فإن : أ = ... (السويس ١٧)

(أ) ٣   (ب) ٢   (جـ) ١   (د) –١

٨ إذا كان منحنى الدالة التربيعية د متماثل حول محور الصادات ويمر بالنقطة (٢ ، ٠)

فإن مجموعة حل المعادلة د (س) = صفر فى ح هى .... (بورسعيد ٢٥)

(أ) {٢ ، –٢}   (ب) {٢}   (جـ) {٢ ، ٠}   (د) (٢ ، –٢)

٩ فى المعادلة : أ $س^2$ + ب س + جـ = ٠ حيث أ ≠ ٠ إذا كان : $ب^2$ – ٤ أ جـ > ٠

فإن عدد جذور المعادلة فى ح = ... (الفيوم ١٩ ، دمياط ١٦)

(أ) ١   (ب) ٢   (جـ) صفر   (د) عدد لا نهائى.

١٠ فى المعادلة : أ $س^2$ + ب س + جـ = ٠ حيث أ ≠ ٠ إذا كان : $ب^2$ – ٤ أ جـ = ٠

فإن عدد الحلول الحقيقية للمعادلة = ...

(أ) ١   (ب) ٢   (جـ) صفر   (د) عدد لا نهائى.

١١ فى المعادلة : أ $س^2$ + ب س + جـ = ٠ حيث أ ≠ ٠ إذا كان : $ب^2$ – ٤ أ جـ < ٠

فإن عدد جذور المعادلة فى ح = ...

(أ) ١   (ب) ٢   (جـ) صفر   (د) عدد لا نهائى.

١٢ إذا كانت مجموعة الحل للمعادلة : $س^2$ – أ س + ٤ = ٠ فى ح هى ∅

فإن أ يمكن أن تساوى .... (الدقهلية ٢٤)

(أ) –٥   (ب) صفر   (جـ) ٤   (د) ٥

٢ أوجد مجموعة حل المعادلة الآتية فى ح : $س^٢ + ٢ س - ٣ = ٠$

١ بيانيًا مستعينًا بالفترة [-٤ ، ٢]

٢ باستخدام التحليل.

٣ باستخدام القانون العام.

٤ باستخدام الآلة الحاسبة.

---

٣ مثِّل بيانيًا الدالة د : د (س) = $س^٢ - ٢ س$ فى الفترة [-١ ، ٣]

ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة : $س^٢ - ٢ س = ٠$ (السويس ١٢)

---

٤ ارسم الشكل البيانى للدالة د : د (س) = $س^٢ - ٤ س + ٣$ فى الفترة [-١ ، ٥]

ومن الرسم أوجد :

١ القيمة الصغرى للدالة.

٢ معادلة محور التماثل.

٣ مجموعة حل المعادلة : د (س) = ٠ (المنوفية ١٢)

---

٥ ارسم الشكل البيانى للدالة د : د (س) = $- س^٢ + ٦ س - ١١$ فى الفترة [٠ ، ٦]

ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة : $س^٢ - ٦ س + ١١ = ٠$.

---

٦ ارسم الشكل البيانى للدالة د : د (س) = $٦ س - س^٢ - ٩$ فى الفترة [٠ ، ٥]

ومن الرسم أوجد :

١ القيمة العظمى أو الصغرى للدالة.

٢ مجموعة حل المعادلة : $٦ س - س^٢ - ٩ = ٠$. (بورسعيد ١٢)

---

٧ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية باستخدام القانون العام :

١ $٣ س^٢ - ٥ س + ١ = ٠$ مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد. (القاهرة ٢٥)

٢ $س^٢ - ٤ س + ١ = ٠$ مقربًا الناتج لرقمين عشريين. (قنا ٢٣ ، الجيزة ١٧)

٣ $٢ س^٢ - ٤ س + ١ = ٠$ مقربًا الناتج لثلاثة أرقام عشرية. (الشرقية ٢٣ ، الدقهلية ١٩)

٤ $٣ س^٢ - ٦ س + ١ = ٠$ مقربًا الناتج لثلاثة أرقام عشرية. (ج. سيناء ١٨)

٥ $٢ س^٢ + ٥ س = ٠$. (الإسكندرية ١٩)

٦ $س^2 + ٣س + ٥ = ٠$ (الفيوم ١٩)

٧ $س^2 + ٨س + ٩ = ٠$ حيث : $\sqrt{٧} \approx ٢,٦٥$ (الإسماعيلية ٠٩)

٨ $س^2 - ٥س + ٢ = ٠$ حيث : $\sqrt{١٧} \approx ٤,١٢$ (الإسكندرية ٢٥)

---

٨ أوجد مجموعة الحل فى ح لكل من المعادلات الآتية باستخدام القانون العام مقربًا الناتج لثلاثة أرقام عشرية :

١ $س^2 = ٤ + ٢س$ (الفيوم ٢٥)

٢ $س(س - ١) = ٤$ (الجيزة ٢٣ ، الفيوم ٢٤)

٣ $٢س^2 = ٣(٢ - س)$

٤ $(س - ٣)^2 - ٥س = ٠$

٥ $س + \frac{٤}{س} = ٦$ (دمياط ١٩)

٦ $\frac{٨}{س^2} + \frac{١}{س} = ١$ (الفيوم ١٢)

٧ $\frac{س}{٣} = \frac{١}{س - ٥}$

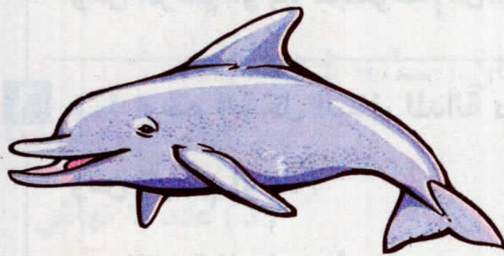
٨ $\frac{س^2}{٩} - \frac{٤}{٣}س = -٢$

تطبيقات على حل معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد

١ عند قفز الدولفين فوق سطح الماء فإنه يرسم مسارًا يتبع العلاقة : $ص = -٠,٢ س^2 + ٢س$

حيث ص ارتفاع الدولفين بالقدم فوق سطح الماء ، س المسافة الأفقية بالقدم.

أوجد المسافة الأفقية بالقدم التى يقطعها الدولفين من بداية قفزه من الماء ليصطدم بسطح الماء مرة أخرى. «١٠ قدم»



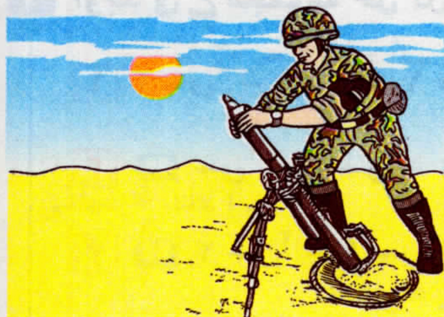
---

٢ أطلقت قذيفة من مدفع هاون فى مسار يتبع العلاقة :

$ص = ٠,٣٨ + ٠,٧٨ س - ٠,٣ س^2$

حيث س المسافة الأفقية بالكيلو متر ، ص ارتفاع القذيفة عن سطح الأرض بالكيلو متر.

أوجد البُعد الأفقى عن المدفع الذى تصله القذيفة حتى تصطدم بسطح الأرض. «٣ كم»



٣ 📖 رأى ثعبان على الأرض صقرًا على ارتفاع ١٦٠ مترًا منه ، وهو ينطلق إليه بسرعة ٢٤ مترًا/ دقيقة لكى ينقض عليه ، فإذا كان الصقر ينطلق رأسيًا لأسفل حسب العلاقة ف = ع. ن + ٤,٩ ن^{٢} حيث ف المسافة بالمتر ، ع. سرعة الانطلاق بالمتر/ دقيقة ، ن الزمن بالدقائق. أوجد الزمن الذى يأخذه الثعبان لكى يتمكن من الهرب قبل أن يصل إليه الصقر. «أقل من ٣,٧٧ ثانية»

للمتفوقين

أكمل ما يأتى :

١ إذا قطع منحنى الدالة التربيعية د محور السينات فى النقطتين (١ ، ٠) ، (٣ ، ٠)

فإن محور التماثل لمنحنى الدالة د هو المستقيم المار برأس المنحنى عند س = ...

٢ إذا كانت النقطة (−٣ ، ٠) هى نقطة رأس المنحنى للدالة د

فإن مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠ هى ....

٣ إذا كانت النقطة (أ − ٢ ، ٠) نقطة رأس المنحنى للدالة التربيعية د

، مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠ هى {٥} فإن : أ = ...

٤ إذا كانت النقطة (−٣ ، ٤) هى نقطة رأس المنحنى للدالة التربيعية د

، −٥ أحد جذرى المعادلة د (س) = ٠ فإن الجذر الآخر هو ....

الدرس 3 حل معادلتين فى متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية



تعتمد طريقة حل معادلتين فى متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية على طريقة التعويض والمثال التالى يوضح خطوات الحل.

مثال ١

أوجد فى ح × ح مجموعة الحل للمعادلتين الآتيتين : س − ص = ١ ، س^{٢} + ص^{٢} = ١٣

الحل

١ من معادلة الدرجة الأولى نعبر عن أحد المتغيرين بدلالة المتغير الآخر.

∵ س − ص = ١ ∴ س = ١ + ص

٢ بالتعويض فى معادلة الدرجة الثانية نحصل على معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد.

بالتعويض عن س = ١ + ص فى المعادلة الثانية :

∴ (١ + ص)^{٢} + ص^{٢} = ١٣

∴ ١ + ٢ ص + ص^{٢} + ص^{٢} − ١٣ = ٠

∴ ٢ ص^{٢} + ٢ ص − ١٢ = ٠

∴ ص^{٢} + ص − ٦ = ٠

تذكر أن

- (أ + ب)^{٢} = أ^{٢} + ٢ أ ب + ب^{٢}
- (أ − ب)^{٢} = أ^{٢} − ٢ أ ب + ب^{٢}

٣ بحل المعادلة التى حصلنا عليها عن طريق التحليل أو القانون العام نحصل على قيمة أحد المتغيرين.

∵ ص^{٢} + ص − ٦ = ٠ ∴ (ص − ٢) (ص + ٣) = ٠

∴ إما ص − ٢ = ٠ ومنها **ص = ٢** أ، ص + ٣ = ٠ ومنها **ص = −٣**

٤ بالتعويض فى معادلة الدرجة الأولى المعطاة نحصل على قيمة المتغير الآخر.

عندما ص = ٢ فإن : **س = ٣**

، عندما ص = −٣ فإن : **س = −٢**

∴ مجموعة الحل = {(٣ ، ٢) ، (−٢ ، −٣)}

لاحظ أن :
مجموعة الحل عناصرها أزواج مرتبة.

حاول بنفسك ١

أوجد فى ح × ح مجموعة حل المعادلتين الآتيتين : س + ص = ٧ ، س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥

مثال ٢

أوجد فى ح × ح مجموعة الحل للمعادلتين الآتيتين : ص − س = ٣ ، س^{٢} + س ص = ٥

الحل

لاحظ أنه :
فى هذه المسألة من الأسهل التعبير عن ص بدلالة س

من المعادلة الأولى : ∵ ص − س = ٣

∴ ص = ٣ + س (١)

وبالتعويض عن ص فى المعادلة الثانية ينتج أن :

س^{٢} + س (٣ + س) = ٥ ∴ س^{٢} + ٣ س + س^{٢} − ٥ = ٠

∴ ٢ س^{٢} + ٣ س − ٥ = ٠ ∴ (٢ س + ٥) (س − ١) = ٠

∴ إما ٢ س + ٥ = ٠ ومنها **س = $\frac{-٥}{٢}$** وبالتعويض فى (١) ∴ **ص = $\frac{١}{٢}$**

أ، س − ١ = ٠ ومنها **س = ١** وبالتعويض فى (١) ∴ **ص = ٤**

∴ مجموعة الحل = {($\frac{-٥}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$) ، (١ ، ٤)}

حاول بنفسك ٢

أوجد فى ح × ح مجموعة حل المعادلتين الآتيتين : س − ٢ ص = ٠ ، س^{٢} + س ص + ص^{٢} = ٢٨

مثال ٣

عددان حقيقيان مجموعهما ٧ والفرق بين مربعيهما ٧ أوجد العددين.

الحل

نفرض أن : العدد الأكبر س ، العدد الأصغر ص

∵ مجموعهما ٧ ∴ س + ص = ٧ (١)

، ∵ الفرق بين مربعيهما ٧ ∴ $س^٢ - ص^٢ = ٧$ (٢)

من المعادلة (١) : س = ٧ − ص (٣)

وبالتعويض فى المعادلة (٢) : ∴ $(٧ - ص)^٢ - ص^٢ = ٧$

∴ $٤٩ - ١٤ ص + ص^٢ - ص^٢ = ٧$ ∴ −١٤ ص = ٧ − ٤٩

∴ −١٤ ص = −٤٢ ∴ ص = $\frac{-٤٢}{-١٤}$ = ٣

وبالتعويض فى المعادلة (٣) : ∴ س = ٧ − ٣ = ٤ ∴ العددان هما : ٤ ، ٣

مثال ٤

عددان حقيقيان حاصل ضربهما ٢ ، وإذا أُضيف أكبرهما إلى ضعف أصغرهما كان الناتج ٤

أوجد العددين.

الحل

نفرض أن العدد الأصغر = س ، العدد الأكبر = ص

∴ س ص = ٢ (١) ، ص + ٢ س = ٤ (٢)

من المعادلة (٢) : ص = ٤ − ٢ س (٣)

بالتعويض فى المعادلة (١) : ∴ س (٤ − ٢ س) = ٢ ∴ $٤ س - ٢ س^٢ = ٢$

∴ $٢ س^٢ - ٤ س + ٢ = ٠$ ∴ $س^٢ - ٢ س + ١ = ٠$

∴ $(س - ١)^٢ = ٠$ ∴ س = ١

وبالتعويض فى المعادلة (٣) : ∴ ص = ٢ ∴ العددان هما : ١ ، ٢

حاول بنفسك ٣

عددان حقيقيان موجبان الفرق بينهما ٤ وحاصل ضربهما ١٢ أوجد العددين.

مثال ٥

مستطيل محيطه ٢٤ سم ومساحته ٢٠ سم^{٢} أوجد بعديه.

الحل



تذكر أن

- محيط المستطيل = (الطول + العرض) × ٢
- مساحة المستطيل = الطول × العرض
- محيط المربع = طول الضلع × ٤
- مساحة المربع = طول الضلع × نفسه

نفرض أن بعدى المستطيل س سم ، ص سم

، ∵ محيط المستطيل = ٢٤ سم

∴ ٢ (س + ص) = ٢٤

∴ س + ص = ١٢ (١)

، ∵ مساحة المستطيل = ٢٠ سم^{٢} ∴ س ص = ٢٠ (٢)

من المعادلة (١) : س = ١٢ − ص (٣)

وبالتعويض فى المعادلة (٢) : ∴ (١٢ − ص) ص = ٢٠

∴ ١٢ ص − ص^{٢} = ٢٠ ∴ ص^{٢} − ١٢ ص + ٢٠ = ٠

∴ (ص − ١٠) (ص − ٢) = ٠

∴ إما ص − ١٠ = ٠ ومنها ص = ١٠

أ ، ص − ٢ = ٠ ومنها ص = ٢

وبالتعويض عن ص فى المعادلة (٣) :

∴ عند ص = ١٠ فإن : س = ٢

، عند ص = ٢ فإن : س = ١٠

∴ بعدا المستطيل ١٠ سم ، ٢ سم

حاول بنفسك ٤

مثلث قائم الزاوية مجموع طولى ضلعى القائمة ١٧ سم ومساحته = ٣٠ سم^{٢} أوجد طول وتر المثلث.

تمارين 3



على حل معادلتين في متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية



اختبار تفاعلى

● تذكر ● فهم ○ تطبيق ● حل مشكلات | أسئلة كتاب الوزارة

١ أوجد فى ح × ح مجموعة الحل لكل زوج من المعادلات الآتية :

١) س = ٢ ص ، $س^{٢} + ص^{٢} = ٢٠$ (القليوبية ٢٥) «{(٤ ، ٢) ، (-٤ ، -٢)}»

٢) س - ٣ = ٠ ، $س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$ (القاهرة ١٩) «{(٣ ، ٤) ، (٣ ، -٤)}»

٣) س - ٢ ص = ٠ ، $س^{٢} - ص^{٢} = ٣$ (بورسعيد ١٧) «{(٢ ، ١) ، (-٢ ، -١)}»

٤) س - ص = ٠ ، $س^{٢} + س ص + ص^{٢} = ٢٧$ (أسوان ٢٣) «{(٣ ، ٣) ، (-٣ ، -٣)}»

٥) ص - ٢ س = ٠ ، س ص = ١٨ (الشرقية ١٤) «{(٣ ، ٦) ، (-٣ ، -٦)}»

٦) س + ص = ٠ ، $ص^{٢} = س$ (٦ أكتوبر ١١) «{(٠ ، ٠) ، (١ ، -١)}»

٧) س - ص = ٠ ، $س = \frac{٤}{ص}$ (الدقهلية ١٩ ، الإسماعيلية ١٨) «{(٢ ، ٢) ، (-٢ ، -٢)}»

---

٢ أوجد فى ح × ح مجموعة الحل لكل زوج من المعادلات الآتية :

١) ص = س - ١ ، $ص^{٢} + س = ٧$ (قنا ٠٩) «{(٣ ، ٢) ، (-٢ ، -٣)}»

٢) س = ٥ - ص ، $س^{٢} - ص^{٢} = ٥٥$ (مطروح ٠٨) «{(٨ ، -٣)}»

٣) س - ص = ١ ، $س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$ (الإسماعيلية ٢٥ ، المنوفية ٢٣) «{(-٣ ، -٤) ، (٤ ، ٣)}»

٤) س - ص - ٢ = ٠ ، $س^{٢} - ص^{٢} = ٠$ (القليوبية ٠٩) «{(١ ، -١)}»

٥) ٢ س + ص = ١٠ ، $س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$ (القليوبية ٠٥) «{(٣ ، ٤) ، (٥ ، ٠)}»

٦) ص - س = ٣ ، $س^{٢} - ٢ س + ٣ ص = ١٥$ (الإسكندرية ١١) «{(-٣ ، ٠) ، (٢ ، ٥)}»

٧) ص + ٢ س = ٧ ، $٢ س^{٢} + س + ٣ ص = ١٩$ «{($\frac{١}{٢}$ ، ٦) ، (٢ ، ٣)}»

---

٣ أوجد فى ح × ح مجموعة حل كل زوج من المعادلات الآتية :

١) س + ص = ٧ ، س ص = ١٢ (الجيزة ٢٣ ، أسوان ٢٤) «{(٣ ، ٤) ، (٤ ، ٣)}»

٢) س + ص = ٥ ، $\frac{س ص}{٦} = ١$ (المنوفية ٠٨) «{(٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢)}»

٣ ص – س = ٢ ، س^{٢} + س ص – ٤ = ٠ (كفر الشيخ ٢٤ ، الأقصر ٢٣) «{(–٢ ، ٠) ، (١ ، ٣)}»

٤ س – ٢ ص – ١ = ٠ ، س^{٢} – س ص = ٠ (كفر الشيخ ١٩) «{(٠ ، –$\frac{١}{٢}$) ، (–١ ، –١)}»

٥ س + ٢ ص = ٤ ، س^{٢} + س ص + ص^{٢} = ٧ «{(٢ ، ١) ، (–٢ ، ٣)}»

٦ ص – س = ٣ ، س^{٢} + ص^{٢} – س ص = ١٣ (القليوبية ١٧) «{(١ ، ٤) ، (–٤ ، –١)}»

٧ س – ص = ١٠ ، س^{٢} – ٤ س ص + ص^{٢} = ٥٢ «{(–٢ ، –١٢) ، (١٢ ، ٢)}»

---

٤ أوجد فى ح × ح مجموعة حل كل زوج من المعادلات الآتية :

١ س = ٠ ، س^{٢} + ص^{٢} + ٤ س + ٣ ص – ١٠ = ٠ «{(٠ ، ٢) ، (٠ ، –٥)}»

٢ س – ٢ ص = ٨ ، ص^{٢} = س (دمياط ٠٩) «{(٤ ، –٢) ، (١٦ ، ٤)}»

٣ س + ٢ ص = ٢ ، س^{٢} + ٢ س ص = ٢ (الشرقية ١٩) «{(١ ، $\frac{١}{٢}$)}»

٤ س + ص = ٢ ، س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س ص + ص = ٦ (الوادى الجديد ١٣) «{(٠ ، ٢)}»

٥ س + ص = ٢ ، $\frac{١}{س}$ + $\frac{١}{ص}$ = ٢ حيث س ≠ ٠ ، ص ≠ ٠ (المنيا ١٩) «{(١ ، ١)}»

---

٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ مجموعة الحل للمعادلتين : س ص = ٥ ، س + س ص = ٦ فى ح × ح هى ....

(أ) {(١ ، ٥)} (ب) {(٥ ، ٦)}

(جـ) {(٥ ، ٢)} (د) {(١ ، ٥) ، (٥ ، ١)}

٢ مجموعة الحل للمعادلتين : س – ص = ٠ ، س ص = ٩ فى ح × ح هى .... (دمياط ٢٥ ، قنا ١٨ ، الغربية ١١)

(أ) {(٠ ، ٠)} (ب) {(–٣ ، ٣)}

(جـ) {(٣ ، ٣)} (د) {(–٣ ، –٣) ، (٣ ، ٣)}

٣ مجموعة حل المعادلتين : س = ٣ ، س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥ فى ح × ح هى .... (الإسكندرية ٢٥)

(أ) {(٣ ، ٤)} (ب) {(٣ ، ٤) ، (٣ ، –٤)}

(جـ) {(٣ ، –٤)} (د) {(٤ ، –٣)}

٤ مجموعة حل المعادلتين : $س + ص = ٠$ ، $س^٢ + ص^٢ = ٢$ فى ح × ح

هى .... (أسيوط ١٣)

(أ) {(٠ ، ٠)} (ب) {(١ ، -١)}

(جـ) {(-١ ، ١)} (د) {(١ ، -١) ، (-١ ، ١)}

٥ الزوج المرتب الذى يحقق كلاً من المعادلتين : $س ص = ٢$ ، $س - ص = ١$

هو .... (الشرقية ١٢)

(أ) (١ ، ١) (ب) (٢ ، ١) (جـ) (١ ، ٢) (د) $(\frac{١}{٢} ، ١)$

٦ أحد حلول المعادلتين : $س - ص = ٢$ ، $س^٢ + ص^٢ = ٢٠$

هو .... (القليوبية ١٩ ، قنا ١٧ ، بورسعيد ١٤)

(أ) (-٤ ، ٢) (ب) (٢ ، -٤) (جـ) (٣ ، ١) (د) (٤ ، ٢)

٧ إذا كان : $ص = ١ - س$ ، $(س + ص)^٢ + ص = ٥$ فإن : ص = ... (الفيوم ١٢)

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) -٤ (د) ٤

٨ إذا كان : $س^٢ + س ص = ١٥$ ، $س + ص = ٥$ فإن : س = ... (القاهرة ٠٦)

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

تطبيقات على حل معادلتين فى متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية

١ عددان موجبان س ، ص الفرق بينهما ٢ ، وحاصل ضربهما ٢٤

أوجد العددين. (القاهرة ٢٥) «٦ ، ٤»

---

٢ عددان حقيقيان مجموعهما ٩ ، والفرق بين مربعيهما ٤٥

أوجد العددين. (الفيوم ١٩ ، كفر الشيخ ١٣) «٧ ، ٢»

---

٣ عددان موجبان أحدهما يزيد عن ثلاثة أمثال الآخر بمقدار ١ ، ومجموع مربعيهما ١٧

فما هما العددان ؟ (الشرقية ٠٤) «١ ، ٤»

---

٤ مستطيل محيطه ١٨ سم ومساحته ١٨ سم^٢. أوجد بعديه. (الوادى الجديد ١٦) «٦ سم ، ٣ سم»

٥ 📖 مستطيل يزيد طوله عن عرضه بمقدار ٣ سم ومساحته ٢٨ سم^{٢}

أوجد محيطه. (المنوفية ٢٥ ، الفيوم ١٢) «٢٢ سم»

---

٦ 📖 معين الفرق بين طولى قطريه ٤ سم ، ومحيطه يساوى ٤٠ سم

أوجد طول كل من قطريه. «١٦ سم ، ١٢ سم»

---

٧ قطعتا أرض كل منهما على شكل مربع ، الفرق بين محيطيهما ٨ أمتار والفرق بين مساحتيهما ٢٠ مترًا مربعًا ، أوجد طول ضلع كل منهما. «٦ أمتار ، ٤ أمتار»

---

٨ 📖 مثلث قائم الزاوية طول وتره ١٣ سم ، محيطه يساوى ٣٠ سم

أوجد طولى ضلعى القائمة. (المنوفية ١٥) «٥ سم ، ١٢ سم»

---

٩ مثلث قائم الزاوية طول أحد ضلعى القائمة ٥ سم ، محيطه يساوى ٣٠ سم

أوجد مساحة سطحه مبينًا خطوات الحل. (المنوفية ١٧) «٣٠ سم^{٢}»

---

١٠ مثلث قائم الزاوية فيه طول أحد ضلعى القائمة يقل عن طول الضلع الآخر بمقدار ٣ سم ، وطول وتره ١٥ سم. أوجد محيطه. «٣٦ سم»

---

١١ مستطيل طوله س سم ، وعرضه ص سم ومساحته ٧٧ سم^{٢} ، فإذا نقص طوله ٢ سم وزاد عرضه ٢ سم أصبح مربعًا. أوجد مساحة المربع. (ش. سيناء ٠٥) «٨١ سم^{٢}»

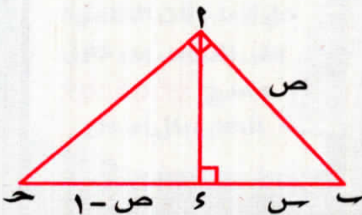
---

١٢ فى الشكل المقابل :

ق (∠ أ) = ٩٠° ، $\overline{أ ء} \perp \overline{ب حـ}$

، ب حـ = ٩ سم

أوجد : كلًا من س ، ص



«٤ ، ٦»

---

١٣ 📖 عدد مكون من رقمين رقم آحاده ضعف رقم عشراته ، فإذا كان حاصل ضرب الرقمين يساوى نصف العدد الأصلى ، فما هو العدد ؟ «٣٦»

١٤ عدد مكون من رقمين فإذا كان رقم عشراته يزيد عن رقم آحاده بمقدار ١ وحاصل ضرب العدد الأصلى فى العدد الناتج من عكس وضع رقميه يساوى ٢٥٢ أوجد العدد الأصلى. «٢١»

---

١٥ تتحرك نقطة على المستقيم : ٥ س − ٢ ص = ١ بحيث كان إحداثيها الصادى ضعف مربع إحداثيها السينى. أوجد إحداثيى هذه النقطة. «$(\frac{١}{٤} ، \frac{١}{٨})$ أ، (١ ، ٢)»

للمتفوقين

١ إذا كان : $س^٢ - ٢ س ص + ص^٢ = ٩$ ، $س^٢ + ص^٢ = ١٧$ حيث س > ص

أوجد قيمة : س ، ص «−١ ، −٤ أ، ٤ ، ١»

---

٢ أوجد فى ح × ح مجموعة الحل لكل زوج من المعادلات الآتية :

١ س = ص ، $س^٢ - ٢ ص - ٢ = ٠$ «$\{(١ + \sqrt{٣} ، ١ + \sqrt{٣}) ، (١ - \sqrt{٣} ، ١ - \sqrt{٣})\}$»

٢ س + ص = ٧ ، $\sqrt{س} + ص = ٥$ «{(٤ ، ٣)}»

---

٣ إذا كان (−٢ ، ٤) أحد حلول المعادلتين : أ س + ب ص = ٢ ، أ ب س ص + ٢ $س^٢$ = ٠

فى ح × ح حيث أ ، ب عددان صحيحان أوجد : (أ ، ب) «(١ ، ١)»

الوحدة الثانية

دوال الكسور الجبرية والعمليات عليها

الدرس الأول :

مجموعة أصفار الدالة كثيرة الحدود.

الدرس الثانى :

دالة الكسر الجبرى.

الدرس الثالث :

تساوى كسرين جبريين.

الدرس الرابع :

العمليات على الكسور الجبرية (جمع وطرح الكسور الجبرية).

الدرس الخامس :

تابع العمليات على الكسور الجبرية

(ضرب وقسمة الكسور الجبرية).

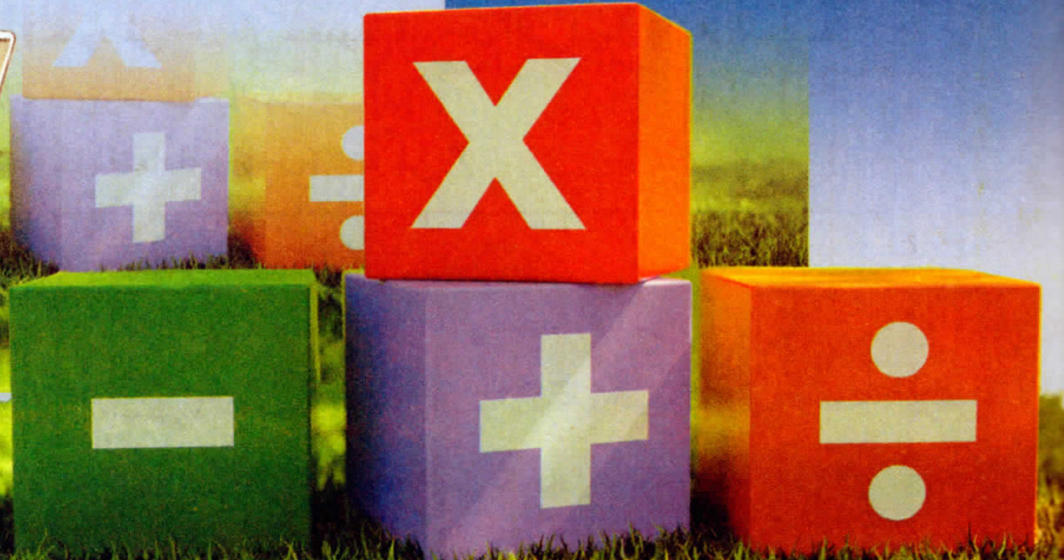
أهداف الوحدة: بعد دراسة هذه الوحدة يجب أن يكون التلميذ قادرًا على أن :

- يتعرف مفهوم صفر الدالة كثيرة الحدود.
- يوجد مجموعة أصفار الدالة كثيرة الحدود.
- يتعرف دالة الكسر الجبرى.
- يوجد مجال دالة الكسر الجبرى.
- يوجد المجال المشترك لكسرين جبرين أو أكثر.
- يختزل الكسر الجبرى إلى أبسط صورة.
- يثبت أن كسرين جبرين متساويان.
- يجرى عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة على الكسور الجبرية.
- يتعرف المعكوس الجمعى للكسر الجبرى.
- يتعرف المعكوس الضربى للكسر الجبرى.

يمكنك

حل الامتحانات التفاعلية على الدروس من خلال مسح QR code الخاص بكل امتحان





الدرس **1**

مجموعة أصفار الدالة كثيرة الحدود



صفر الدالة هو القيمة التى تجعل قيمة الدالة تساوى الصفر.

فمثلًا : إذا كانت الدالة د : ح ⟵ ح حيث : د (س) = س^{٣} − ٥ س^{٢} + ٦ س

فإنه :
- عند س = ٠ فإن : د (٠) = ٠^{٣} − ٥ × ٠^{٢} + ٦ × ٠ = ٠
- عند س = ٢ فإن : د (٢) = ٢^{٣} − ٥ × ٢^{٢} + ٦ × ٢ = ٨ − ٢٠ + ١٢ = ٠
- عند س = ٣ فإن : د (٣) = ٣^{٣} − ٥ × ٣^{٢} + ٦ × ٣ = ٢٧ − ٤٥ + ١٨ = ٠

أى أن : كل من الأعداد ٠ ، ٢ ، ٣ صفر للدالة د

وبصفة عامة :

إذا كانت د : ح ⟵ ح كثيرة حدود فى س فإن مجموعة قيم س التى تجعل د (س) = صفر تُسمى مجموعة أصفار الدالة د ويُرمز لها بالرمز ص (د)

أى أن : ص (د) = مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠ فى ح

لاحظ الفرق بين : د ، د (س) ، ص (د) :

- **د** ترمز للدالة.
- **د (س)** ترمز لقاعدة الدالة أ ، صورة س بواسطة الدالة د
- **ص (د)** ترمز لمجموعة أصفار الدالة د وهى مجموعة الحل للمعادلة د (س) = ٠ فى ح

والأمثلة التالية توضح كيفية الحصول على أصفار الدالة :

مثال ١

أوجد ص (د) لكل من دوال كثيرات الحدود المعرفة بالقواعد الآتية فى ح :

١ د (س) = ٢ س − ٦

٢ د (س) = $س^٢$ − ٣ س − ١٠

٣ د (س) = ٨

٤ د (س) = ٠

الحل

للحصول على أصفار الدالة د نضع د (س) = ٠ ونحل المعادلة الناتجة

١ بوضع ٢ س − ٦ = ٠ ∴ س = $\frac{٦}{٢}$

∴ س = ٣ ∴ ص (د) = {٣}

٢ بوضع $س^٢$ − ٣ س − ١٠ = ٠ ∴ (س − ٥) (س + ٢) = ٠

∴ س = ٥ أ، س = − ٢ ∴ ص (د) = {٥ ، − ٢}

٣ ∵ د (س) = ٨ ∴ صورة أى عدد بالدالة د تساوى ٨

∴ لا يوجد عدد س يجعل د (س) = ٠

∴ ص (د) = ∅

٤ ∵ د (س) = ٠ ∴ صورة أى عدد بالدالة د تساوى صفر

∴ جميع الأعداد الحقيقية تكون أصفارًا لهذه الدالة.

أى أن : ص (د) = ح

ملاحظة

من ٣ ، ٤ فى المثال السابق نستنتج أنه :

إذا كان : د (س) = أ حيث أ ∈ ح* فإن : ص (د) = ∅

وإذا كان : د (س) = ٠ فإن : ص (د) = ح

مثال ٢

أوجد فى ح مجموعة أصفار كل من دوال كثيرات الحدود المعرفة بالقواعد الآتية :

١ د (س) = $س^٢$ − ٨١

٢ ك (س) = $س^٢$ + ٤٩

٣ ر (س) = $س^٢$ − ١٠ س + ٢٥

٤ د (س) = $س^٣$ + ٧ $س^٢$ − ١٨ س

الحل

١ بوضع $س^٢$ − ٨١ = ٠ ∴ $س^٢$ = ٨١

∴ س = ± $\sqrt{٨١}$ ∴ س = ٩ أ، س = −٩

∴ ص (د) = {٩ ، −٩}

٢ بوضع $س^٢$ + ٤٩ = ٠ ∴ $س^٢$ = −٤٩

∴ س = ± $\sqrt{-٤٩}$

، ∵ $\sqrt{-٤٩}$ ∉ ح

∴ $س^٢$ + ٤٩ = ٠ ليس لها جذور حقيقية أى أن مجموعة حلها فى ح = ∅

∴ ص (ك) = ∅

٣ بوضع $س^٢$ − ١٠ س + ٢٥ = ٠ ∴ $(س - ٥)^٢$ = ٠

∴ س = ٥ ∴ ص (ر) = {٥}

٤ بوضع $س^٣$ + ٧ $س^٢$ − ١٨ س = ٠

∴ س ($س^٢$ + ٧ س − ١٨) = ٠ ∴ س (س − ٢) (س + ٩) = ٠

∴ س = ٠ أ، س = ٢ أ، س = −٩

∴ ص (د) = {٠ ، ٢ ، −٩}

مثال ٣

أوجد فى ح مجموعة أصفار كل من دوال كثيرات الحدود المعرفة بالقواعد الآتية :

١ ر (س) = $س^{٢}$ − ٢ س − ١ **٢** ت (س) = $س^{٢}$ − ٣ س + ٧

الحل

١ بوضع $س^{٢}$ − ٢ س − ١ = ٠ ولحل هذه المعادلة نستخدم القانون العام كما يلى :

∴ س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ حـ}}{٢ أ}$ ، أ = ١ ، ب = −٢ ، حـ = −١

∴ س = $\frac{٢ \pm \sqrt{٤ + ٤}}{٢}$ = $\frac{٢ \pm \sqrt{٨}}{٢}$ = $\frac{٢ \pm ٢\sqrt{٢}}{٢}$ = ١ ± $\sqrt{٢}$

∴ س = ١ + $\sqrt{٢}$ أ، س = ١ − $\sqrt{٢}$ ∴ ص (ر) = {١ + $\sqrt{٢}$ ، ١ − $\sqrt{٢}$}

٢ بوضع $س^{٢}$ − ٣ س + ٧ = ٠ ولحل هذه المعادلة نستخدم القانون العام كما يلى :

، ∵ أ = ١ ، ب = −٣ ، حـ = ٧

∴ س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ حـ}}{٢ أ}$ = $\frac{٣ \pm \sqrt{٩ - ٢٨}}{٢}$ = $\frac{٣ \pm \sqrt{-١٩}}{٢}$

، ∵ $\sqrt{-١٩}$ ∉ ح ∴ لا توجد جذور حقيقية للمعادلة : $س^{٢}$ − ٣ س + ٧ = ٠

∴ ص (ت) = ∅

حاول بنفسك

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = ٢ س هى .... (السويس ٢٢)

(أ) ح − {٠} (ب) {٢} (جـ) {٠} (د) ح − {٢}

٢ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = $س^{٢}$ + ٢٥ هى .... (الفيوم ٢٣)

(أ) {٥} (ب) {٥ ، −٥} (جـ) ح (د) ∅

٣ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = $س^{٢}$ − ١٦ هى .... (الإسكندرية ٢٢)

(أ) {−٤} (ب) {٤} (جـ) {٤ ، −٤} (د) ∅

٤ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = $س^{٢}$ − ٥ س + ٦ هى .... (المنوفية ٢٢)

(أ) {٢ ، ٣} (ب) {٥ ، ٦} (جـ) ح − {٥ ، ٦} (د) ح − {٢ ، ٣}



على مجموعة أصفار الدالة كثيرة الحدود



اختبار تفاعلى

● تذكر ● فهم ● تطبيق ● حل مشكلات | أسئلة كتاب الوزارة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = س − ٥ هى .... (القاهرة ٢٤ ، بورسعيد ٢٣)

(أ) ∅ (ب) {صفر} (جـ) {−٥} (د) {٥}

٢ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = −٣ س هى .... (السويس ١٨ ، الجيزة ١٧)

(أ) {٠} (ب) {−٣} (جـ) {−٣ ، ٠} (د) ح

٣ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = ٩ $س^٢$ هى ....

(أ) ∅ (ب) {٠} (جـ) $\{\frac{١}{٣}\}$ (د) {−٣}

٤ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = (س − ١) (س + ٢) هى ....

(أ) {−١ ، ٢} (ب) {١ ، −٢} (جـ) {−١ ، −٢} (د) {١ ، ٢}

٥ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = س (س − ١) هى .... (الغربية ٢٢)

(أ) {٠ ، ١} (ب) {٠ ، −١} (جـ) {−١ ، ١} (د) {١}

٦ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = ٩ هى .... (المنوفية ٢٥)

(أ) {٩} (ب) {٠} (جـ) ∅ (د) ح − {٩}

٧ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = صفر هى .... (البحيرة ٢٥ ، الأقصر ١٩ ، القاهرة ١٩ ، قنا ٠٩)

(أ) ح − {٠} (ب) ∅ (جـ) ح (د) {٠}

٨ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = $س^٢$ − ٤ هى .... (القليوبية ٢٥)

(أ) {٢} (ب) {−٢} (جـ) {٢ ، −٢} (د) {−٢ ، ٠}

٩ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = $س^٢$ + ٤ هى .... (الإسماعيلية ٢٥ ، القليوبية ٢٤ ، القليوبية ٢٢)

(أ) {٢} (ب) {−٢ ، ٢} (جـ) ح (د) ∅

١٠ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = س ($س^٢$ − ١) هى ....

(أ) {٠} (ب) {٠ ، −١} (جـ) {٠ ، ١ ، −١} (د) {٠ ، ١}

١١ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = (س – ١)^{٢} (س + ٢) هى .... (الإسكندرية ٢٤ ، البحيرة ٢٣)

(أ) {–١ ، ٢} (ب) {١ ، –٢}

(جـ) {–١ ، –٢} (د) {١ ، ٢}

١٢ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = ٤ – ٢ س هى ....

(أ) {–٢} (ب) {٢} (جـ) {٤ ، ٢} (د) {–٤ ، –٢}

١٣ إذا كانت : د (س) = س^{٢} + س + ١ فإن مجموعة أصفار الدالة د هى .... (الفيوم ٠٦)

(أ) {٠} (ب) {١} (جـ) ∅ (د) {٢}

١٤ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = س^{٦} – ٣٢ س هى .... (بنى سويف ١١)

(أ) {٠ ، ٢} (ب) {٢ ، ١٦} (جـ) {٦ ، ١٦} (د) {٠ ، ٥}

١٥ مجموعة أصفار الدالة د حيث د (س) = س (س^{٢} – ٢ س + ١)

هى .... (الإسكندرية ٢٣ ، الإسكندرية ١٣)

(أ) {٠ ، ١} (ب) {٠ ، –١} (جـ) {٠} (د) {١}

١٦ إذا كانت : ص (د) = {٢} ، د (س) = س^{٣} – م

فإن : م = ... (دمياط ٢٣ ، أسوان ٢٣ ، قنا ٢٣ ، الشرقية ١٤ ، الدقهلية ١٣)

(أ) $\sqrt[٣]{٢}$ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٨

١٧ إذا كانت : ص (د) = {١ ، –٢} ، د (س) = س^{٢} + س + أ فإن : أ = ...

(أ) ٢٨ (ب) ١ (جـ) –١ (د) –٢

١٨ إذا كانت : ص (د) = {٥} ، د (س) = س^{٣} – ٣ س^{٢} + أ

فإن : أ = ... (بورسعيد ١٤ ، أسيوط ١١)

(أ) –٥٠ (ب) –٥ (جـ) ٥ (د) ٥٠

١٩ إذا كانت : ص (د) = ∅ فإن : د (س) يمكن أن تكون .... (الشرقية ٢٥)

(أ) س^{٢} + ٤ (ب) س – ٤ (جـ) س^{٢} – ٤ (د) س + ٤

٢٠ إذا كانت مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = (ك − ٢) س + م + ٣ هى ح

حيث ك ، م أعداد حقيقية فإن : (ك + م) = ...

(أ) ٥ (ب) ١ (جـ) −١ (د) صفر

٢١ إذا كانت مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = $س^٢$ + ك س + ١ هى ∅

فإن ك يمكن أن تساوى .... (الشرقية ١٥)

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) −٢

٢٢ إذا كانت مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = $س^٢$ + ك س − ٢ هى ∅ فإن : ك ∋ ....

(أ) ح (ب)]−∞ ، ٢] (جـ) [٢ ، ∞[(د)]−∞ ، −٢]

---

٢ عيّن مجموعة أصفار كل من دوال كثيرات الحدود المعرفة بالقواعد الآتية فى ح :

١ د (س) = ٥ س + ١٠

٢ د (س) = $س^٢$ − ٢ س

٣ د (س) = ٢٥ − ٩ $س^٢$

٤ د (س) = ٥ $س^٣$ − ٢٠ س

٥ د (س) = $س^٣$ − ١٢٥

٦ د (س) = ٢ $س^٤$ + ٥٤ س

٧ د (س) = $س^٢$ − ٣ س − ٤

٨ د (س) = ٢ $س^٢$ − ٥ س − ١٢

٩ د (س) = ٢ $س^٤$ + $س^٣$ − ٦ $س^٢$

١٠ د (س) = س (س − ٥) − ١٤

١١ د (س) = (س − ٢) (س + ٣) + ٤ (المنوفية ١٥)

١٢ د (س) = $س^٢$ + ٢ س − ٦

١٣ د (س) = ٢ $س^٢$ − س + ٥

١٤ د (س) = $س^٣$ − ٣ $س^٢$ − ٤ س + ١٢

١٥ د (س) = $س^٣$ + $س^٢$ − ٢ س − ٨

---

٣ إذا كانت الدالة د : د (س) = $س^٣$ − ٢ $س^٢$ − ٧٥

فأثبت أن العدد ٥ أحد أصفار الدالة د (ج. سيناء ١٨ ، بنى سويف ١٥)

٤ إذا كانت : $\{-٢ ، ٢\}$ هى مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = س^{٢} + أ

أوجد : قيمة أ (مع توضيح خطوات الحل). (القاهرة ٢٣) «-٤»

---

٥ إذا كانت مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = أ س^{٢} + س + ب هى $\{٠ ، ١\}$

أوجد : قيمتى الثابتين أ ، ب (الإسكندرية ١٧) «-١ ، ٠»

---

٦ إذا كانت مجموعة أصفار الدالة د حيث د (س) = أ س^{٢} + ب س + ١٥ هى $\{٣ ، ٥\}$

أوجد : قيمة كل من أ ، ب (الفيوم ١٩) «١ ، -٨»

---

٧ إذا كانت : د (س) = س$^{ك+١}$ - ٢٥٦ ، ص (د) = $\{٢ ، -٢\}$

أوجد : قيمة ك «٧»

للمتفوقين

١ إذا كانت : ص (هـ) = $\{-٢ ، ٠\}$ حيث هـ (س) = أ س^{٢} + ب س + حـ ، هـ (٣) = ١٥

فأوجد : هـ (٢) «٨»

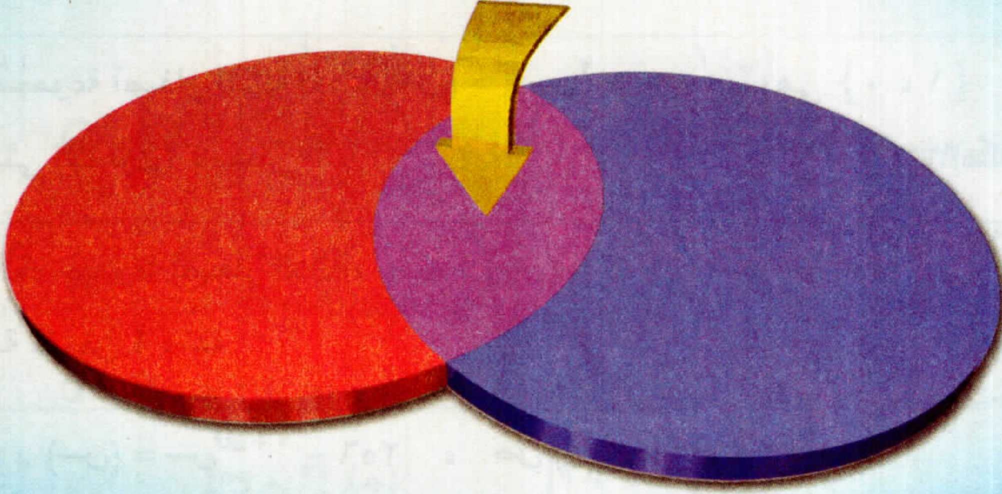
---

٢ إذا كان : د (س) = س^{٢} - ك ، ر (س) = ٢ س - م ، ص (د) - ص (ر) = $\{٣\}$

أوجد : قيمة ك ، م «٩ ، -٦»

الدرس **2**

دالة الكسر الجبرى



دالة الكسر الجبرى

دالة الكسر الجبرى هى دالة قاعدتها على صورة كسر جبرى كل من بسطه ومقامه عبارة عن قاعدة دالة كثيرة حدود.

أمثلة لدالة الكسر الجبرى :

- د : د (س) = $\frac{س - ٣}{س + ٢}$
- ن : ن (س) = $\frac{٣}{س - ٤}$
- ى : ى (س) = $\frac{٣ س - ١}{١٢ س}$
- ك : ك (س) = $\frac{٢ س + ٥}{(س - ١)(س + ٤)}$

مجال دالة الكسر الجبرى

مجال دالة الكسر الجبرى هو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا الأعداد التى تجعل الكسر غير معرف (أى ما عدا مجموعة أصفار المقام).

أى أن : مجال دالة الكسر الجبرى = ح − مجموعة أصفار المقام.

فمثلًا :
- مجال د : د (س) = $\frac{س - ٣}{س + ٢}$ هو ح − {−٢}
- مجال ن : ن (س) = $\frac{٣}{س - ٤}$ هو ح − {٤}



تذكر أن

القسمة على صفر ليس لها معنى.

• مجال ى : ى (س) = $\frac{٣ س - ١}{١٢ س}$ هو ح - {٠}

• مجال ك : ك (س) = $\frac{٢ س + ٥}{(س - ١)(س + ٤)}$ هو ح - {١ ، -٤}

تعريف

إذا كانت ى ، ك دالتين كثيرتى حدود فإن الدالة ن : ح - ص (ك) ⟵ ح

، ن (س) = $\frac{ى (س)}{ك (س)}$ حيث : ص (ك) هى مجموعة أصفار الدالة ك هى دالة كسر جبرى حقيقى واختصارًا تسمى «كسرًا جبريًا».

مثال ١

عيّن مجال كل من دوال الكسور الجبرية المعرفة بالقواعد الآتية ومن ثم أوجد :

ن (٠) ، ن (-١) ، ن (٢) :

١ ن (س) = $\frac{س + ٥}{س^٣ - ٨}$

٢ ن (س) = $\frac{٣ س + ٢}{س^٣ - ٤ س^٢ - ١٢ س}$

٣ ن (س) = $\frac{س^٢ + ١}{٣}$

٤ ن (س) = $\frac{س + ١}{س^٢ + ١}$

الحل

لتعيين مجال دالة الكسر الجبرى نساوى المقام بالصفر لمعرفة أصفار المقام.

١ بوضع $س^٣ - ٨ = ٠$ ∴ $س^٣ = ٨$

∴ $س = \sqrt[٣]{٨}$ ∴ س = ٢

∴ مجموعة أصفار المقام = {٢} ∴ مجال ن = ح - {٢}

، ∵ ن (س) = $\frac{س + ٥}{س^٣ - ٨}$ ∴ ن (٠) = $\frac{٠ + ٥}{٠ - ٨} = -\frac{٥}{٨}$

، ن (-١) = $\frac{-١ + ٥}{-١ - ٨} = -\frac{٤}{٩}$ ، ن (٢) ليس لها معنى لأن ٢ ∉ مجال ن

٢ بوضع $س^٣ - ٤ س^٢ - ١٢ س = ٠$ ∴ س ($س^٢$ - ٤ س - ١٢) = ٠

∴ س (س + ٢) (س - ٦) = ٠ ∴ س = ٠ أ، س = -٢ أ، س = ٦

∴ مجموعة أصفار المقام = {٠ ، -٢ ، ٦}   ∴ مجال ن = ح - {٠ ، -٢ ، ٦}

، ∵ $ن(س) = \frac{٣س + ٢}{س^{٣} - ٤س^{٢} - ١٢س}$

∴ ن(٠) ليس لها معنى لأن ٠ ∉ مجال ن ، $ن(-١) = \frac{-٣ + ٢}{-١ - ٤ + ١٢} = \frac{-١}{٧}$

، $ن(٢) = \frac{٦ + ٢}{٨ - ١٦ - ٢٤} = \frac{٨}{-٣٢} = -\frac{١}{٤}$

٣ ∵ مقام الدالة ن عبارة عن عدد ثابت

∴ لا توجد أصفار للمقام لأنه دائمًا يساوى ٣   ∴ مجال ن = ح

، ∵ $ن(س) = \frac{س^{٢} + ١}{٣}$ ∴ $ن(٠) = \frac{٠ + ١}{٣} = \frac{١}{٣}$

، $ن(-١) = \frac{١ + ١}{٣} = \frac{٢}{٣}$ ، $ن(٢) = \frac{٤ + ١}{٣} = \frac{٥}{٣}$

٤ بوضع $س^{٢} + ١ = ٠$ ∴ $س^{٢} = -١$ ليس لها حل فى ح

∴ لا توجد أصفار للمقام   ∴ مجال ن = ح

، ∵ $ن(س) = \frac{س + ١}{س^{٢} + ١}$ ∴ $ن(٠) = \frac{٠ + ١}{٠ + ١} = ١$

، $ن(-١) = \frac{-١ + ١}{١ + ١} = \frac{٠}{٢} = ٠$ ، $ن(٢) = \frac{٢ + ١}{٤ + ١} = \frac{٣}{٥}$

مثال ٢

إذا كانت الدالة ن : $ن(س) = \frac{س + ٢}{س^{٢} - أس + ٢٥}$ ، مجال ن = ح - {٥}

فأوجد : قيمة أ حيث أ ∈ ح

الحل

∵ مجال ن = ح - {٥}   ∴ عند س = ٥   فإن : $س^{٢} - أس + ٢٥ = ٠$

∴ $٢٥ - ٥أ + ٢٥ = ٠$ ∴ $٥أ = ٥٠$ ∴ $أ = ١٠$

! ملاحظة

مجموعة أصفار دالة الكسر الجبرى هى مجموعة القيم التى تجعل بسطها مساويًا للصفر ولا تجعل مقامها مساويًا للصفر.

أى أن : مجموعة أصفار دالة الكسر الجبرى = مجموعة أصفار البسط − مجموعة أصفار المقام.

فمثلًا : • إذا كانت الدالة ن : ن (س) = $\frac{س^{٢} + ٣ س}{س^{٢} - ٩}$ فإن : ن (س) = $\frac{س (س + ٣)}{(س - ٣) (س + ٣)}$

أى أن : ص (ن) = {٠ ، −٣} − {٣ ، −٣} = {٠}

• إذا كانت الدالة ن : ن (س) = $\frac{٣ س + ٦}{س^{٢} + س - ٢}$ فإن : ن (س) = $\frac{٣ (س + ٢)}{(س - ١) (س + ٢)}$

أى أن : ص (ن) = {−٢} − {١ ، −٢} = ∅

حاول بنفسك ١

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ مجال الدالة ن : ن (س) = $\frac{س + ٢}{س - ١}$ هو .... **(بورسعيد ٢٣)**

(أ) ح − {١}　(ب) ح − {−٢}　(جـ) ح − {١ ، −٢}　(د) ح

٢ مجال الكسر الجبرى $\frac{س - ٥}{٧}$ يساوى مجال الكسر الجبرى .... **(الإسماعيلية ٢٣)**

(أ) $\frac{س}{س - ٢}$　(ب) $\frac{س^{٢} + ٤}{٧ س}$　(جـ) $\frac{س}{س - ٥}$　(د) $\frac{٧}{س^{٢} + ٤}$

٣ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = $\frac{س^{٢} - ٣ س + ٢}{س - ٢}$ هى .... **(سوهاج ٢٣)**

(أ) {٢}　(ب) {١}　(جـ) ح − {٢}　(د) {١ ، ٢}

٤ إذا كان مجال الدالة ن : ن (س) = $\frac{س}{س - ك}$ هو ح − {٣} فإن : ك = ... **(قنا ٢٢)**

(أ) −٣　(ب) ٣　(جـ) ± ٣　(د) ٩

المجال المشترك لكسرين جبريين أو أكثر

المجال المشترك لكسرين جبريين

هو مجموعة الأعداد الحقيقية التى يكون فيها الكسران الجبريان معرفين معًا (فى آن واحد).

وبفرض أن لدينا كسرين جبريين $ن_١$ ، $ن_٢$ حيث :

$ن_١ (س) = \frac{٣}{س - ٢}$ ، $ن_٢ (س) = \frac{٥ س}{س^٢ - ١}$

فإن مجال $ن_١$ وليكن $م_١ = ح - \{٢\}$ «لأن : $ن_١$ غير معرف عند $س = ٢$»

، مجال $ن_٢$ وليكن $م_٢ = ح - \{١ ، -١\}$ «لأن : $ن_٢$ غير معرف عند $س = ١$ أ، $س = -١$»

وعلى هذا فإن :

المجال المشترك للكسرين $ن_١$ ، $ن_٢$ = $م_١ \cap م_٢ = (ح - \{٢\}) \cap (ح - \{١ ، -١\})$

$= ح - \{٢ ، ١ ، -١\} = ح$ – مجموعة أصفار المقامين

«لأن $ن_١$ ، $ن_٢$ غير معرفين معًا عند $س = ٢$ أ، $س = ١$ أ، $س = -١$»

ونلاحظ أنه :

لأى قيمة للمتغير $س$ تنتمى إلى هذا المجال المشترك يكون كل من الكسرين $ن_١$ ، $ن_٢$ معرفًا.

وعمومًا فإن :

إذا كان $ن_١$ ، $ن_٢$ كسرين جبريين وكان :

مجال $ن_١ = ح - س_١$ (حيث $س_١$ هى مجموعة أصفار مقام $ن_١$)

، مجال $ن_٢ = ح - س_٢$ (حيث $س_٢$ هى مجموعة أصفار مقام $ن_٢$)

فإن :

المجال المشترك للكسرين $ن_١$ ، $ن_٢$ = $ح - (س_١ \cup س_٢)$

= ح – مجموعة أصفار مقامى الكسرين.

ويمكن تعميم ذلك لأى عدد من الكسور الجبرية

أى أن : المجال المشترك لعدة كسور جبرية = ح – مجموعة أصفار مقامات هذه الكسور.

مثال ٣

أوجد المجال المشترك لكل من :

١ $ن_١(س) = \frac{س + ٣}{س^٢ - ٩}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ + ٥}{س^٢ - ٥ س + ٦}$

٢ $ن_١(س) = \frac{٢ س}{س + ١}$ ، $ن_٢(س) = \frac{٣}{س^٣ - ١}$ ، $ن_٣(س) = \frac{٢ س + ٣}{س^٢ - ٣ س + ٢}$

الحل

١ ∵ $ن_١(س) = \frac{س + ٣}{(س - ٣)(س + ٣)}$ ∴ مجال $ن_١ = ح - \{٣ ، -٣\}$

، ∵ $ن_٢(س) = \frac{س^٢ + ٥}{(س - ٢)(س - ٣)}$ ∴ مجال $ن_٢ = ح - \{٢ ، ٣\}$

∴ المجال المشترك للكسرين الجبريين $ن_١$ ، $ن_٢ = ح - \{٣ ، -٣ ، ٢\}$

٢ ∵ $ن_١(س) = \frac{٢ س}{س + ١}$ ∴ مجال $ن_١ = ح - \{-١\}$

، ∵ $ن_٢(س) = \frac{٣}{(س - ١)(س^٢ + س + ١)}$ ∴ مجال $ن_٢ = ح - \{١\}$

، ∵ $ن_٣(س) = \frac{٢ س + ٣}{(س - ٢)(س - ١)}$ ∴ مجال $ن_٣ = ح - \{٢ ، ١\}$

∴ المجال المشترك للكسور الجبرية $ن_١$ ، $ن_٢$ ، $ن_٣ = ح - \{-١ ، ١ ، ٢\}$

حاول بنفسك ٢

أوجد المجال المشترك لكل من :

١ $ن_١(س) = \frac{٣}{س - ٥}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س - ١}{س^٢ - ٦ س + ٥}$

٢ $ن_١(س) = \frac{٣}{٥ س}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢}{س^٢ - ٢ س}$ ، $ن_٣(س) = \frac{س - ٥}{س^٢ - ٤}$

تمارين 5 على دالة الكسر الجبرى



اختبار تفاعلى

● تذكر ● فهم ○ تطبيق ● حل مشكلات | 📖 أسئلة كتاب الوزارة

١ عين مجال كل من دوال الكسور الجبرية المعرفة بالقواعد الآتية :

١ $ن(س) = \frac{س + ١}{س - ٢}$

٢ 📖 $ن(س) = \frac{١}{س + ٢}$

٣ 📖 $ن(س) = \frac{س + ٣}{٤}$

٤ 📖 $ن(س) = \frac{س - ٢}{٢س}$

٥ 📖 $ن(س) = \frac{س^{٢} + ١}{س^{٢} - س}$

٦ 📖 $ن(س) = \frac{س^{٢} + ٩}{س^{٢} - ١٦}$

٧ 📖 $ن(س) = \frac{س^{٢} - ١}{س^{٢} + ١}$

٨ $ن(س) = \frac{س^{٢} + ٢٥}{س^{٣} + ٢٥س}$

٩ $ن(س) = \frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢} - س - ٦}$

١٠ $ن(س) = \frac{س^{٢} - ٤س + ٣}{٨س^{٣} + ٨}$

١١ $ن(س) = \frac{س^{٢} - ٥س + ٦}{س^{٤} - ٨١}$

١٢ $ن(س) = \frac{س^{٢} - ٣}{س^{٢} - ٣س + ٥}$

---

٢ أوجد المجال المشترك للكسور الجبرية الآتية :

١ 📖 $\frac{س}{٣}$ ، $\frac{٣}{س}$

٢ 📖 $\frac{س + ٢}{س + ٥}$ ، $\frac{س - ٤}{س - ٧}$

٣ $\frac{٣س}{س - ٢}$ ، $\frac{س + ٣}{س^{٢} - ٩}$ (ش. سيناء ٠٩)

٤ 📖 $\frac{س}{س^{٢} - ٤}$ ، $\frac{٣}{٢ - س}$

٥ $\frac{س^{٢} + ٣س}{س^{٣} - ٩س}$ ، $\frac{س^{٢} + ٣س + ٩}{س^{٣} - ٢٧}$ (البحيرة ٠٩)

٦ $\frac{س - ٤}{س^{٢} - ٥س + ٦}$ ، $\frac{٢س}{س^{٣} - ٩س}$ (أسيوط ٢٣ ، الأقصر ١٩)

٧ 📖 $\frac{س^{٢} + ٤}{س^{٢} - ٤}$ ، $\frac{٧}{س^{٢} + ٤س + ٤}$

٨ $\frac{س - ٢}{س + ٤}$ ، $\frac{٧}{س - ٣}$ ، $\frac{س}{س^٢ + ٤}$

٩ $\frac{س + ٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{س^٢ - ٩}$ ، $\frac{٧ س}{س^٢ - ٣ س}$

١٠ $\frac{س^٢ - ٤}{س^٢ - ٥ س + ٦}$ ، $\frac{٧}{س^٢ - ٩}$ ، $\frac{س^٢ - ٣ س - ٤}{س^٢ + س - ٢}$

---

٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ مجال الدالة ن : ن (س) = $\frac{س - ١}{س}$ هو .... (القليوبية ٢٢)

(أ) {٠} (ب) {١} (جـ) ح - {٠} (د) ح - {١}

٢ مجال الدالة د : د (س) = $س^٢$ - ١ هو .... (الوادى الجديد ٢٣)

(أ) {١} (ب) ح - {١} (جـ) ح - {-١ ، ١} (د) ح

٣ مجال الكسر الجبرى $\frac{س - ٥}{٣}$ يساوى مجال الكسر الجبرى .... (القليوبية ١٦)

(أ) $\frac{س}{س^٢ + ١}$ (ب) $\frac{س}{س - ٣}$ (جـ) $\frac{٣}{س - ٥}$ (د) $\frac{س - ٥}{س - ٣}$

٤ مجال الدالة د : د (س) = ٢ $س^{-٣}$ هو .... (الفيوم ٢٥)

(أ) {٢} (ب) {-٢} (جـ) ح - {-٣} (د) ح - {٠}

٥ إذا كانت : د (س) = $\frac{س}{س - ٢}$ فإن : د (٢) .... (قنا ٠٦)

(أ) = ٢ (ب) = ١ (جـ) = صفر (د) ليس لها وجود.

٦ إذا كان مجال الكسر الجبرى ن هو ح - {٢ ، ٣ ، ٤} فإن : ن (٣) .... (الشرقية ١٩)

(أ) = ٣ (ب) = ٢ (جـ) = ٤ (د) ليس لها وجود.

٧ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = $\frac{س - ٤}{س + ١}$ هى .... (القاهرة ٢٥)

(أ) {٤ ، -١} (ب) {-١} (جـ) {٤} (د) ٢

٨ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = $\frac{٢ - س}{٧}$ هى .... (المنوفية ٢٤ ، القاهرة ١٦)

(أ) {٧} (ب) {٢ ، ٧} (جـ) {٢} (د) ∅

٩ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = $\frac{س + ١}{س^{٢} - ١}$ هى .... (بنى سويف ٢٣)

(أ) {١ ، -١} (ب) {١} (جـ) {-١} (د) ∅

١٠ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = $\frac{س^{٢} - س - ٢}{س^{٢} + ٤}$ هى .... (الدقهلية ٢٤ ، الغربية ١٧)

(أ) {-٢ ، ٢} (ب) {-٢ ، -١} (جـ) {-١ ، ٢} (د) {-١ ، ١}

١١ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = $\frac{س^{٢} - ٩}{س - ٢}$ هى .... (البحر الأحمر ٢٣ ، مطروح ١٧)

(أ) {٢} (ب) ح - {٢} (جـ) {٣ ، -٣} (د) {٣ ، -٣ ، ٢}

١٢ إذا كان : $ن_{١}$ ، $ن_{٢}$ كسرين جبريين وكان مجال $ن_{١}$ = ح - $س_{١}$ (حيث $س_{١}$ مجموعة أصفار مقام $ن_{١}$) ، مجال $ن_{٢}$ = ح - $س_{٢}$ (حيث $س_{٢}$ مجموعة أصفار مقام $ن_{٢}$) فإن المجال المشترك للكسرين $ن_{١}$ ، $ن_{٢}$ هو ح - .... (بورسعيد ١٨)

(أ) $س_{١}$ - $س_{٢}$ (ب) $س_{١}$ ∩ $س_{٢}$ (جـ) $س_{١}$ ∪ $س_{٢}$ (د) ∅

١٣ المجال المشترك للكسرين $\frac{٢ س}{س - ٣}$ ، $\frac{س}{س + ٥}$ هو .... (بورسعيد ٢٣)

(أ) {٣ ، -٥} (ب) ح - {٠ ، ٣ ، -٥}

(جـ) ح - {٣ ، -٥} (د) ح

١٤ المجال المشترك للكسرين $\frac{٢}{س^{٢} - ١}$ ، $\frac{٥ س}{س^{٢} - س}$ هو .... (الفيوم ١٨)

(أ) ح - {١} (ب) ح - {٠ ، ١}

(جـ) ح - {٠ ، ١ ، -١} (د) ح - {١ ، -١}

١٥ إذا كان مجال الدالة د : د (س) = $\frac{٣}{س + ك}$ هو ح - {-٢} فإن : ك = ... (الدقهلية ٢٥)

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) -٣ (د) -٢

١٦ إذا كان مجال الدالة د : د (س) = $\frac{س - ٥}{س^٢ - ك}$ هو ح - {٥ ، -٥} فإن : ك = …………

(أ) ٥ (ب) -٥ (جـ) -٢٥ (د) ٢٥

١٧ إذا كان : $ن_١$ (س) = $\frac{-٧}{س + ٢}$ ، $ن_٢$ (س) = $\frac{س}{س - ك}$ وكان المجال المشترك للدالتين $ن_١$ ، $ن_٢$ هو ح - {-٢ ، ٧} فإن : ك = …………

(أ) ٧ (ب) -٧ (جـ) ٢ (د) -٢

١٨ إذا كان مجال ن حيث ن (س) = $\frac{س - ٢}{س^٢ + أ}$ هو ح فإن : أ ………… صفر (الدقهلية ١٦)

(أ) = (ب) < (جـ) ≥ (د) >

١٩ إذا كانت : س = ٣ أحد أصفار الدالة د : د (س) = $\frac{س^٢ - ٢ س - ك}{س^٢ - ٢٥}$

فإن : ك = ………… (كفر الشيخ ١٨)

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) -٣ (د) -٦

٢٠ إذا كان المجال المشترك للكسرين $\frac{س}{س - م}$ ، $\frac{س}{س - ك}$ هو ح - {٣ ، ٢}

فإن : م - ك = …………

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) ± ١ (د) صفر

---

٤ عين مجال الدالة ن : ن (س) = $\frac{٢ س + ١}{س^٢ - ٥ س + ٦}$

ثم أوجد : ن (٠) ، ن (٢) (الوادى الجديد ٠٨)

---

٥ إذا كان مجال الدالة ن : ن (س) = $\frac{س - ١}{س^٢ - أ س + ٩}$ هو ح - {٣}

فأوجد : قيمة أ (الإسماعيلية ١٩ ، سوهاج ١٨ ، بنى سويف ١٧) «٦»

---

٦ إذا كان : ن كسرًا جبريًا حيث ن (س) = $\frac{١١}{٤ س^٢ - ١٢ س + ٩}$ وكانت ن (أ) غير معرفة

فأوجد : قيمة أ «$\frac{٣}{٢}$»

٧ إذا كان مجال الدالة د حيث د (س) = $\frac{س}{س^٢ - ٥ س + م}$ هو ح - {٢ ، حـ}

فأوجد : قيمة كل من الثابتين م ، حـ (الشرقية ١٦) «٦ ، ٣»

---

٨ إذا كان مجال الدالة د حيث د (س) = $\frac{س + ب}{س + أ}$ هو ح - {-٢} وكان د (٠) = ٣

فأوجد : قيمة كل من أ ، ب (الفيوم ١٦) «٢ ، ٦»

---

٩ إذا كانت مجموعة أصفار الدالة د حيث د (س) = $\frac{أ س^٢ - ٦ س + ٨}{ب س - ٤}$ هى {٤}

، مجالها هو ح - {٢} أوجد : قيمة كل من أ ، ب (الشرقية ١٧) «١ ، ٢»

للمتفوقين

١ إذا كان مجال الدالة ن هو ح - {١ ، ٣} حيث ن (س) = $\frac{س + ١}{س^٢ + هـ س + و}$

فأوجد : قيمة كل من هـ ، و «-٤ ، ٣»

---

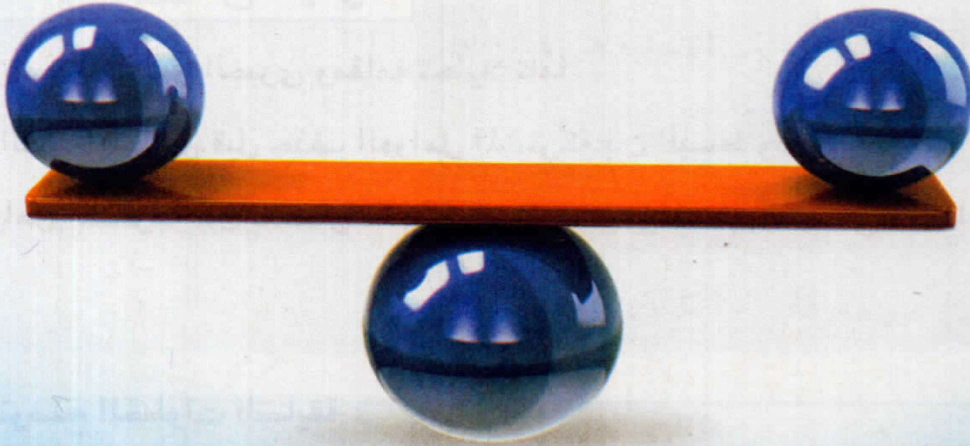
٢ إذا كان : $ن_١$ (س) = $\frac{س}{س^٢ + ٩}$ ، $ن_٢$ (س) = $\frac{٥}{س^٢ - ٦ س - أ}$

، المجال المشترك للكسرين $ن_١$ ، $ن_٢$ هو ح - {٣}

فأوجد : قيمة أ «-٩»

الدرس 3

تساوى كسرين جبريين



قبل دراسة تساوى كسرين جبريين ، يجب أن نتعلم كيفية اختزال الكسر الجبرى.

اختزال الكسر الجبرى

اختزال الكسر الجبرى هو وضع الكسر الجبرى فى أبسط صورة.

تعريف

يُقال إن الكسر الجبرى فى أبسط صورة له إذا لم توجد عوامل مشتركة بين بسطه ومقامه بخلاف الواحد الصحيح.

فمثلًا : • **كل من الكسور الجبرية الآتية فى أبسط صورة :**

$$\frac{س - ١}{س + ١} \quad ، \quad \frac{س^{٢}}{س^{٢} + ١} \quad ، \quad \frac{س^{٢} + ٢س - ١}{س^{٣} + ٥}$$

لأنه لا توجد عوامل مشتركة بين بسط ومقام كل منها.

• **كل من الكسور الجبرية الآتية <u>ليس</u> فى أبسط صورة :**

$$\frac{س}{س(س + ١)} \quad ، \quad \frac{س^{٢} + ١}{س(س^{٢} + ١)} \quad ، \quad \frac{س^{٢}(٢س - ١)}{س^{٣}}$$

لأنه يوجد عامل مشترك بين بسط ومقام كل منها.

كيفية اختزال الكسر الجبرى

لاختزال الكسر الجبرى اتبع ما يأتى :

١ حلل كلاً من بسط الكسر الجبرى ومقامه تحليلاً تامًا.

٢ عيِّن مجال الكسر الجبرى قبل حذف العوامل المشتركة بين البسط والمقام.

٣ احذف العوامل المشتركة بين بسط ومقام الكسر الجبرى وبذلك نحصل على أبسط صورة للكسر الجبرى.

والأمثلة التالية توضح الخطوات السابقة :

مثال ١

اختزل كلاً من الكسرين الجبريين الآتيين واذكر مجال كل منهما :

١ $ن_١(س) = \frac{٢س + ٤}{س^٢ - ٤}$

٢ $ن_٢(س) = \frac{س^٣ + ٢س^٢ - ٣٥س}{س^٣ - ٢٥س}$

الحل

١ ∵ $ن_١(س) = \frac{٢(س + ٢)}{(س - ٢)(س + ٢)}$ ∴ مجال $ن_١ = ح - \{٢ ، -٢\}$

وبحذف (س + ٢) من البسط والمقام ∴ $ن_١(س) = \frac{٢}{س - ٢}$

٢ ∵ $ن_٢(س) = \frac{س(س^٢ + ٢س - ٣٥)}{س(س^٢ - ٢٥)} = \frac{س(س + ٧)(س - ٥)}{س(س + ٥)(س - ٥)}$

∴ مجال $ن_٢ = ح - \{٠ ، -٥ ، ٥\}$

وبحذف س (س - ٥) من البسط والمقام ∴ $ن_٢(س) = \frac{س + ٧}{س + ٥}$

حاول بنفسك ١

اختصر الكسرين الجبريين الآتيين لأبسط صورة واذكر مجال كل منهما :

١ $ن_١(س) = \frac{س^٢ - ٩}{س^٢ + ٤س + ٣}$

٢ $ن_٢(س) = \frac{س^٣ - ٨}{س^٣ + ٢س^٢ + ٤س}$

تساوى كسرين جبريين

- إذا كان $ن_1$ ، $ن_2$ كسرين جبريين حيث : $ن_1(س) = ٣$ ، $ن_2(س) = \frac{٣س}{س}$

السؤال هو : هل $ن_2 = ن_1$ ؟ الإجابة هى : لا

لأن : $ن_1(س) = ٣$ لجميع قيم س الحقيقية

ولكن : $ن_2(س) = ٣$ إذا كانت : س $\neq$ صفر

، $ن_2(س)$ غير معرفة إذا كانت : س = صفر

أى أن :

$ن_2(س) = ن_1(س)$ إذا كانت : س $\neq$ صفر

، $ن_2(س) \neq ن_1(س)$ إذا كانت : س = صفر

نقول إن الدالتين $ن_1$ ، $ن_2$ متساويتان إذا تحقق الشرطان الآتيان معًا :

١ مجال $ن_1$ = مجال $ن_2$ ٢ $ن_1(س) = ن_2(س)$ لكل س $\in$ المجال المشترك

مثال ٢

في كل مما يأتى إذا كان $ن_1$ ، $ن_2$ كسرين جبريين فهل $ن_1 = ن_2$ ؟ ولماذا ؟

١ $ن_1(س) = \frac{س^٢ - ٥س}{س^٢ - ٧س + ١٠}$ ، $ن_2(س) = \frac{٣س - ١٥}{٣س^٢ - ٢١س + ٣٠}$

٢ $ن_1(س) = \frac{س^٢ + س - ٦}{س^٢ - ٣س + ٢}$ ، $ن_2(س) = \frac{س^٢ - ٢س - ١٥}{س^٢ - ٦س + ٥}$

٣ $ن_1(س) = \frac{س^٢ - س}{س^٣ - ٢س^٢}$ ، $ن_2(س) = \frac{س^٢ - ٣س + ٢}{س^٣ - ٤س^٢ + ٤س}$

الحل

١ $\because ن_1(س) = \frac{س(س - ٥)}{(س - ٢)(س - ٥)}$

$\therefore$ مجال $ن_1 = ح - \{٢ ، ٥\}$ ، $ن_1(س) = \frac{س}{س - ٢}$ (١)

$\because$ ، $ن_٢(س) = \frac{٣(س - ٥)}{٣(س^٢ - ٧س + ١٠)} = \frac{٣(س - ٥)}{٣(س - ٢)(س - ٥)}$

$\therefore$ مجال $ن_٢ = ح - \{٢ ، ٥\}$ ، $ن_٢(س) = \frac{١}{س - ٢}$ (٢)

من (١) ، (٢) : $\therefore$ $ن_١ \neq ن_٢$

فعلى الرغم من أن : مجال $ن_١$ = مجال $ن_٢$ إلا أن : $ن_١(س) \neq ن_٢(س)$

٢ $\because$ $ن_١(س) = \frac{(س + ٣)(س - ٢)}{(س - ١)(س - ٢)}$

$\therefore$ مجال $ن_١ = ح - \{١ ، ٢\}$ ، $ن_١(س) = \frac{س + ٣}{س - ١}$ (١)

$\because$ ، $ن_٢(س) = \frac{(س - ٥)(س + ٣)}{(س - ٥)(س - ١)}$

$\therefore$ مجال $ن_٢ = ح - \{١ ، ٥\}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س + ٣}{س - ١}$ (٢)

من (١) ، (٢) : $\therefore$ $ن_١ \neq ن_٢$

فعلى الرغم من أن : $ن_١(س) = ن_٢(س)$ فى أبسط صورة إلا أن : مجال $ن_١ \neq$ مجال $ن_٢$

٣ $\because$ $ن_١(س) = \frac{س(س - ١)}{س^٢(س - ٢)}$

$\therefore$ مجال $ن_١ = ح - \{٠ ، ٢\}$ ، $ن_١(س) = \frac{س - ١}{س(س - ٢)}$ (١)

$\because$ ، $ن_٢(س) = \frac{(س - ١)(س - ٢)}{س(س^٢ - ٤س + ٤)} = \frac{(س - ١)(س - ٢)}{س(س - ٢)^٢}$

$\therefore$ مجال $ن_٢ = ح - \{٠ ، ٢\}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س - ١}{س(س - ٢)}$ (٢)

من (١) ، (٢) : $\therefore$ $ن_١ = ن_٢$ لأن : مجال $ن_١$ = مجال $ن_٢$ ، $ن_١(س) = ن_٢(س)$

ملاحظة

ليكن $ن_1$ ، $ن_2$ كسرين جبريين مجالهما $م_1$ ، $م_2$ فإذا أمكن اختزال $ن_1(س)$ ، $ن_2(س)$ إلى نفس الكسر فيقال إن : $ن_1$ ، $ن_2$ يأخذان نفس القيم فى المجال المشترك $م_1 \cap م_2$

مثال ٣

إذا كان : $ن_1(س) = \frac{س^2 + ٣س}{س^2 - ٣س}$ ، $ن_2(س) = \frac{س^2 + ١٠س + ٢١}{س^2 + ٤س - ٢١}$

فأثبت أن : $ن_1(س) = ن_2(س)$ لجميع قيم س التى تنتمى إلى المجال المشترك

وأوجد هذا المجال.

الحل

$\because ن_1(س) = \frac{س(س + ٣)}{س(س - ٣)} = \frac{س + ٣}{س - ٣}$ حيث مجال $ن_1 = ح - \{٠ ، ٣\}$

، $ن_2(س) = \frac{(س + ٧)(س + ٣)}{(س + ٧)(س - ٣)} = \frac{س + ٣}{س - ٣}$ حيث مجال $ن_2 = ح - \{-٧ ، ٣\}$

$\therefore ن_1(س) = ن_2(س)$ لجميع قيم س التى تنتمى للمجال المشترك للدالتين $ن_1$ ، $ن_2$

وهو : $ح - \{٠ ، ٣ ، -٧\}$

بمعنى آخر : $ح - \{٠ ، ٣ ، -٧\}$ هو المجال المشترك الذى تتساوى فيه الدالتان $ن_1$ ، $ن_2$

حاول بنفسك ٢

فى كل مما يأتى إذا كان $ن_1$ ، $ن_2$ كسرين جبريين ، فهل $ن_1 = ن_2$ ؟ ولماذا ؟

١) $ن_1(س) = \frac{٢س^2 + ٤}{س^3 + ٢س}$ ، $ن_2(س) = \frac{٤س^2 + ٨}{٢س^3 + ٤س}$

٢) $ن_1(س) = \frac{س^2 - ٢س}{س^2 + س - ٦}$ ، $ن_2(س) = \frac{س^2 - ٣س}{س^2 - ٩}$



على تساوى كسرين جبريين



اختبار تفاعلى

● تذكر ● فهم ○ تطبيق ● حل مشكلات | أسئلة كتاب الوزارة

١ اختصر كلاً من الكسور الجبرية الآتية لأبسط صورة مبينًا مجال كل منها :

١ $ن(س) = \frac{٢س + ٨}{س + ٤}$

٢ $ن(س) = \frac{س^{٢} - ٢س}{س^{٢} + ٣س}$

٣ $ن(س) = \frac{س^{٢} - ٤س}{س^{٢} - ١٦}$

٤ $ن(س) = \frac{س^{٢} - ٤}{س^{٣} - ٨}$

٥ $ن(س) = \frac{١٢س^{٢} - ٨س}{٦س^{٢} - ٤س}$

٦ $ن(س) = \frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢} - ٥س + ٦}$

٧ $ن(س) = \frac{س^{٢} - ٦س + ٩}{٢س^{٣} - ١٨س}$

٨ $ن(س) = \frac{س^{٢} + س - ٦}{س^{٢} - ٢س - ١٥}$

٩ $ن(س) = \frac{٢س^{٢} + ٧س + ٦}{٤س^{٢} + ٤س - ٣}$

١٠ $ن(س) = \frac{س^{٣} + ١}{س^{٣} - س^{٢} + س}$

١١ $ن(س) = \frac{٦ + س - س^{٢}}{س^{٢} - ٥س + ٦}$

١٢ $ن(س) = \frac{(س - ٢)^{٢} - ١}{س(س - ٣)}$

١٣ $ن(س) = \frac{س + \frac{١}{س}}{٤س + \frac{٤}{س}}$ (دمياط ١٧)

١٤ $ن(س) = \frac{س^{٣} + س^{٢} - ٢}{س - ١}$

٢ فى كل مما يأتى أثبت أن : $ن_{١}(س) = ن_{٢}(س)$ لجميع قيم س التى تنتمى إلى المجال المشترك وأوجد هذا المجال (بمعنى آخر أوجد المجال المشترك الذى تتساوى فيه الدالتان $ن_{١}$ ، $ن_{٢}$) :

١ $ن_{١}(س) = \frac{٤س^{٢} - ٩}{٦س - ٩}$ ، $ن_{٢}(س) = \frac{٢س^{٢} + ٣س}{٣س}$ (بورسعيد ١٥)

٢ $ن_{١}(س) = \frac{س^{٢} - ٣س + ٩}{س^{٣} + ٢٧}$ ، $ن_{٢}(س) = \frac{٢}{٢س + ٦}$ (الشرقية ٠٧)

٣ $ن_{١}(س) = \frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢} + س - ٦}$ ، $ن_{٢}(س) = \frac{س^{٣} - س^{٢} - ٦س}{س^{٣} - ٩س}$ (الغربية ٢٤)

٤ $ن_{١}(س) = \frac{س^{٢} + س - ١٢}{س^{٢} + ٥س + ٤}$ ، $ن_{٢}(س) = \frac{س^{٢} - ٢س - ٣}{س^{٢} + ٢س + ١}$ (الإسكندرية ١٩ ، دمياط ١٧)

٣ فى كل مما يأتى أثبت أن $ن_1 = ن_2$:

① $ن_1(س) = \frac{3س}{3س - 6}$ ، $ن_2(س) = \frac{2س}{2س - 4}$ (سوهاج ٠٦)

② $ن_1(س) = \frac{س}{س^2 - 1}$ ، $ن_2(س) = \frac{5س}{5س^2 - 5}$ (الأقصر ١٩)

③ $ن_1(س) = \frac{2س}{2س + 4}$ ، $ن_2(س) = \frac{س^2 + 2س}{س^2 + 4س + 4}$ (الفيوم ٢٣ ، البحيرة ١٩ ، المنيا ١٧)

④ $ن_1(س) = \frac{س^3 - 1}{س^3 + س^2 + س}$ ، $ن_2(س) = \frac{(س - 1)(س^2 + 1)}{س^3 + س}$ (الجيزة ٢٣)

⑤ $ن_1(س) = \frac{س^2 - س}{س^3 - 2س^2}$ ، $ن_2(س) = \frac{س^2 - 3س + 2}{س^3 - 4س^2 + 4س}$ (الشرقية ٢٤)

⑥ $ن_1(س) = \frac{س^2}{س^3 - س^2}$ ، $ن_2(س) = \frac{س^3 + س^2 + س}{س^4 - س}$ (البحيرة ٢٥ ، المنوفية ٢٣)

⑦ $ن_1(س) = \frac{س^3 + س}{س^3 + س^2 + س + 1}$ ، $ن_2(س) = \frac{س}{س + 1}$

---

٤ فى كل مما يأتى بيِّن ما إذا كان $ن_1 = ن_2$ أم لا مع ذكر السبب :

① $ن_1(س) = \frac{س - 1}{س}$ ، $ن_2(س) = \frac{(س - 1)(س^2 + 1)}{س(س^2 + 1)}$

② $ن_1(س) = \frac{2س^3 + 6س}{(س - 1)(س^2 + 3)}$ ، $ن_2(س) = \frac{2س}{س - 1}$

③ $ن_1(س) = \frac{س + 5}{س^2 - 25}$ ، $ن_2(س) = \frac{3}{3س - 15}$ (أسيوط ١٨)

④ $ن_1(س) = \frac{س^2 - 9}{س^2 + 4س + 3}$ ، $ن_2(س) = \frac{س - 3}{س + 1}$ (الجيزة ١٦)

⑤ $ن_1(س) = \frac{س^2 - 4}{س^2 + س - 6}$ ، $ن_2(س) = \frac{س^2 - س - 6}{س^2 - 9}$ (الغربية ١٩ ، قنا ١٨)

⑥ $ن_1(س) = \frac{س^3 + 1}{س^3 - س^2 + س}$ ، $ن_2(س) = \frac{س^3 + س^2 + س + 1}{س^3 + س}$

⑦ $ن_1(س) = 1 - \frac{1}{س}$ ، $ن_2(س) = \frac{س - 1}{س}$ (الشرقية ١٩)

٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ أبسط صورة للدالة ن : ن (س) = $\frac{٤ س^٢ - ٢ س}{٢ س}$ ، س ≠ ٠

هى .... (ج.سيناء ١٨ ، قنا ١٧)

(أ) ٤ $س^٢$ (ب) ٤ س (جـ) ٢ س (د) ٢ س - ١

٢ أبسط صورة للكسر الجبرى $\frac{س^٢ - ٥ س + ٦}{س - ٣}$ هى .... (حيث س ≠ ٣) (بورسعيد ٢٣)

(أ) س - ٣ (ب) $\frac{س - ٢}{س - ٣}$ (جـ) س - ٢ (د) $\frac{١}{س - ٢}$

٣ أبسط صورة للدالة د : د (س) = $\frac{٣ - س}{س - ٣}$ حيث س ≠ ٣ هى .... (القاهرة ٢٥)

(أ) -٣ (ب) -١ (جـ) ١ (د) ٤

٤ الكسر الجبرى $\frac{١}{س}$ يساوى الكسر الجبرى .... (حيث س ≠ صفر) (القاهرة ٢٣)

(أ) $\frac{س}{س^٢}$ (ب) $\frac{١}{س^٢}$ (جـ) $\frac{س}{٢}$ (د) $\frac{س + ١}{س}$

٥ إذا كان : $ن_١$ (س) = $\frac{س + ١}{س - ٢}$ ، $ن_٢$ (س) = $\frac{س^٢ + س}{س^٢ - ٢ س}$

فإن المجال المشترك الذى تتساوى فيه الدالتان $ن_١$ ، $ن_٢$ هو ....

(أ) ح - {٠} (ب) ح - {٠ ، ٢}

(جـ) ح - {٠ ، -٢} (د) ح - {٠ ، -١ ، ٢}

٦ إذا كان : $ن_١$ (س) = $\frac{س}{س^٢ + س}$ ، $ن_٢$ (س) = $\frac{١}{س + ١}$

فإن : $ن_١$ = $ن_٢$ عندما س ∈ .... (الوادى الجديد ٠٩)

(أ) ح - {٠} (ب) ح - {٠ ، ١}

(جـ) ح - {-١} (د) ح - {٠ ، -١}

٧ إذا كان مجال $ن_١$: $ن_١$ (س) = $\frac{٥}{س - ٨}$ يساوى مجال $ن_٢$: $ن_٢$ (س) = $\frac{س - ٣}{س + ك}$

فإن : ك = ... (الدقهلية ٠٨)

(أ) ٨ (ب) -٨ (جـ) -٣ (د) ٢٤

٨ إذا كان : $ن_١ (س) = \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢}$ ، $ن_٢ (س) = س + ٢$

فإن : $ن_١ = ن_٢$ عندما يكون لهما نفس المجال وهو .... (الفيوم ٠٣)

(أ) ح   (ب) ح - {٢}   (جـ) ح - {-٢}   (د) ح - {١}

٩ إذا كانت : $ن_١ (س) = \frac{١}{س - ٣}$ ، $ن_٢ (س) = \frac{١}{٣ - س}$

فإن : $ن_١ \neq ن_٢$ لأن .... (سوهاج ٠٤)

(أ) $ن_١ (س) = ن_٢ (س)$ (ب) مجال $ن_١$ = مجال $ن_٢$

(جـ) $ن_١ (س) \neq ن_٢ (س)$ (د) مجال $ن_١ \neq$ مجال $ن_٢$

١٠ إذا كان : $ى (س) = \frac{س^٢ - ٢ س}{(س + ٢)(س - ٢)}$ ، $هـ (س) = \frac{س}{س + ٢}$

فإن : ى = هـ عندما .... (الشرقية ٠٣)

(أ) ى (س) = هـ (س) لكل س ∈ ح - {-٢}

(ب) ى (س) = هـ (س) فى أبسط صورة.

(جـ) ى (س) = هـ (س) لكل س ∈ ح - {٢ ، -٢}

(د) ى (س) = هـ (س) لكل س ∈ ح

---

٦ إذا كانت أبسط صورة للكسر الجبرى $ن (س) = \frac{س^٢ - ٤ س + ٤}{س^٢ - أ}$

هى $ن (س) = \frac{س - ٢}{س + ٢}$ فأوجد : قيمة أ «٤»

للمتفوقين

١ إذا كانت أبسط صورة للكسر الجبرى $د (س) = \frac{س^٢ - ك س + م}{س - ٣}$ هى $د (س) = س - ٢$

أوجد : قيمة كل من ك ، م «٥ ، ٦»

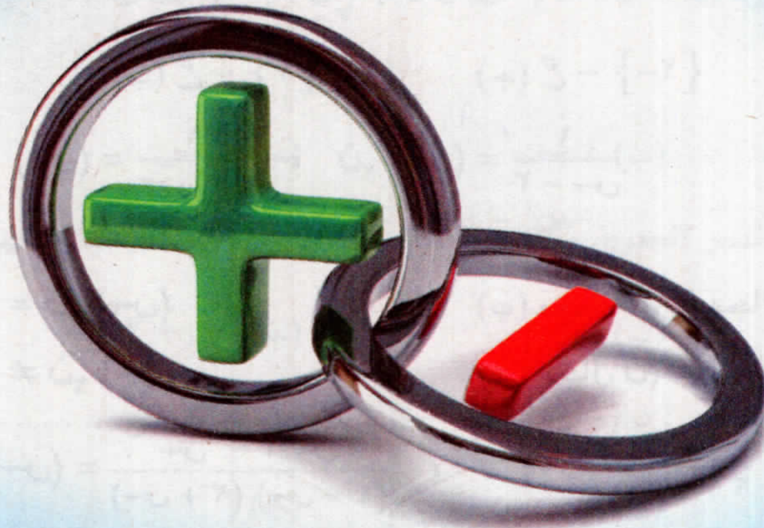
---

٢ إذا كان : $ن_١ (س) = \frac{س}{س + أ}$ ، $ن_٢ (س) = \frac{س^٣ + ب س}{س^٣ + أ س^٢ + س + ٥}$

وكان $ن_١ = ن_٢$ فأوجد : قيمة كل من أ ، ب «٥ ، ١»

الدرس 4

العمليات على الكسور الجبرية (جمع وطرح الكسور الجبرية)



جمع وطرح الكسور الجبرية

جمع وطرح الكسور الجبرية يماثل جمع وطرح الكسور العددية ، ولذلك فمن المفيد أن تتذكر كيفية جمع وطرح الكسور العددية.

١ جمع وطرح كسرين متحدى المقام :

- $\frac{أ}{ب} + \frac{حـ}{ب} = \frac{أ + حـ}{ب}$ (حيث ب ≠ ٠)
- $\frac{أ}{ب} - \frac{حـ}{ب} = \frac{أ - حـ}{ب}$ (حيث ب ≠ ٠)

فمثلًا :

- $\frac{٢}{٥} + \frac{١}{٥} = \frac{٢ + ١}{٥} = \frac{٣}{٥}$
- $\frac{-٢}{٧} - \frac{٤}{٧} = \frac{-٢ - ٤}{٧} = -\frac{٦}{٧}$

٢ جمع وطرح كسرين مختلفى المقام :

- $\frac{أ}{ب} + \frac{حـ}{ء} = \frac{أء + حـ ب}{ب ء}$ (حيث ب ء ≠ ٠)
- $\frac{أ}{ب} - \frac{حـ}{ء} = \frac{أء - حـ ب}{ب ء}$ (حيث ب ء ≠ ٠)

فمثلًا :

- $\frac{١}{٥} + \frac{٢}{٧} = \frac{١ \times ٧ + ٢ \times ٥}{٥ \times ٧} = \frac{٧ + ١٠}{٣٥} = \frac{١٧}{٣٥}$
- $\frac{١}{٤} - \frac{-٣}{٥} = \frac{١ \times ٥ - (-٣) \times ٤}{٤ \times ٥} = \frac{٥ - (-١٢)}{٢٠} = \frac{٥ + ١٢}{٢٠} = \frac{١٧}{٢٠}$

ويمكن بنفس الطريقة إجراء عمليتى جمع وطرح كسرين جبريين متحدى المقام ومختلفى المقام كالتالى :

١ جمع وطرح كسرين جبريين متحدى المقام :

إذا كانت س ∈ المجال المشترك للكسرين الجبريين $ن_١$ ، $ن_٢$ حيث :

$ن_١(س) = \frac{د(س)}{ك(س)}$ ، $ن_٢(س) = \frac{و(س)}{ك(س)}$ فإن :

- $ن_١(س) + ن_٢(س) = \frac{د(س)}{ك(س)} + \frac{و(س)}{ك(س)} = \frac{د(س) + و(س)}{ك(س)}$
- $ن_١(س) - ن_٢(س) = \frac{د(س)}{ك(س)} - \frac{و(س)}{ك(س)} = \frac{د(س) - و(س)}{ك(س)}$

فمثلًا : إذا كان : $ن_١(س) = \frac{س}{س - ٢}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س - ١}{س - ٢}$

فإن : • $ن_١(س) + ن_٢(س) = \frac{س}{س - ٢} + \frac{س - ١}{س - ٢} = \frac{س + س - ١}{س - ٢} = \frac{٢س - ١}{س - ٢}$

حيث مجال ناتج الجمع هو ح − {٢}

- $ن_١(س) - ن_٢(س) = \frac{س}{س - ٢} - \frac{س - ١}{س - ٢} = \frac{س - (س - ١)}{س - ٢}$

$= \frac{س - س + ١}{س - ٢} = \frac{١}{س - ٢}$

حيث مجال ناتج الطرح هو ح − {٢}

٢ جمع وطرح كسرين جبريين مختلفى المقام :

فإن : إذا كانت س ∈ المجال المشترك للكسرين الجبريين $ن_١$ ، $ن_٢$ حيث :

$ن_١(س) = \frac{د(س)}{ر(س)}$ ، $ن_٢(س) = \frac{و(س)}{ك(س)}$ فإن :

- $ن_١(س) + ن_٢(س) = \frac{د(س)}{ر(س)} + \frac{و(س)}{ك(س)} = \frac{د(س) \times ك(س) + و(س) \times ر(س)}{ر(س) \times ك(س)}$
- $ن_١(س) - ن_٢(س) = \frac{د(س)}{ر(س)} - \frac{و(س)}{ك(س)} = \frac{د(س) \times ك(س) - و(س) \times ر(س)}{ر(س) \times ك(س)}$

فمثلًا : إذا كان : $\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{\text{٥}}{\text{س} - \text{٣}}$ ، $\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{\text{٣}}{\text{س} + \text{٢}}$ فإن :

• $\text{ن}_1(\text{س}) + \text{ن}_2(\text{س}) = \frac{\text{٥}}{\text{س} - \text{٣}} + \frac{\text{٣}}{\text{س} + \text{٢}} = \frac{\text{٥}(\text{س} + \text{٢}) + \text{٣}(\text{س} - \text{٣})}{(\text{س} - \text{٣})(\text{س} + \text{٢})}$

$= \frac{\text{٥س} + \text{١٠} + \text{٣س} - \text{٩}}{(\text{س} - \text{٣})(\text{س} + \text{٢})} = \frac{\text{٨س} + \text{١}}{(\text{س} - \text{٣})(\text{س} + \text{٢})}$

حيث مجال ناتج الجمع هو ح − {٣ ، −٢}

وهو المجال المشترك للكسرين الجبريين ن_1 ، ن_2

• $\text{ن}_1(\text{س}) - \text{ن}_2(\text{س}) = \frac{\text{٥}}{\text{س} - \text{٣}} - \frac{\text{٣}}{\text{س} + \text{٢}} = \frac{\text{٥}(\text{س} + \text{٢}) - \text{٣}(\text{س} - \text{٣})}{(\text{س} - \text{٣})(\text{س} + \text{٢})}$

$= \frac{\text{٥س} + \text{١٠} - \text{٣س} + \text{٩}}{(\text{س} - \text{٣})(\text{س} + \text{٢})} = \frac{\text{٢س} + \text{١٩}}{(\text{س} - \text{٣})(\text{س} + \text{٢})}$

حيث مجال ناتج الطرح هو ح − {٣ ، −٢}

وهو المجال المشترك للكسرين الجبريين ن_1 ، ن_2

وفيما يلى خطوات جمع أو طرح كسرين جبريين :

١. ترتيب حدود كل من بسط ومقام كل كسر على حدة تنازليًا أو تصاعديًا حسب قوى أى رمز فيه.
٢. تحليل بسط ومقام كل كسر إن أمكن ذلك.
٣. إيجاد المجال المشترك ليكون هو مجال الناتج.
٤. اختزال كل كسر على حدة لتسهيل إجراء عمليتى الجمع أو الطرح.
٥. توحيد المقامات.
٦. إجراء عملية الجمع أو الطرح لحدود البسوط.
٧. وضع الناتج النهائى فى أبسط صورة ممكنة.

مثال ١

في كل مما يأتى أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن حيث :

١ $ن(س) = \frac{س^٢ + ٣س}{س^٢ + ٤س + ٣} + \frac{س - ٥}{س^٢ - ٤س - ٥}$

٢ $ن(س) = \frac{س - ١}{س^٢ - س} - \frac{س - ٣}{س^٢ + ٦ - ٥س}$

الحل

١ ∵ $ن(س) = \frac{س^٢ + ٣س}{س^٢ + ٤س + ٣} + \frac{س - ٥}{س^٢ - ٤س - ٥}$

∴ $ن(س) = \frac{س(س + ٣)}{(س + ٣)(س + ١)} + \frac{س - ٥}{(س - ٥)(س + ١)}$ «التحليل»

∴ مجال ن = ح − {−٣ ، −١ ، ٥} «إيجاد المجال المشترك»

، $ن(س) = \frac{س}{س + ١} + \frac{١}{س + ١}$ «اختزال كل كسر على حدة»

$= \frac{س + ١}{س + ١} = ١$ «إجراء عملية الجمع ووضع الناتج فى أبسط صورة»

٢ ∵ $ن(س) = \frac{س - ١}{س^٢ - س} - \frac{س - ٣}{س^٢ + ٦ - ٥س}$

∴ $ن(س) = \frac{س - ١}{س^٢ - س} - \frac{س - ٣}{س^٢ - ٥س + ٦}$ «الترتيب»

∴ $ن(س) = \frac{س - ١}{س(س - ١)} - \frac{س - ٣}{(س - ٢)(س - ٣)}$ «التحليل»

∴ مجال ن = ح − {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣} «إيجاد المجال المشترك»

، $ن(س) = \frac{١}{س} - \frac{١}{س - ٢}$ «اختزال كل كسر على حدة»

$= \frac{س - ٢ - س}{س(س - ٢)}$ «توحيد المقامات»

$= \frac{-٢}{س(س - ٢)}$ «إجراء عملية الطرح»

مثال ٢

فى كل مما يأتى أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن حيث :

١ $\text{ن}(\text{س}) = \dfrac{10\,\text{س} - 10}{2\,\text{س}^2 - 2\,\text{س} - 12} + \dfrac{\text{س}^2 - 2\,\text{س} - 15}{\text{س}^2 - 9}$

٢ $\text{ن}(\text{س}) = \dfrac{\text{س} + 1}{\text{س}^2 - 2\,\text{س} - 3} - \dfrac{4\,\text{س} - 7}{2\,\text{س}^2 - 7\,\text{س} + 3}$

الحل

١ $\because \text{ن}(\text{س}) = \dfrac{10(\text{س} - 1)}{2(\text{س}^2 - \text{س} - 6)} + \dfrac{\text{س}^2 - 2\,\text{س} - 15}{\text{س}^2 - 9}$

$= \dfrac{10(\text{س} - 1)}{2(\text{س} - 3)(\text{س} + 2)} + \dfrac{(\text{س} - 5)(\text{س} + 3)}{(\text{س} - 3)(\text{س} + 3)}$

$\therefore$ مجال ن $= \text{ح} - \{3 ، -3 ، -2\}$ ، $\text{ن}(\text{س}) = \dfrac{5(\text{س} - 1)}{(\text{س} - 3)(\text{س} + 2)} + \dfrac{\text{س} - 5}{\text{س} - 3}$

، $\because$ م . م . أ للمقامين $= (\text{س} - 3)(\text{س} + 2)$

$\therefore \text{ن}(\text{س}) = \dfrac{5(\text{س} - 1) + (\text{س} - 5)(\text{س} + 2)}{(\text{س} - 3)(\text{س} + 2)} = \dfrac{5\,\text{س} - 5 + \text{س}^2 - 3\,\text{س} - 10}{(\text{س} - 3)(\text{س} + 2)}$

$= \dfrac{\text{س}^2 + 2\,\text{س} - 15}{(\text{س} - 3)(\text{س} + 2)} = \dfrac{(\text{س} + 5)(\text{س} - 3)}{(\text{س} - 3)(\text{س} + 2)} = \dfrac{\text{س} + 5}{\text{س} + 2}$

٢ $\because \text{ن}(\text{س}) = \dfrac{\text{س} + 1}{(\text{س} - 3)(\text{س} + 1)} - \dfrac{4\,\text{س} - 7}{(2\,\text{س} - 1)(\text{س} - 3)}$

$\therefore$ مجال ن $= \text{ح} - \{3 ، -1 ، \frac{1}{2}\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \dfrac{1}{\text{س} - 3} - \dfrac{4\,\text{س} - 7}{(2\,\text{س} - 1)(\text{س} - 3)}$

، $\because$ م . م . أ للمقامين $= (\text{س} - 3)(2\,\text{س} - 1)$

$\therefore \text{ن}(\text{س}) = \dfrac{(2\,\text{س} - 1) - (4\,\text{س} - 7)}{(\text{س} - 3)(2\,\text{س} - 1)} = \dfrac{2\,\text{س} - 1 - 4\,\text{س} + 7}{(\text{س} - 3)(2\,\text{س} - 1)}$

$= \dfrac{-2\,\text{س} + 6}{(\text{س} - 3)(2\,\text{س} - 1)} = \dfrac{-2(\text{س} - 3)}{(\text{س} - 3)(2\,\text{س} - 1)} = \dfrac{-2}{2\,\text{س} - 1}$

خواص عمليتى جمع وطرح الكسور الجبرية

١ الإبدال.

٢ الدمج (أو التجميع).

٣ الصفر هو المحايد الجمعى لأى كسر جبرى.

٤ توفر المعكوسات الجمعية : فالمعكوس الجمعى للكسر الجبرى $\frac{و(س)}{ك(س)}$

هو $-\frac{و(س)}{ك(س)}$ أو $\frac{-و(س)}{ك(س)}$ أو $\frac{و(س)}{-ك(س)}$

ويكون مجال الكسر الجبرى يساوى مجال معكوسه الجمعى.

*** لاحظ أن : عملية طرح الكسور الجبرية لا يتحقق فيها أى من الخواص السابقة.**

مثال ٣

إذا كان ن كسرًا جبريًا حيث : $ن(س) = \frac{س^٢ + ٢س}{س^٢ - ٤}$

فأوجد فى أبسط صورة المعكوس الجمعى للكسر ن موضحًا مجاله.

الحل

$\because ن(س) = \frac{س^٢ + ٢س}{س^٢ - ٤}$ $\therefore ن(س) = \frac{س(س + ٢)}{(س - ٢)(س + ٢)}$

$\therefore$ مجال ن = ح - {٢ ، -٢} ، $ن(س) = \frac{س}{س - ٢}$

$\therefore$ المعكوس الجمعى للكسر ن هو : $-\frac{س}{س - ٢}$ أو $\frac{-س}{س - ٢}$ أو $\frac{س}{٢ - س}$

، مجاله = مجال ن = ح - {٢ ، -٢}

مثال ٤

أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن إذا كان :

$ن(س) = \frac{٢س + ٤}{س^٢ - ٤} + \frac{س}{٢س - س^٢}$ ثم أوجد : ن (١) ، ن (-٢)

الحل

$\because$ ن (س) = $\frac{٢ (س + ٢)}{(س - ٢) (س + ٢)} + \frac{س}{- س (س - ٢)}$

$= \frac{٢ (س + ٢)}{(س - ٢) (س + ٢)} - \frac{س}{س (س - ٢)}$ «لاحظ تغيير الإشارة»

$\therefore$ مجال ن = ح - {٢ ، -٢ ، ٠} ، ن (س) = $\frac{٢}{س - ٢} - \frac{١}{س - ٢} = \frac{١}{س - ٢}$

$\therefore$ ن (١) = $\frac{١}{١ - ٢}$ = -١ ، ن (-٢) غير معرفة لأن -٢ ∌ مجال ن

حاول بنفسك

في كل مما يأتي أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينًا مجال ن :

١ ن (س) = $\frac{س - ٣}{س^٢ - ٢ س - ٣} + \frac{س^٢ - س}{س^٢ - ١}$

٢ ن (س) = $\frac{س + ٤}{س^٢ + س - ١٢} - \frac{١}{س^٢ - ٥ س + ٦}$

٣ ن (س) = $\frac{٣ س - ١٥}{س^٢ - ٨ س + ١٥} - \frac{س^٢ - ٣ س - ١٨}{٩ - س^٢}$

تمارين 7



على جمع وطرح الكسور الجبرية



اختبـــار تفاعلى

● تذكر ● فهم ● تطبيق ● حل مشكلات | أسئلة كتاب الوزارة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان : ن (س) = $\frac{٣}{س} + \frac{س}{٣}$ فإن مجال ن هو .... (الشرقية ١٨)

(أ) ح − {٣ ، ٠}   (ب) ح − {٠}   (جـ) ح − {٣}   (د) ح

٢ مجال ن : ن (س) = $\frac{٣س + ٤}{س^٢ + ٢٥} + \frac{س - ٢}{س^٢ + ٧}$ هو ....

(أ) ح   (ب) ح − {٥}

(جـ) ح − {−٥ ، ٥}   (د) ح − {−٥ ، ٥ ، −٧}

٣ أبسط صورة للمقدار $\frac{س^٢ + ١}{س^٢ + ٤} + \frac{٣}{س^٢ + ٤}$ هى .... (الفيوم ١٥)

(أ) ٣   (ب) ٤   (جـ) ١   (د) $\frac{١}{س^٢ + ٤}$

٤ أبسط صورة للدالة د : د (س) = $\frac{س}{٢ - س} + \frac{٢}{س - ٢}$ هى .... (الشرقية ٢٥)

(أ) س − ٢   (ب) س   (جـ) ٢   (د) −١

٥ المعكوس الجمعى للكسر الجبرى $\frac{٢}{س - ١}$ حيث س ≠ ١ هو .... (القليوبية ٢٣)

(أ) $\frac{-٢}{س + ١}$ (ب) $\frac{س - ١}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{١ - س}$ (د) $\frac{-٢}{-س + ١}$

٦ المعكوس الجمعى للكسر : $\frac{س + ٧}{س - ٥}$ هو .... (الفيوم ١٢)

(أ) $\frac{٧ - س}{س + ٥}$ (ب) $\frac{س + ٧}{٥ - س}$ (جـ) $\frac{-(س + ٧)}{٥ - س}$ (د) $\frac{س - ٧}{٥ - س}$

٧ يكون للدالة د : د (س) = $\frac{س + ٣}{س - ٤}$ معكوس جمعى فى المجال .... (الجيزة ٢٥)

(أ) ح − {−٣}   (ب) ح − {٤}

(جـ) ح − {−٢ ، ٢}   (د) ح − {−٣ ، ٤}

٨ مجموعة أصفار الدالة ن : $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س} - 5} + \frac{4}{5 - \text{س}}$ هى .... (الغربية ٢٥)

(أ) $\{5\}$ (ب) $\{-5\}$ (جـ) $\{4\}$ (د) $\{-4\}$

---

٢ فى كل مما يأتى أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن :

١ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{2\text{س}}{\text{س} + 2} + \frac{4}{\text{س} + 2}$

٢ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{3\text{س}}{\text{س} - 3} - \frac{9}{\text{س} - 3}$

٣ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{2\text{س}^2}{2\text{س} + 5} + \frac{2\text{س}^2 - 25}{5 + 2\text{س}}$

٤ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^2}{\text{س}^2 - 1} - \frac{\text{س}}{\text{س}^2 - 1}$

---

٣ فى كل مما يأتى أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن :

١ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}^2 + 2\text{س}} + \frac{\text{س} + 1}{\text{س} + 2}$

٢ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س} - 4} - \frac{\text{س} + 4}{\text{س}^2 - 16}$ (البحيرة ٢٣ ، القليوبية ١٨ ، ش. سيناء ١٧ ، أسوان ١٦)

٣ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^2 + \text{س} - 6}{\text{س} + 3} + \frac{\text{س}^2 - 4}{\text{س} + 2}$ (القليوبية ١٦)

٤ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^2 + 3\text{س}}{\text{س}^2 + 2\text{س} - 3} - \frac{\text{س} - 2}{\text{س}^2 - 3\text{س} + 2}$ (السويس ١٨ ، الدقهلية ١٧)

٥ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^2 - 2\text{س} + 4}{\text{س}^3 + 8} + \frac{\text{س}^2 - 1}{\text{س}^2 + \text{س} - 2}$ (دمياط ١٩ ، أسيوط ٠٨)

٦ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{2\text{س} + 6}{\text{س}^2 + \text{س} - 6} - \frac{\text{س}^2 - 6\text{س}}{\text{س}^2 - 8\text{س} + 12}$ (المنوفية ١٣)

٧ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س} - 6}{2\text{س}^2 - 15\text{س} + 18} + \frac{\text{س} - 5}{15 - 13\text{س} + 2\text{س}^2}$ (الدقهلية ١١)

٨ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^2 + \text{س} - 2}{\text{س}^2 - 1} - \frac{\text{س} + 5}{\text{س}^2 + 6\text{س} + 5}$ (دمياط ١٤)

٩ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{3\text{س} + 15}{\text{س}^2 + 7\text{س} + 10} + \frac{2\text{س}^2 - 3\text{س} - 2}{\text{س}^2 - 4}$ (الدقهلية ١٥)

١٠ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{3\text{س} - 6}{\text{س}^2 - 4} - \frac{\text{س}^2 - 3\text{س}}{\text{س}^3 - \text{س}^2 - 6\text{س}}$ (قنا ١٢)

٤ فى كل مما يأتى أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن :

١ $ن(س) = \frac{س - ٢}{س} + \frac{س + ٣}{٢س}$

٢ $ن(س) = \frac{س}{س - ٢} - \frac{س}{س + ٢}$ (الغربية ١٩)

٣ $ن(س) = \frac{٢}{س + ٣} + \frac{س + ٣}{س^{٢} + ٣س}$ (القاهرة ٢٣ ، ش. سيناء ١٤)

٤ $ن(س) = \frac{س + ٣}{٢س} - \frac{س}{٢س - ١}$

٥ $ن(س) = \frac{س}{س^{٢} + ٢س} + \frac{س + ٢}{س^{٢} - ٤}$ (سوهاج ١٥ ، الشرقية ١٤)

٦ $ن(س) = \frac{٢س - ١}{س^{٢} - س - ٢} - \frac{١}{س - ٢}$ (دمياط ٠٦)

٧ $ن(س) = \frac{٣س - ٤}{س^{٢} - ٥س + ٦} + \frac{٢س + ٦}{س^{٢} + س - ٦}$ (قنا ١٧ ، البحيرة ١٤ ، القاهرة ١١)

٨ $ن(س) = \frac{س^{٢} + ٢س + ٤}{س^{٣} - ٨} + \frac{س^{٢} - س - ١٢}{س^{٢} - ٩}$ (٦ أكتوبر ٠٩)

٩ $ن(س) = \frac{٣س - ٢}{٣س^{٢} + س - ٢} - \frac{٣س - ٤}{٢س^{٢} - ٣س - ٥}$

١٠ $ن(س) = (س + ٣) - \frac{س^{٢}}{س - ٣}$

---

٥ فى كل مما يأتى أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن :

١ $ن(س) = \frac{س^{٢}}{س - ١} + \frac{س}{١ - س}$ (الجيزة ١٩ ، الأقصر ١٨)

٢ $ن(س) = \frac{٣س^{٢} + ٦س}{س^{٢} - ٤} + \frac{٦}{٢ - س}$ (القليوبية ٠٥)

٣ $ن(س) = \frac{س^{٢} + ٢س + ٤}{س^{٣} - ٨} - \frac{٩ - س^{٢}}{س^{٢} + س - ٦}$ (قنا ٢٣ ، المنوفية ١٨ ، الإسكندرية ١٧)

٤ $ن(س) = \frac{س^{٢} + س}{س^{٢} - ١} - \frac{٥ - س}{س^{٢} - ٦س + ٥}$ (الدقهلية ١٩ ، المنيا ١٨ ، الأقصر ١٧)

٥ $ن(س) = \frac{٢س^{٢} - ٨س}{٢س^{٢} - ١١س + ١٢} + \frac{٣(٢س + ٣)}{٩ - ٤س^{٢}}$ (الشرقية ٠٣)

٦ $ن(س) = \frac{س + ٣}{س^٢ - ٩} + \frac{٢س + ٢}{٣ + ٢س - س^٢}$ (كفر الشيخ ٠٢)

٧ $ن(س) = \frac{٢س - ٦}{س^٢ - ٩} - \frac{٨}{٣ - س^٢ - ٢س}$ (الفيوم ٢٥)

٨ $ن(س) = \frac{س - ٥}{٢س^٢ - ١٣س + ١٥} + \frac{س + ٣}{١٥س - ١٨ - ٢س^٢}$ (أسوان ٠٨)

٩ $ن(س) = \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ + س - ٢} + \frac{٥ - ١٠س}{٣س - ١ - ٢س^٢}$

١٠ $ن(س) = \frac{س - ٣}{س^٢ - ٧س + ١٢} - \frac{س - ٣}{س - ٣}$ (أسيوط ١٩ ، الأقصر ١٩)

---

٦ إذا كانت : $ن(س) = \frac{س^٢ - ٥س}{س^٢ - ٨س + ١٥} - \frac{س^٢ + ٣س + ٩}{س^٣ - ٢٧}$

فأوجد : ن (س) فى أبسط صورة ثم احسب : ن (١) ، ن (٥) إن أمكن. (الشرقية ٠٩)

---

٧ أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن حيث : $ن(س) = \frac{س + ٣}{س^٢ + ٦س + ٩} + \frac{س + ٢}{س + ٣}$

ثم أوجد : ن (−٣) ، ن (٢٠١٦) إن أمكن ذلك. (الشرقية ١٦)

---

٨ أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن حيث : $ن(س) = \frac{١٢}{١٢س^٢ - ٣} + \frac{٢}{٢س - ٤س^٢}$

ثم أوجد : ن (٠) ، ن (−١) إن أمكن ذلك.

---

٩ إذا كان $ن_١(س) = \frac{٣}{س - ١} - \frac{٢}{س - ١}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢}{س^٣ - س^٢}$ فأثبت أن : $ن_١(س) = ن_٢(س)$

لجميع قيم س التى تنتمى للمجال المشترك وأوجد هذا المجال. (بنى سويف ٢٥)

---

١٠ إذا كان : $ن(س) = \frac{س^٢ - ٢س}{س^٤ - ٣س^٣ + ٢س^٢} - \frac{٤ - س^٢}{س^٢ + س - ٢}$ أوجد :

١ ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن

٢ مجموعة حل المعادلة : ن (س) = ٠ (الوادى الجديد ١٣) « ∅ »

---

١١ أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا المجال حيث : $ن(س) = \frac{س^٢ + س + ١}{س^٤ - س} + \frac{س + ٣}{٣ - ٢س - س^٢}$

وإذا كان : ن (أ) = −٢ فأوجد قيمة : أ (المنوفية ١٧) « $\frac{١}{٢}$ »

١٢ إذا كان : $\frac{\text{ك} + ٥ - \text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س}}$ معكوسًا جمعيًا للكسر $\frac{\text{س}}{\text{س} - ٣}$ **أوجد : قيمة ك** (الدقهلية ٢٢) «−٥»

---

١٣ إذا كانت $\text{د}_{١}(\text{س}) = \frac{\text{س} - \text{أ}}{\text{س} + \text{ب}}$ ، ومجموعة أصفار $\text{د}_{١}$ هى $\{٥\}$ ، ومجال $\text{د}_{١}$ هو ح − $\{٣\}$

، **فأوجد قيمتى كل من : أ ، ب** ، وإذا كانت : $\text{د}_{٢}(\text{س}) = \frac{\text{س} - ١}{\text{س} - ٣}$

، **فأوجد :** $\text{د}_{١}(\text{س}) + \text{د}_{٢}(\text{س})$ فى أبسط صورة. (الدقهلية ١٧) «٥ ، −٣»

---

١٤ إذا كان مجال الدالة ن حيث $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{ب}}{\text{س}} + \frac{٩}{\text{س} + \text{أ}}$ هو ح − $\{٠ ، ٤\}$

، ن (٥) = ٢ **أوجد قيمة كل من : أ ، ب** (الغربية ٢٤ ، الجيزة ٢٣ ، كفر الشيخ ١٦ ، البحيرة ١٥) «−٤ ، −٣٥»

للمتفوقين

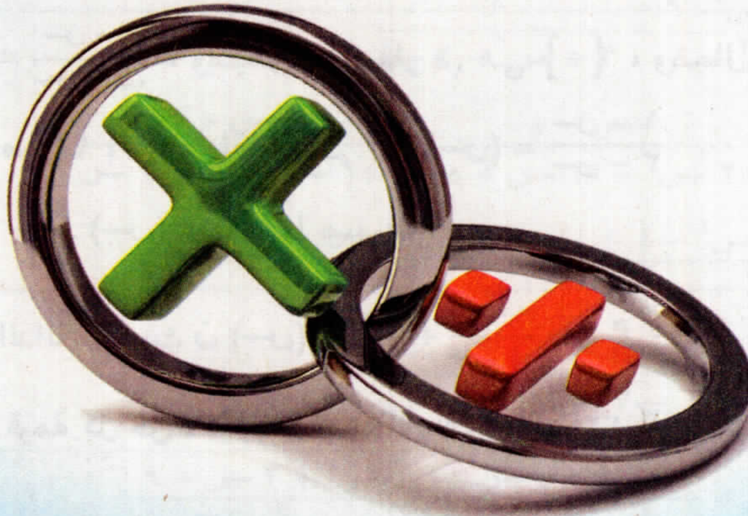
إذا كان : $\frac{٥}{\text{س} - ٢}$ معكوسًا جمعيًا للكسر $\frac{\text{م}}{٢\text{س} + \text{ك}}$

أوجد : قيمة كل من م ، ك «−١٠ ، −٤»



الدرس 5

تابع العمليات على الكسور الجبرية (ضرب وقسمة الكسور الجبرية)



ضرب وقسمة الكسور الجبرية

١ ضرب الكسور الجبرية

ضرب الكسور الجبرية يماثل ضرب الكسور العددية لذلك فمن المفضل أن تتذكر كيفية ضرب الكسور العددية.

تذكر أن

$\frac{أ}{ب} \times \frac{حـ}{ء} = \frac{أ \times حـ}{ب \times ء}$ (حيث ب ء $\neq$ ٠)

فمثلًا :

- $\frac{٢}{٣} \times \frac{٥}{٧} = \frac{٢ \times ٥}{٣ \times ٧} = \frac{١٠}{٢١}$

- $\frac{٦}{٨} \times \frac{١}{٥} = \frac{٣}{٤} \times \frac{١}{٥}$

  $= \frac{٣ \times ١}{٤ \times ٥} = \frac{٣}{٢٠}$

- $\frac{\cancel{٣}^{١}}{\cancel{٤}_{٢}} \times \frac{\cancel{٢}^{١}}{\cancel{٩}_{٣}} = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٣}$

  $= \frac{١ \times ١}{٢ \times ٣} = \frac{١}{٦}$

لاحظ : وضع الكسر فى أبسط صورة قبل إجراء عملية الضرب.

لاحظ : اختصار بسط الكسر الأول مع مقام الثانى ، واختصار بسط الكسر الثانى مع مقام الأول.

ويمكن بنفس الطريقة ضرب كسرين جبريين كالتالى :

ضرب كسرين جبريين :

إذا كانت $س \in$ المجال المشترك للكسرين الجبريين $ن_1$ ، $ن_2$ حيث :

$$ن_1(س) = \frac{د(س)}{م(س)} \quad ، \quad ن_2(س) = \frac{و(س)}{ك(س)}$$

فإن : $$ن_1(س) \times ن_2(س) = \frac{د(س)}{م(س)} \times \frac{و(س)}{ك(س)} = \frac{د(س) \times و(س)}{م(س) \times ك(س)}$$

فمثلًا : إذا كان : $ن_1(س) = \frac{٢}{س}$ ، $ن_2(س) = \frac{س}{س - ١}$

فإن : $$ن_1(س) \times ن_2(س) = \frac{٢}{س} \times \frac{س}{س - ١} = \frac{٢ \times \cancel{س}}{\cancel{س}(س - ١)}$$

حيث مجال حاصل الضرب = ح − {٠ ، ١}

، $$ن_1(س) \times ن_2(س) = \frac{٢}{س - ١}$$

لاحظ أن :

مجال حاصل الضرب هو المجال المشترك للكسرين الجبريين ويتم إيجاده قبل الاختزال.

لإجراء عملية ضرب الكسور الجبرية نتبع الخطوات التالية :

١ ترتيب حدود كل من بسط ومقام كل كسر على حدة تنازليًا أو تصاعديًا حسب قوى أى رمز فيه.

٢ تحليل بسط ومقام كل كسر إن أمكن ذلك.

٣ إيجاد المجال المشترك.

٤ حذف العوامل المشتركة بين بسط ومقام كل كسر، وبين بسط أحد الكسور ومقام كسر آخر.

٥ إجراء عملية الضرب ووضع الناتج فى أبسط صورة.

والمثال التالى يوضح الخطوات السابقة :

مثال ١

أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن :

$$ن(س) = \frac{س^٢ + ٥س}{س^٢ + س - ٦} \times \frac{س^٢ - ٧س + ١٠}{س^٢ - ٢٥}$$

الحل

$\because$ ن (س) $= \frac{س (س + ٥)}{(س + ٣)(س - ٢)} \times \frac{(س - ٥)(س - ٢)}{(س - ٥)(س + ٥)}$

$\therefore$ مجال ن = ح − {−٣ ، ٢ ، ٥ ، −٥}

وبحذف العوامل المشتركة : $\therefore$ ن (س) $= \frac{س}{س + ٣}$

حاول بنفسك ١

أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن :

١ ن (س) $= \frac{٣ س - ١٥}{س + ٣} \times \frac{٤ س + ١٢}{٥ س - ٢٥}$

٢ ن (س) $= \frac{س^{٢} - س}{س^{٢} + ٢ س} \times \frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢} - ١}$

خواص عملية ضرب الكسور الجبرية

١ الإبدال.

٢ الدمج (أو التجميع).

٣ الواحد هو المحايد الضربى.

٤ توفر المعكوسات الضربية.

المعكوس الضربى للكسر الجبرى

إذا كان : ن كسرًا جبريًا حيث ن (س) $= \frac{ق (س)}{ك (س)} \neq ٠$

فإن ن يكون له معكوس ضربى هو الكسر الجبرى $ن^{-١}$ حيث $ن^{-١}$ (س) $= \frac{ك (س)}{ق (س)}$

ويكون : مجال $ن^{-١}$ هو ح − مجموعة أصفار بسط ومقام أى من الكسرين.

فمثلًا : إذا كان : ن (س) $= \frac{س + ١}{س - ٥}$ فإن : $ن^{-١}$ (س) $= \frac{س - ٥}{س + ١}$

حيث مجال ن = ح − {٥}

، مجال $ن^{-١}$ = ح − {٥ ، −١}

لاحظ أن :

ن (س) ، $ن^{-١}$ (س) كل منهما مقلوب الآخر

بمعنى أن بسط كل منهما هو مقام الآخر.

مثال ٢

إذا كان : $ن(س) = \frac{س^٣ - ٤ س^٢ - ٥ س}{س^٢ - ٢٥}$

١ أوجد : $ن^{-١}(س)$ وعين مجال $ن^{-١}$ ٢ أوجد : $ن^{-١}(-١)$

٣ إذا كان : $ن^{-١}(س) = \frac{١}{٣}$ فأوجد قيمة : س

الحل

١ $\because ن(س) = \frac{س(س^٢ - ٤ س - ٥)}{(س - ٥)(س + ٥)} = \frac{س(س - ٥)(س + ١)}{(س - ٥)(س + ٥)}$

$\therefore$ مجال $ن^{-١} = ح - \{٠ ، ٥ ، -١ ، -٥\}$

، $ن^{-١}(س) = \frac{(س - ٥)(س + ٥)}{س(س - ٥)(س + ١)} = \frac{س + ٥}{س(س + ١)}$

٢ $ن^{-١}(-١)$ غير معرف لأن $-١ \notin$ مجال $ن^{-١}$

٣ $\because ن^{-١}(س) = \frac{١}{٣}$ $\therefore \frac{س + ٥}{س(س + ١)} = \frac{١}{٣}$

$\therefore س(س + ١) = ٣(س + ٥)$ $\therefore س^٢ + س - ٣ س - ١٥ = ٠$

$\therefore س^٢ - ٢ س - ١٥ = ٠$ $\therefore (س - ٥)(س + ٣) = ٠$

$\therefore س = ٥$ مرفوض لأن $٥ \notin$ مجال $ن^{-١}$ أ ، $س = -٣$

حاول بنفسك ٢

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان : $ن(س) = \frac{س - ١}{س}$ فإن : مجال $ن^{-١}$ هو .... (دمياط ٢٢)

(أ) ح (ب) ح - {١} (جـ) ح - {٠} (د) ح - {٠ ، ١}

٢ إذا كان : $ن(س) = \frac{س - ٥}{س + ٣}$ فإن : $ن^{-١}(٤) =$ ....

(أ) $-\frac{١}{٧}$ (ب) -٧ (جـ) ٧ (د) غير معرف.

٣ إذا كان : $ن(س) = \frac{٢ س - ٤}{س + ٢}$ فإن : $ن^{-١}(-٢) =$ ....

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $-\frac{١}{٢}$ (جـ) صفر (د) غير معرف.

٢ قسمة كسر جبرى على آخر

قسمة كسرين جبريين تماثل قسمة كسرين عددين لذلك فمن المفضل أن تتذكر كيفية قسمة كسرين عددين.



تذكر أن

إذا كان : $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{ح}{ء}$ كسرين عددين ، ب $\neq$ ٠ ، $\frac{ح}{ء} \neq$ ٠

فإن : $\frac{أ}{ب} \div \frac{ح}{ء} = \frac{أ}{ب} \times$ المعكوس الضربى للعدد $\frac{ح}{ء} = \frac{أ}{ب} \times \frac{ء}{ح}$ (حيث ب ء $\neq$ ٠)

فمثلًا : • $\frac{١}{٤} \div \frac{٣}{٥} = \frac{١}{٤} \times \frac{٥}{٣} = \frac{٥}{١٢}$

• $\frac{٥}{٨} \div \frac{-١٥}{٤} = \frac{٥}{٨} \times \frac{٤}{-١٥} = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{-٣} = -\frac{١}{٦}$

ونظرًا لتوفر المعكوسات الضربية للكسور الجبرية فإن عملية القسمة تصبح ممكنة وتُعرف كما يلى :

قسمة كسر جبرى على آخر :

إذا كان $ن_١$ ، $ن_٢$ كسرين جبريين حيث : $ن_١(س) = \frac{د(س)}{ر(س)}$ ، $ن_٢(س) = \frac{و(س)}{ك(س)}$

فإن : $ن_١(س) \div ن_٢(س) = ن_١(س) \times ن_٢^{-١}(س) = \frac{د(س)}{ر(س)} \times \frac{ك(س)}{و(س)}$

حيث مجال $(ن_١ \div ن_٢)$ = المجال المشترك لكل من $ن_١$ ، $ن_٢^{-١}$

= ح − مجموعة أصفار مقام $ن_١$ أو مقام $ن_٢$ أو بسط $ن_٢$

= ح − (ص (ر) ∪ ص (و) ∪ ص (ك))

فمثلًا : إذا كان : $ن_١(س) = \frac{س}{س - ١}$ ، $ن_٢(س) = \frac{٢س}{س - ١}$

فإن : $ن_١(س) \div ن_٢(س) = \frac{س}{س - ١} \div \frac{٢س}{س - ١} = \frac{س}{س - ١} \times \frac{س - ١}{٢س} = \frac{١}{٢}$

حيث س $\notin$ {١ ، ٠}

مثال ٣

أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن :

$$ن\,(س) = \frac{س^٢ - ٧\,س + ١٠}{س^٢ - ٤\,س - ٥} \div \frac{س^٣ - ٨}{س^٢ + ٢\,س + ٤}$$

ثم أوجد : ن (٢) ، ن (٣) إن أمكن.

الحـــل

$$\because\ ن\,(س) = \frac{(س - ٢)\,(س - ٥)}{(س - ٥)\,(س + ١)} \div \frac{(س - ٢)\,(س^٢ + ٢\,س + ٤)}{س^٢ + ٢\,س + ٤}$$

$\therefore$ مجال ن = ح − {٥ ، −١ ، ٢}

$$،\ ن\,(س) = \frac{س - ٢}{س + ١} \times \frac{١}{س - ٢} = \frac{١}{س + ١}$$

، ن (٢) غير معرف لأن ٢ $\notin$ مجال ن ، ن (٣) = $\frac{١}{٣ + ١} = \frac{١}{٤}$

حاول بنفسك ٣

أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن :

$$ن\,(س) = \frac{س^٣ - ٨}{س^٢ + س - ٦} \div \frac{س^٢ + ٢\,س + ٤}{٣\,س + ٩}$$



على ضرب وقسمة الكسور الجبرية



اختبار تفاعلي

● تذكر ● فهم ○ تطبيق حل مشكلات | أسئلة كتاب الوزارة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان : ن (س) = $\frac{س - ٣}{س + ٢}$ فإن مجال $ن^{-١}$ هو .... (الفيوم ٢٥)

(أ) {-٣} (ب) {-٢} (جـ) ح - {-٣ ، ٢} (د) ح - {-٢ ، ٣}

٢ إذا كان : ن (س) = $\frac{١}{(س - ٢)^٢}$ فإن مجال $ن^{-١}$ هو .... (القاهرة ١٨)

(أ) ح - {١ ، ٢} (ب) ح (جـ) ح - {٢} (د) {٢}

٣ إذا كان : ن (س) = $\frac{س}{س^٢ + ٩}$ فإن مجال $ن^{-١}$ هو .... (الشرقية ١٦)

(أ) ∅ (ب) ح - {-٣ ، ٣} (جـ) ح (د) ح - {٠}

٤ إذا كان : ن (س) = $\frac{س - ٢}{س^٢ - س - ٦}$ فإن مجال $ن^{-١}$ هو .... (البحيرة ١٧)

(أ) ح - {٢} (ب) ح - {-٢ ، ٣}

(جـ) ح - {-٢ ، ٢} (د) ح - {-٢ ، ٢ ، ٣}

٥ إذا كان : ن (س) = $س^٢ + ٩$ فإن مجال $ن^{-١}$ هو ....

(أ) ح (ب) ∅

(جـ) ح - {٣ ، -٣} (د) ح - {٩}

٦ إذا كان : ن (س) = $\frac{٣}{س - ٤}$ فإن : $ن^{-١}$ (٤) ....

(أ) = صفر (ب) = ٤ (جـ) = ٨ (د) غير معرفة.

٧ إذا كان : ن (س) = $\frac{س - ٣}{س + ٢}$ فإن : $ن^{-١}$ (٣) .... (الغربية ٢٤)

(أ) = صفر (ب) = ٣ (جـ) = -٣ (د) غير معرفة.

٨ إذا كانت الدالة ن : ن (س) = $\frac{٢ - س}{س - ٢}$ لها معكوس ضربي فإن مجال ن هو ....

(أ) ح - {٢} (ب) ح - {-٢} (جـ) ح - {٢ ، -٢} (د) ح

٩ إذا كانت : س $\notin$ {٢ ، -٢} فإن المعكوس الضربى للكسر الجبرى $\frac{س + ٢}{س^٢ - ٤}$ هو ....

(أ) س + ٢ (ب) س - ٢ (جـ) $\frac{-س - ٢}{س^٢ - ٤}$ (د) $-\frac{١}{س + ٢}$

١٠ إذا كان : ن (س) = $\frac{٣}{٢س} + \frac{١}{٢س}$ فإن : ن$^{-١}$ (س) = ... (القليوبية ٢٥)

(أ) $\frac{-٤}{س}$ (ب) $\frac{٤}{س}$ (جـ) $\frac{س}{٤}$ (د) $\frac{س}{٢}$

١١ إذا كان : ن$_١$ (س) = $\frac{١}{س - ٣}$ ، ن$_٢$ (س) = $\frac{س}{س - ٣}$

وكان ن (س) = ن$_١$ (س) + ن$_٢$ (س) فإن مجال ن$^{-١}$ = ... (الشرقية ٢٤)

(أ) ح - {٠} (ب) ح - {٣} (جـ) ح (د) ح - {-١ ، ٣}

١٢ إذا كانت : س ≠ صفر فإن : $\frac{٣س}{س^٢ + ٥} \div \frac{س}{س^٢ + ٥}$ = ... (القليوبية ٢٢)

(أ) -٣ (ب) -١ (جـ) ١ (د) ٣

١٣ إذا كان : ن (س) = $\frac{س}{س - ٢} \div \frac{٢}{س - ٢}$ فإن مجال ن هو ....

(أ) ح - {-٢} (ب) ح - {٢}

(جـ) ح - {٢ ، -٢} (د) ح - {٠ ، ٢ ، -٢}

١٤ مجال الكسر الجبرى ن : ن (س) = $\frac{س - ٢}{س - ٥} \div (س - ٢)$ هو ....

(أ) ح - {٥} (ب) ح - {٥ ، ٢}

(جـ) ح - {-٥ ، -٢} (د) {٥ ، ٢}

١٥ إذا كانت : س $\notin$ {٢ ، ٠} فإن : $\frac{س}{س - ٢} \div \frac{س}{٢ - س}$ = ...

(أ) $\frac{س^٢}{س - ٢}$ (ب) $-\frac{س^٢}{س - ٢}$ (جـ) ١ (د) -١

١٦ إذا كان للكسر الجبرى : $\frac{س + ٢}{س + ١}$ معكوس ضربى هو $\frac{س + ١}{س - أ}$ فإن : أ = ... (الغربية ٢٥)

(أ) -٢ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) -١

١٧ إذا كان : ن (س) = $\frac{س - ٣}{س + ٢}$ ، ن$^{-١}$ (ك) = $\frac{٧}{٢}$ فإن : ك = ...

حيث س $\notin$ {٣ ، -٢} (الدقهلية ٢٢)

(أ) -٤ (ب) ٥ (جـ) -٥ (د) $-\frac{٨}{٩}$

٢ فى كل مما يأتى أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن :

١ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س} + ٢}{\text{س}^٢ - ٤} \times \frac{٢\text{س} - ٤}{\text{س} - ٣}$ (الأقصر ٠٥)

٢ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ١}{٢\text{س} - ٨} \times \frac{\text{س} - ٤}{\text{س} + ١}$ (السويس ١٧ ، القاهرة ١٦ ، الإسماعيلية ١٥)

٣ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٣ - ١}{\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ١} \times \frac{٢\text{س} - ٢}{\text{س}^٢ + \text{س} + ١}$ (الإسكندرية ٢٣ ، الدقهلية ١٩ ، القليوبية ١٨)

٤ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٢\text{س} - ١٠}{\text{س}^٢ - ٢٥} \times \frac{\text{س}^٢ + ٥\text{س}}{\text{س} - ٣}$ (قنا ٠٩)

٥ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢ - ٣\text{س} - ٤}{\text{س}^٢ - ١} \times \frac{\text{س}^٢ - \text{س}}{\text{س}^٢ + ٣\text{س}}$ (القليوبية ١٦)

٦ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٦\text{س}^٢ + ٣\text{س}}{\text{س} + ٢} \times \frac{\text{س}^٢ + ٤\text{س} + ٤}{٦\text{س} + ٣}$ (أسيوط ١٥)

٧ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٣ - ١}{\text{س}^٢ - \text{س}} \times \frac{\text{س} + ٣}{\text{س}^٢ + \text{س} + ١}$ (الإسكندرية ١٩)

٨ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٥\text{س} + ٥}{\text{س} + ٦} \times \frac{\text{س}^٢ + ٣\text{س} - ١٨}{\text{س}^٢ - ٢\text{س} - ٣}$ ثم أوجد : ن (٢) إن أمكن. (الإسماعيلية ٠٦)

٩ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢ + ٢\text{س}}{\text{س}^٣ - ٢٧} \times \frac{\text{س}^٢ + ٣\text{س} + ٩}{\text{س} + ٢}$

ثم أوجد : ن (٦) ، ن (−٢) إن أمكن. (ج. سيناء ١٧)

١٠ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س} + ١}{\text{س}^٢ - \text{س} - ٢} \times \frac{\text{س}^٢ + ٣\text{س} - ١٠}{٣\text{س}^٢ + ١٦\text{س} + ٥}$

ثم أوجد : ن (٠) ، ن (−١) إن أمكن ذلك. (سوهاج ٢٥ ، الجيزة ٢٣)

١١ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٣ - ٨}{\text{س}^٢ + ٣\text{س} - ١٠} \times \frac{٢\text{س} + ٦}{\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ٤}$

ثم أوجد : $\text{ن}^{-١}(\text{س})$ عندما س = ١ (بورسعيد ٠٤)

١٢ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٢\text{س}^٣ - ١٦}{\text{س}^٢ - ٧\text{س} + ١٠} \times \frac{٣\text{س}^٢ - ١٠\text{س} - ٢٥}{\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ٤}$ (الإسماعيلية ٠٩)

١٣ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢ - ٢\text{س} - ٣}{٥\text{س}^٣ - ١٣٥} \times \frac{٥\text{س}^٢ + ١٥\text{س} + ٤٥}{\text{س} + ١}$

١٤ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢ - ١٢\text{س} + ٣٦}{\text{س}^٢ - ٦\text{س}} \times \frac{٤\text{س} + ٢٤}{٣٦ - \text{س}^٢}$

١٥ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س} - ٢)^٣}{\text{س}^٣ - ٨} \times \frac{\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ٤}{\text{س}^٢ - ٤}$ (الإسماعيلية ٢٣)

٣ فى كل مما يأتى أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن :

١ ن (س) $= \frac{٣\text{س} - ١٥}{\text{س} + ٣} \div \frac{٥\text{س} - ٢٥}{٤\text{س} + ١٢}$ (الأقصر ١٨ ، بنى سويف ١٤)

٢ ن (س) $= \frac{\text{س} - ١}{\text{س}^{٢} - ١} \div \frac{\text{س}^{٢} - ٥\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} - ٥}$ (مطروح ١٩ ، المنيا ١٦ ، البحيرة ١٥ ، أسوان ١٤)

٣ ن (س) $= \frac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٣}{\text{س} + ٣} \div \frac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س} + ١}$ (بورسعيد ١٨ ، الإسكندرية ١٣)

٤ ن (س) $= \frac{\text{س}^{٢} - ٧\text{س} + ١٠}{\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٥} \div (\text{س}^{٢} - ٢\text{س})$ (الأقصر ٢٥)

٥ ن (س) $= \frac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ١٥}{\text{س}^{٢} - ٩} \div \frac{٢\text{س} - ١٠}{\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩}$

٦ ن (س) $= \frac{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦}{\text{س}^{٣} - ٨} \div \frac{\text{س} - ٣}{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٤}$ (البحيرة ٢٥)

٧ ن (س) $= \frac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١}{\text{س}^{٣} - ١} \div \frac{\text{س} - ١}{\text{س}^{٢} + \text{س} + ١}$ (السويس ١٩ ، الدقهلية ١٨ ، الغربية ١٧)

٨ ن (س) $= \frac{\text{س}^{٣} - ٢٧}{\text{س}^{٢} - ٩} \div \frac{\text{س}^{٣} + ٣\text{س}^{٢} + ٩\text{س}}{٢\text{س}}$ (الفيوم ٠٩)

٩ ن (س) $= \frac{\text{س}^{٢} - ٣\text{س}}{٢\text{س}^{٢} - \text{س} - ٦} \div \frac{٢\text{س}^{٢} - ٣\text{س}}{٤\text{س}^{٢} - ٩}$ (الأقصر ١٩)

١٠ ن (س) $= \frac{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢}{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٦} \div \frac{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} - ٥}{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ١٥}$

١١ ن (س) $= \frac{\text{س}^{٢} - ٩}{٢\text{س}^{٢} + ٣\text{س}} \div \frac{٣\text{س}^{٢} + ٦\text{س} - ٤٥}{٤\text{س}^{٢} - ٩}$ (أسوان ٠٨)

١٢ ن (س) $= \frac{\text{س}^{٢} - ٤}{٣\text{س}^{٢} + \text{س} - ١٠} \div \frac{٦\text{س}^{٢} - ٥\text{س} - ١٤}{٣\text{س}^{٢} - ٥\text{س}}$

١٣ ن (س) $= \frac{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٢}{١ - \text{س}^{٢}} \div \frac{٣\text{س} - ١٥}{\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٥}$

١٤ ن (س) $= \frac{٣\text{س} - ٩}{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦} \div \frac{٢\text{س} + ٦}{٦ - \text{س} - \text{س}^{٢}}$

١٥ ن (س) = $\frac{س - ٢}{٢ س^٢ - ٣ س}$ ÷ $\frac{٦ + س - ٢ س^٢}{٩ - ٤ س^٢}$

١٦ ن (س) = $\frac{س^٢ + س - ٦}{س^٢ + ٥ س + ٦}$ ÷ $\frac{س^٣ - ٢ + س - ٢ س^٢}{س^٣ + ٢ س^٢ + س + ٢}$

---

٤ **إذا كان مجال الدالة ن : ن (س) = $\frac{(س - ٢)(س + ١)}{س^٢ - ك}$ هو ح - {١ ، -١} أوجد :**

١ **قيمة ك**

٢ **ن$^{-١}$ (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن$^{-١}$** (قنا ٢٣)

---

٥ **إذا كان : ن (س) = $\frac{س^٢ - ٢ س}{(س - ٢)(س^٢ + ٢)}$**

١ **أوجد : ن$^{-١}$ (س) وعين مجال ن$^{-١}$**

٢ **إذا كان : ن$^{-١}$ (س) = ٣ فما قيمة س ؟** (المنوفية ٢٥ ، سوهاج ٢٥ ، المنيا ٢٢ ، الإسكندرية ١٩) «١»

---

٦ **إذا كان : ن (س) = $\frac{س^٣ + ٣ س^٢ + ٢ س}{س^٢ + ٢ س}$ فأوجد : ن$^{-١}$ (س) فى أبسط صورة**

موضحًا مجال ن$^{-١}$ ثم أوجد : ن$^{-١}$ (-٢) إن أمكن (الإسماعيلية ٠٨) «غير معرفة»

---

٧ **إذا كانت : ن (س) = س + $\frac{س}{س - ٢}$ أوجد : ن$^{-١}$ (س) فى أبسط صورة موضحًا مجال ن$^{-١}$**

(الغربية ١٩)

---

٨ **إذا كان : ن (س) = $\frac{س^٢ - ٤٩}{س^٣ - ٨}$ ÷ $\frac{س + ٧}{س - ٢}$ فأوجد : ن (س) فى أبسط صورة**

مبينًا مجال ن ، واحسب قيمة : ن (١) (أسيوط ١٩ ، البحيرة ١٧ ، الغربية ١٢) «$\frac{-٦}{٧}$»

---

٩ **إذا كان : ن (س) = $\frac{س^٣ - س^٢ - ٢ س}{س^٢ - ٥ س + ٦}$ ÷ $\frac{س^٣ + ٦ س^٢ + ٥ س}{س^٢ + ٢ س - ١٥}$**

أوجد : ن (س) فى أبسط صورة موضحًا مجال ن

ثم أوجد إن أمكن : ن (٧) ، ن (٣) «١ ، غير معرفة»

١٠ إذا كان : د (س) = $\frac{س^٢ - ٢ س - ١٥}{س^٢ - ٩} \div \frac{س^٢ - ٢٥}{س^٢ - ٣ س}$

فأوجد : د (س) فى أبسط صورة موضحًا مجال د

وإذا كان : د (أ) = $\frac{١}{٣}$ فأوجد قيمة : أ (أسيوط ٠٨) « $\frac{٥}{٢}$ »

---

١١ أوجد $ن_١$ (س) ، $ن_٢$ (س) ، ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال كل من

$ن_١$ ، $ن_٢$ ، ن حيث :

$ن_١ (س) = \frac{٢ س + ٧}{٤ س^٢ - ١} \div \frac{٤ س^٢ + ١٢ س - ٧}{٨ س^٣ - ١}$

، $ن_٢ (س) = \frac{١٢ س^٢ - ٣}{١٢ س^٢ + ٦ س + ٣}$ ، ن (س) = $ن_١$ (س) × $ن_٢$ (س)

---

١٢ أوجد فى أبسط صورة :

ن (س) = $\left(\frac{٣ س + ١٥}{س^٢ + ٧ س + ١٠} + \frac{٢ س + ١}{س + ٢}\right) \times \frac{س^٣ - ٢٧}{س^٢ + ٣ س + ٩}$ مبينًا مجال ن

، وإذا كانت : ن (س) = ٢ أوجد قيمة : س (السويس ٠٥) « ٤ »

للمتفوقين

١ إذا كان : ن (س) = $\frac{س^٢ - أ س + ١٢}{س^٢ - ٣ س - ٤}$ ، $ن^{-١} (س) = \frac{س + ١}{س - ٣}$

فأوجد قيمة أ « ٧ »

---

٢ إذا كانت : ن (س) = $\frac{س + \frac{١}{س - ٢}}{٤ س + \frac{٤}{س - ٢}}$ فأوجد : ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن

، ثم أوجد : ن (١) ، ن (٨) إن أمكن. «غير معرفة ، $\frac{١}{٤}$ »

الوحـــدة الثالثة

الاحتمال

الدرس الأول :

العمليات على الأحداث (تقاطع واتحاد حدثين).

الدرس الثانى :

تابع العمليات على الأحداث

(الحدث المكمل والفرق بين حدثين).

أهداف الوحدة: بعد دراسة هذه الوحدة يجب أن يكون التلميذ قادرًا على أن :

- يستدعى ما سبق دراسته عن حساب الاحتمال نظريًا.
- يحسب احتمال وقوع حدثين معًا فى نفس فضاء العينة (تقاطع حدثين).
- يتعرف الأحداث المتنافية.
- يحسـب احتمال وقوع أحـد حدثين عـلى الأقل فى نفس فضـاء العينة (اتحاد حدثين).
- يتعرف الحدث المكمل.
- يحسب احتمال عدم وقوع حدث ما فى فضاء العينة (الحدث المكمل).
- يحسـب احتمال وقوع حـدث ما وعدم وقوع حدث آخـر فى نفس فضاء العينة (الفرق بين حدثين).

يمكنك



حل الامتحانات التفاعلية على الدروس من خلال مسح **QR code** الخاص بكل امتحان



العمليات على الأحداث (تقاطع واتحاد حدثين)

الدرس 1



قبل دراستنا للعمليات على الأحداث سوف نتذكر بعض المفاهيم والمصطلحات الأساسية التى سبق دراستها فى الاحتمال.

١ التجربة العشوائية :

هى تجربة نستطيع تحديد جميع نواتجها قبل إجرائها ، وإن كنا لا نستطيع تحديد أى هذه النواتج سيتحقق فعلاً عند إجرائها.

٢ فضاء العينة (ف) :

هو مجموعة كل النواتج الممكنة الحدوث لتجربة عشوائية.

٣ الحدث :

هو مجموعة جزئية من فضاء العينة.

٤ احتمال وقوع الحدث :

- يقال إن حدثًا ما قد وقع إذا كان ناتج التجربة العشوائية أحد عناصر هذا الحدث.
- ويمكن حساب احتمال وقوع حدث ما وليكن أ الذى يرمز له بالرمز ل (أ) من العلاقة :

$$ل\,(أ) = \frac{\text{عدد عناصر الحدث أ}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة ف}} = \frac{ن\,(أ)}{ن\,(ف)}$$

فمثلًا : فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى إذا كان :

ف هو فضاء العينة ، أ هو حدث الحصول على عدد زوجى فإن :

ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ، ن (ف) = ٦

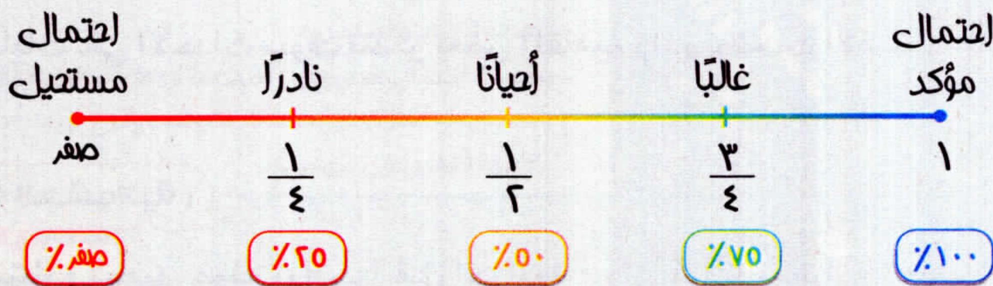
، أ = {٢ ، ٤ ، ٦} ، ن (أ) = ٣

ويكون : ل (أ) = $\frac{\text{ن (أ)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$ (أى احتمال وقوع الحدث أ = $\frac{١}{٢}$)

! ملاحظتان

- ٠ ≤ احتمال وقوع أى حدث ≤ ١
- يمكن كتابة الاحتمال فى صورة كسر أو نسبة مئوية.

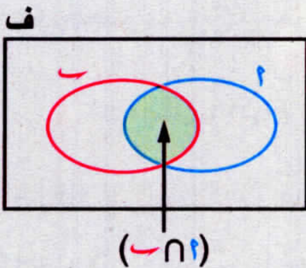
والشكل التالى يوضح إمكانية وقوع الحدث وفقًا لقيمة احتماله :



العمليات على الأحداث

حيث إن الحدث هو **مجموعة جزئية** من فضاء العينة (ف) فإننا يمكن أن نجرى على الأحداث نفس العمليات التى نجريها على المجموعات مثل التقاطع والاتحاد والمكملة والفرق باعتبار أن المجموعة الشاملة لهذه الأحداث هى فضاء العينة (ف) ، كما يمكننا التعبير عن هذه الأحداث بأشكال ڤن.

١ تقاطع حدثين :



لأى حدثين أ ، ب من فضاء العينة ف يكون :

حدث وقوع الحدثين أ و ب معًا = أ ∩ ب ويكون :

احتمال وقوع الحدثين أ و ب معًا = ل (أ ∩ ب)

= $\frac{\text{ن (أ} \cap \text{ب)}}{\text{ن (ف)}}$

مثال ١

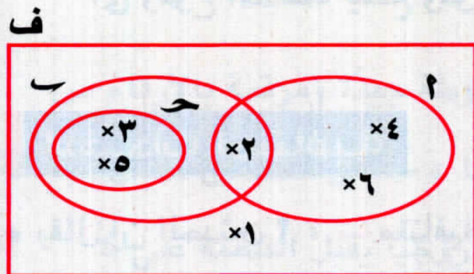
فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى إذا كان أ هو حدث الحصول على عدد زوجى ، ب هو حدث الحصول على عدد أولى ، حـ هو حدث الحصول على عدد أولى فردى فأوجد مستعينًا بشكل ڤن :

١ احتمال وقوع الحدثين أ و ب معًا.

٢ احتمال وقوع الحدثين ب و حـ معًا.

٣ احتمال وقوع الحدثين أ و حـ معًا.

الحـل



فضاء العينة (ف) = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

∴ ن (ف) = ٦

، أ = {٢ ، ٤ ، ٦} ، ب = {٢ ، ٣ ، ٥} ، حـ = {٣ ، ٥}

١ ∵ حدث وقوع الحدثين أ و ب معًا = أ ⋂ ب = {٢} ∴ ن (أ ⋂ ب) = ١

∴ احتمال وقوع الحدثين أ و ب معًا = ل (أ ⋂ ب) = $\frac{\text{ن (أ ⋂ ب)}}{\text{ن (ف)}} = \frac{1}{6}$

٢ ∵ حدث وقوع الحدثين ب و حـ معًا = ب ⋂ حـ = {٣ ، ٥} ∴ ن (ب ⋂ حـ) = ٢

∴ احتمال وقوع الحدثين ب و حـ معًا = ل (ب ⋂ حـ) = $\frac{\text{ن (ب ⋂ حـ)}}{\text{ن (ف)}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

٣ ∵ حدث وقوع الحدثين أ و حـ معًا = أ ⋂ حـ = ∅ (لأن : أ ، حـ مجموعتان منفصلتان).

∴ ن (أ ⋂ حـ) = صفر

∴ احتمال وقوع الحدثين أ و حـ معًا = ل (أ ⋂ حـ) = $\frac{\text{ن (أ ⋂ حـ)}}{\text{ن (ف)}} = \frac{\text{صفر}}{6}$ = صفر

ملاحظات

من المثال السابق نلاحظ أن :

١ حـ ⊂ ب ولذلك نجد أن : ب ∩ حـ = حـ

ومن ذلك يمكن أن نستنتج أن :

احتمال وقوع الحدثين ب و حـ معًا = احتمال وقوع الحدث حـ

أى أن : ل (ب ∩ حـ) = ل (حـ) = $\frac{\text{ن (حـ)}}{\text{ن (ف)}}$

٢ أ ∩ حـ = ∅ ولذلك يقال إن الحدثين أ ، حـ متنافيان

أى وقوع أحدهما يمنع وقوع الآخر.

الأحداث المتنافية

* يقال إن الحدثين أ ، ب متنافيان إذا كان : أ ∩ ب = ∅

ويكون : ل (أ ∩ ب) = ٠

أى أن : احتمال وقوعهما معًا = احتمال الحدث المستحيل = صفر

* يقال لعدة أحداث إنها متنافية إذا كانت متنافية مثنى مثنى

فمثلًا : لأى ثلاثة أحداث أ ، ب ، حـ من فضاء العينة ف

إذا كان :

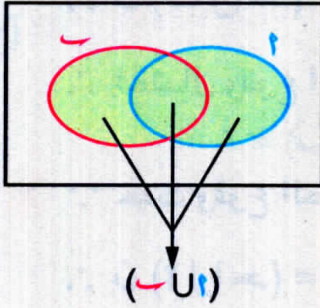
أ ∩ ب = ∅ ، ب ∩ حـ = ∅ ، أ ∩ حـ = ∅

فإن : أ ، ب ، حـ أحداث متنافية.

حاول بنفسك ١

فى تجربة سحب بطاقة عشوائيًا من ٩ بطاقات متماثلة ومرقمة بالأرقام من ١ إلى ٩
إذا كان أ هو حدث البطاقة المسحوبة تحمل عددًا زوجيًا ، ب هو حدث البطاقة المسحوبة تحمل عددًا أقل من ٧ فأوجد احتمال وقوع الحدثين أ ، ب معًا.

٢ اتحاد حدثين :



لأى حدثين أ ، ب من فضاء العينة ف يكون :

حدث وقوع الحدثين أ أو ب أو كلاهما

أى وقوع أحدهما على الأقل = أ ∪ ب

ويكون : احتمال وقوع الحدثين أ أو ب أو كلاهما

أى احتمال وقوع أحدهما على الأقل = ل (أ ∪ ب) = $\frac{\text{ن (أ ∪ ب)}}{\text{ن (ف)}}$

مثال ٢

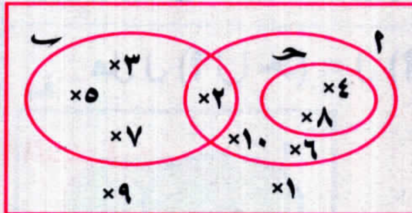
فى تجربة سحب بطاقة واحدة عشوائيًا من ١٠ بطاقات متماثلة ومخلوطة جيدًا ومرقمة بالأرقام من ١ إلى ١٠ إذا كان أ هو حدث أن تحمل البطاقة المسحوبة عددًا زوجيًا ، ب هو حدث أن تحمل البطاقة المسحوبة عددًا أوليًا ، حـ هو حدث أن تحمل البطاقة المسحوبة عددًا زوجيًا يقبل القسمة على ٤

فأوجد مستعينًا بشكل ڤن :

١ احتمال وقوع الحدثين أ أو ب   ٢ احتمال وقوع الحدثين ب أو حـ

٣ احتمال وقوع الحدثين أ أو حـ

الحـل



∵ ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠}

∴ ن (ف) = ١٠

، أ = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠} ، ب = {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧} ، حـ = {٤ ، ٨}

١ ∵ حدث وقوع الحدثين أ أو ب = أ ∪ ب = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ١٠}

∴ ن (أ ∪ ب) = ٨

∴ احتمال وقوع الحدثين أ أو ب = ل (أ ∪ ب) = $\frac{\text{ن (أ ∪ ب)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\frac{٨}{١٠}$ = $\frac{٤}{٥}$

٢ ∵ حدث وقوع الحدثين ب أو حـ = ب ∪ حـ = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧ ، ٨}

∴ ن (ب ∪ حـ) = ٦

∴ احتمال وقوع الحدثين ب أو حـ = ل (ب ∪ حـ) = $\frac{\text{ن (ب ∪ حـ)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\frac{٦}{١٠}$ = $\frac{٣}{٥}$

٣ ∵ حدث وقوع الحدثين أ أو حـ = أ ∪ حـ = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠}

∴ ن (أ ∪ حـ) = ٥

∴ احتمال وقوع الحدثين أ أو حـ = ل (أ ∪ حـ) = $\frac{\text{ن (أ ∪ حـ)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\frac{٥}{١٠}$ = $\frac{١}{٢}$

لاحظ أن : حـ ⊂ أ أى أن : أ ∪ حـ = أ **ولذلك نقول :** ل (أ ∪ حـ) = ل (أ) = $\frac{\text{ن (أ)}}{\text{ن (ف)}}$

مثال ٣

فى شكل ڤن المقابل :

إذا كان أ ، ب ، حـ ثلاثة أحداث من

فضاء العينة (ف) لتجربة عشوائية فأوجد :

١ ل (أ ∪ ب) ، ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

هل ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب) ؟

٢ ل (أ ∪ حـ) ، ل (أ) + ل (حـ)

هل ل (أ ∪ حـ) = ل (أ) + ل (حـ) ؟

الحل

∵ ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠} ∴ ن (ف) = ١٠

، ∵ أ = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠} ∴ ن (أ) = ٥ ∴ ل (أ) = $\frac{\text{ن (أ)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\frac{٥}{١٠}$ = $\frac{١}{٢}$

، ∵ ب = {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧} ∴ ن (ب) = ٤ ∴ ل (ب) = $\frac{\text{ن (ب)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\frac{٤}{١٠}$ = $\frac{٢}{٥}$

، ∵ حـ = {٣ ، ٩} ∴ ن (حـ) = ٢ ∴ ل (حـ) = $\frac{\text{ن (حـ)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\frac{٢}{١٠}$ = $\frac{١}{٥}$

١ ∵ أ ∪ ب = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ١٠} ∴ ن (أ ∪ ب) = ٨

∴ ل (أ ∪ ب) = $\frac{\text{ن (أ ∪ ب)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\frac{٨}{١٠}$ = $\frac{٤}{٥}$ (١)

، ∵ أ ∩ ب = {٢} ∴ ن (أ ∩ ب) = ١

∴ ل (أ ∩ ب) = $\frac{\text{ن (أ ∩ ب)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\frac{١}{١٠}$

∴ ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{٢}{٥}$ − $\frac{١}{١٠}$ = $\frac{٨}{١٠}$ = $\frac{٤}{٥}$ (٢)

من (١) ، (٢) نلاحظ أن : **ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)**

٢ ∵ أ ∪ حـ = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ٩ ، ١٠} ∴ ن (أ ∪ حـ) = ٧

∴ ل (أ ∪ حـ) = $\frac{\text{ن (أ ∪ حـ)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\frac{٧}{١٠}$ (١)

، ∵ ل (أ) + ل (حـ) = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٥}$ = $\frac{٧}{١٠}$ (٢)

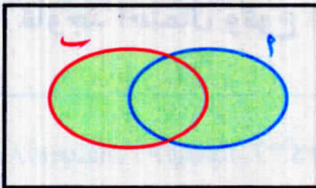
من (١) ، (٢) نلاحظ أن : **ل (أ ∪ حـ) = ل (أ) + ل (حـ)**

يمكن تعميم ما سبق فيما يلى :

قاعدة

• لأى حدثين أ ، ب من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية يكون :

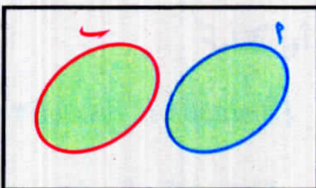
ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)



• وإذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين

فإن : ل (أ ∩ ب) = صفر فيكون :

ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب)



مثال ٤

إذا كان ٢ ، ب حدثين من فضاء العينة ف وكان : ل (٢) = ٠,٣ ، ل (ب) = ٠,٢ فأوجد :

١ ل (٢ ∪ ب) إذا كان : ل (٢ ∩ ب) = ٠,١

٢ ل (٢ ∪ ب) إذا كان : ٢ ، ب حدثين متنافيين.

٣ ل (٢ ∩ ب) إذا كان : ل (٢ ∪ ب) = ٠,٣

الحل

١ ل (٢ ∪ ب) = ل (٢) + ل (ب) − ل (٢ ∩ ب) = ٠,٣ + ٠,٢ − ٠,١ = ٠,٤

٢ ∵ ٢ ، ب حدثان متنافيان

∴ ل (٢ ∪ ب) = ل (٢) + ل (ب) = ٠,٣ + ٠,٢ = ٠,٥

٣ ∵ ل (٢ ∪ ب) = ل (٢) + ل (ب) − ل (٢ ∩ ب)

∴ ٠,٣ = ٠,٣ + ٠,٢ − ل (٢ ∩ ب) ∴ ٠,٣ = ٠,٥ − ل (٢ ∩ ب)

∴ ل (٢ ∩ ب) = ٠,٥ − ٠,٣ = ٠,٢

حاول بنفسك ٢

إذا كان : ٢ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية

وكان : ل (٢) = ٠,٨ ، ل (ب) = ٠,٧ ، ل (٢ ∩ ب) = ٠,٦

فأوجد احتمال وقوع الحدثين ٢ أو ب



على تقاطع واتحاد حدثين



اختبار تفاعلى

● تذكر ● فهم ● تطبيق ● حل مشكلات | أسئلة كتاب الوزارة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ احتمال الحدث المستحيل يساوى .... (بورسعيد ٢٣ ، كفر الشيخ ١٧ ، القاهرة ١٥)

(أ) ∅ (ب) صفر (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) ١

٢ احتمال الحدث المؤكد يساوى .... (ش. سيناء ٢٣ ، قنا ١٥)

(أ) صفر (ب) ∅ (جـ) ١ (د) −١

٣ إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية

فإن : أ ∩ ب = ... (الدقهلية ٢٥)

(أ) صفر (ب) ف (جـ) ١ (د) ∅

٤ إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين فإن : ل (أ ∩ ب) = ... (القليوبية ٢٤ ، الفيوم ٢٣)

(أ) ∅ (ب) ل (أ) (جـ) ل (ب) (د) صفر

٥ إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة ف

فإن : ل (أ ∪ ب) = ... (المنيا ١٦ ، الفيوم ١٥)

(أ) ل (أ) (ب) ل (ب) (جـ) ل (أ ∩ ب) (د) ل (أ) + ل (ب)

٦ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما ، أ ⊂ ب

فإن : ل (أ ∩ ب) = ... (الجيزة ٢٣ ، القاهرة ١٦)

(أ) ل (ب) (ب) ل (أ) (جـ) صفر (د) ∅

٧ إذا كان : أ ⊂ ب فإن : ل (أ ∪ ب) = ... (مطروح ٢٣ ، البحيرة ١٩ ، القليوبية ١٨)

(أ) صفر. (ب) ل (أ) (جـ) ل (ب) (د) ل (أ ∩ ب)

٨ إذا ألقيت قطعة نقود منتظمة مرة واحدة فإن احتمال ظهور صورة أو كتابة

يساوى .... (الإسكندرية ١٤ ، الدقهلية ١٣)

(أ) ١٠٠ ٪ (ب) ٥٠ ٪ (جـ) ٢٥ ٪ (د) صفر ٪

٩ إذا سُحبت بطاقة عشوائيًا من بين ٢٠ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٢٠ فإن احتمال أن يكون الرقم المسحوب مضاعفًا للعدد ٧ هو .... (البحيرة ١٧)

(أ) ١٠٪ (ب) ١٥٪ (جـ) ٢٠٪ (د) ٢٥٪

١٠ إذا أُلقى حجر نرد منتظم مرة واحدة فإن احتمال ظهور عدد زوجى وظهور عدد فردى معًا يساوى .... (المنيا ٢٤ ، الإسكندرية ٢٣ ، الإسكندرية ١٦ ، البحيرة ١٤)

(أ) صفر (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) ١

١١ ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة فإذا كان الحدث أ هو «ظهور عدد أولى» والحدث ب هو «ظهور عدد فردى» فإن : ل (أ ∩ ب) = ... (أسيوط ٢٤ ، الشرقية ١١)

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

١٢ ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة فإذا كان الحدث أ هو «ظهور عدد فردى»، والحدث ب هو «ظهور عدد أقل من ٥» فإن احتمال وقوع أحدهما على الأقل هو ....

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٥}{٦}$

١٣ إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من تجربة عشوائية ما وكان : ل (أ) = $\frac{١}{٣}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٧}{١٢}$ فإن : ل (ب) = ... (الغربية ٢٥)

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{١٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٣}$

---

٢ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية ، أكمل :

١ ل (أ) = ٠,٣
ل (ب) = ٠,٦
ل (أ ∩ ب) = ٠,٢
ل (أ ∪ ب) = ...

٢ ل (أ) = ٠,٥٥
ل (ب) = $\frac{٣}{١٠}$
ل (أ ∩ ب) = ...
ل (أ ∪ ب) = $\frac{١٣}{٢٠}$

٣ ل (أ) = ...
ل (ب) = $\frac{١}{٤}$
ل (أ ∩ ب) = صفر
ل (أ ∪ ب) = ٠,٩

---

٣ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية ، أجب عن الآتى :

١ ل (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (ب) = $\frac{٢}{٣}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٣}$ فأوجد : ل (أ ∪ ب) (بورسعيد ١٣) «$\frac{٥}{٦}$»

٢ ل (أ) = $\frac{٣}{٨}$ ، ل (ب) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٥}{٨}$
فأوجد : ل (أ ∩ ب) (مطروح ٢٣ ، دمياط ١١) «$\frac{١}{٤}$»

٣ ل (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (ب) = $\frac{١}{٣}$ فأوجد ل (أ ∪ ب) فى كل مما يأتى :

(أ) ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٨}$ (ب) أ ، ب حدثان متنافيان.

(أسيوط ٢٣ ، أسوان ٢٣ ، الغربية ١٨ ، قنا ١٨ ، أسوان ١٧) « $\frac{١٧}{٢٤}$ ، $\frac{٥}{٦}$ »

---

٤ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان :

ل (ب) = $\frac{١}{١٢}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{١}{٣}$ فأوجد ل (أ) إذا كان :

١ أ ، ب حدثين متنافيين. **٢** ب ⊂ أ

(بورسعيد ١٨ ، الأقصر ١٧ ، ش. سيناء ١٤) « $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٣}$ »

---

٥ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما ، وكان :

ل (أ) = $\frac{١}{٦}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{١٨}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٤}{٩}$

فأوجد : ل (ب) « $\frac{١}{٣}$ »

---

٦ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما ، وكان :

أ ⊂ ب ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{٢}{٥}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٤}{٥}$

فأوجد : **١** ل (أ) **٢** ل (ب) « $\frac{٢}{٥}$ ، $\frac{٤}{٥}$ »

---

٧ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان :

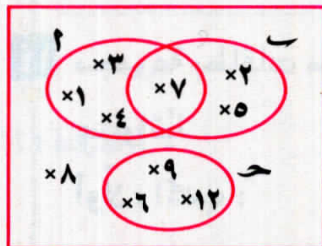
ل (أ) = ٠,٥ ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٨ ، ل (ب) = ٢ س فأوجد قيمة س إذا كان :

١ أ ⊂ ب **٢** ل (أ ∩ ب) = ٠,١

(كفر الشيخ ١٦) « ٠,٤ ، ٠,٢ »

---

٨ باستخدام شكل فن المقابل أوجد :



١ ل (أ ∩ ب) ، ل (أ ∪ ب)

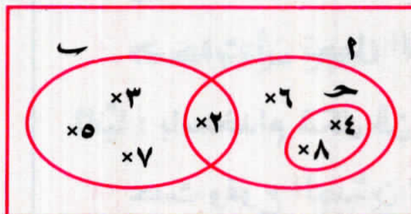
٢ ل (أ ∩ ح) ، ل (أ ∪ ح)

٣ ل (ب ∩ ح) ، ل (ب ∪ ح)

(أسيوط ١١)

---

٩ باستخدام شكل فن المقابل أوجد :



١ ل (أ ∩ ب) **٢** ل (أ ∪ ب)

٣ ل (أ ∩ ح) **٤** ل (أ ∪ ح)

٥ ل (ب ∩ ح) **٦** ل (ب ∪ ح)

٧ ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

١٠ ف فضاء عينة لتجربة عشوائية جميع نواتجها متساوية الإمكانات ، وكان أ ، ب حدثين من ف ، فإذا كان عدد النواتج التى تؤدى إلى وقوع الحدث أ يساوى ١٣ ، وعدد جميع النواتج الممكنة للتجربة العشوائية يساوى ٢٤ وكان : ل (أ ∪ ب) = $\frac{٥}{٦}$ ، ل (ب) = $\frac{٥}{١٢}$ **فأوجد :**

١ احتمال وقوع الحدث أ

٢ احتمال وقوع الحدثين أ ، ب معًا.

(المنيا ١٧ ، الغربية ١٦) « $\frac{١٣}{٢٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ »

---

١١ صندوق يحتوى على ١٢ كرة متماثلة منها ٥ كرات زرقاء ، ٤ كرات حمراء ، وباقى الكرات بيضاء. سحبت كرة واحدة عشوائيًا من الصندوق. **أوجد احتمال أن تكون الكرة المسحوبة :**

١ زرقاء.

٢ ليست حمراء.

٣ زرقاء أو حمراء.

(سوهاج ١٨ ، الأقصر ١٨ ، الإسكندرية ١٣) « $\frac{٥}{١٢}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٤}$ »

---

١٢ كيس يحتوى على ٢٥ كرة متماثلة منها ٤ كرات صفراء ، ٧ كرات حمراء ، والباقى أسود اللون ، فإذا سحبت كرة عشوائيًا ، **فأوجد احتمال أن تكون الكرة المسحوبة :**

١ سوداء.

٢ صفراء أو سوداء.

٣ ليست صفراء.

٤ خضراء.

« $\frac{١٤}{٢٥}$ ، $\frac{١٨}{٢٥}$ ، $\frac{٢١}{٢٥}$ ، صفر»

---

١٣ فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة إذا كان : أ حدث الحصول على عدد زوجى ، ب حدث الحصول على عدد فردى ، حـ حدث الحصول على عدد أولى زوجى **فأوجد :**

١ احتمال وقوع الحدثين أ ، ب معًا.

٢ احتمال وقوع الحدثين أ أو حـ

«صفر ، $\frac{١}{٢}$ »

---

١٤ مجموعة بطاقات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٨ بدون تكرار خلطت جيدًا فإذا سحبت منها بطاقة واحدة عشوائيًا :

أولًا : اكتب :

١ فضاء العينة ف

٢ أ حدث أن تحمل البطاقة المسحوبة عددًا زوجيًا.

٣ ب حدث أن تحمل البطاقة المسحوبة عددًا أوليًا.

٤ حـ حدث أن تحمل البطاقة المسحوبة عددًا يقبل القسمة على ٤

ثانيًا : باستخدام شكل فن احسب احتمال :

١ حدث وقوع الحدثين أ ، ب معًا.

٢ حدث وقوع أحد الحدثين ب أو حـ على الأقل.

« $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{٣}{٤}$ »

١٥ سحبت بطاقة عشوائيًا من ٢٠ بطاقة متماثلة ومرقمة بالأرقام من ١ إلى ٢٠

احسب احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل عددًا :

١ يقبل القسمة على ٣

٢ يقبل القسمة على ٥

٣ يقبل القسمة على ٣ ويقبل القسمة على ٥

٤ يقبل القسمة على ٣ أو يقبل القسمة على ٥ (أسوان ١١) « $\frac{٣}{١٠}$ ، $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{١}{٢٠}$ ، $\frac{٩}{٢٠}$ »

---

١٦ صندوق به ٣٠ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٣٠ ، سحبت منه بطاقة واحدة عشوائيًا. **أوجد احتمال أن يكون العدد المكتوب على البطاقة المسحوبة :**

١ فرديًا ويقبل القسمة على ٥

٢ أوليًا أو يقبل القسمة على ٧ « $\frac{١}{١٠}$ ، $\frac{١٣}{٣٠}$ »

---

١٧ مجموعة بطاقات مرقمة من ١ إلى ٣٠ خلطت جيدًا ، فإذا سحبت منها بطاقة واحدة عشوائيًا.

احسب احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل :

١ عددًا مضاعفًا للعدد ٦

٢ عددًا مضاعفًا للعدد ٨

٣ عددًا مضاعفًا للعدد ٦ ، ٨ معًا.

٤ عددًا مضاعفًا للعدد ٦ أو ٨

« $\frac{١}{٦}$ ، $\frac{١}{١٠}$ ، $\frac{١}{٣٠}$ ، $\frac{٧}{٣٠}$ »

---

١٨ صندوق به ١٥ كرة منها ٦ كرات حمراء مرقمة بالأرقام من ١ إلى ٦ ، ٩ كرات خضراء مرقمة بالأرقام من ٧ إلى ١٥، سحبت كرة واحدة عشوائيًا من هذا الصندوق.

أوجد احتمال كل من الحدثين الآتيين :

١ حدث أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو تحمل عددًا فرديًا. (الشرقية ٢٤)

٢ حدث أن تكون الكرة المسحوبة خضراء وتحمل عددًا زوجيًا. « $\frac{١١}{١٥}$ ، $\frac{٤}{١٥}$ »

---

١٩ حجر نرد غير منتظم ، احتمال ظهور كل من الأعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ متساوى واحتمال ظهور العدد ٦ يساوى ٣ مرات احتمال ظهور العدد ١ ، فإذا ألقى هذا الحجر مرة واحدة.

احسب احتمال :

١ ظهور العدد ٦

٢ ظهور عدد فردى أولى. « $\frac{٣}{٨}$ ، $\frac{١}{٤}$ »

٢٠ إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية بحيث كان احتمال وقوع الحدث ب يساوى ثلاثة أمثال احتمال وقوع الحدث أ ، واحتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل يساوى ٠,٦٤ .

أوجد احتمال وقوع الحدث أ واحتمال وقوع الحدث ب «٠,١٦ ، ٠,٤٨»

للمتفوقين

١ اشترك ثلاثة لاعبين أ ، ب ، حـ فى مسابقة لرفع الأثقال ، فإذا كان احتمال فوز اللاعب أ يساوى ضعف احتمال فوز اللاعب ب ، واحتمال فوز اللاعب ب يساوى احتمال فوز اللاعب حـ فأوجد احتمال فوز اللاعب ب أو حـ علمًا بأن لاعبًا واحدًا سيفوز فى المسابقة. (مطروح ١٨) «$\frac{1}{2}$»

---

٢ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية ، وكان :

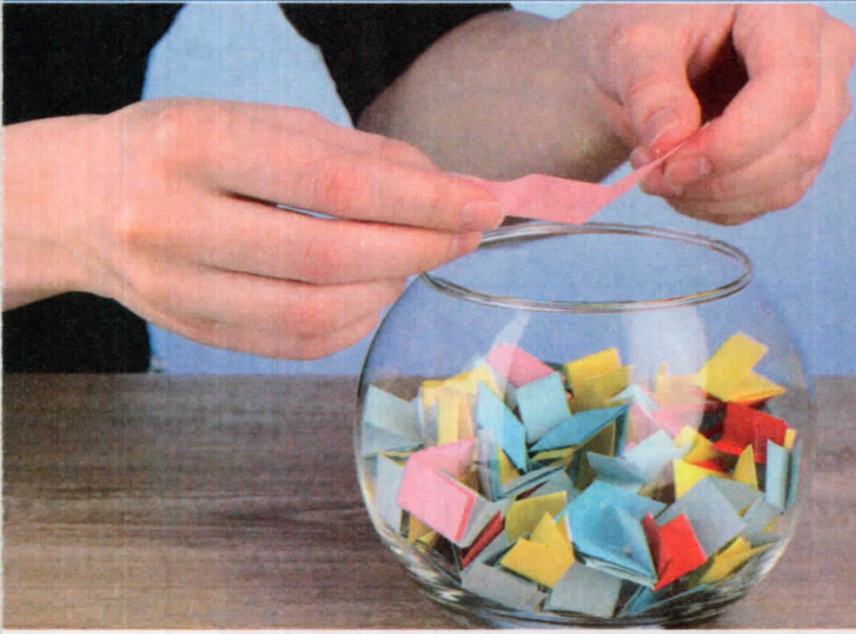
ل (أ ∪ ب) = $\frac{4}{5}$ ، ل (أ) = $\frac{2}{5}$ ، ٧ ل (أ ∩ ب) = ٢ − ل (ب)

فأوجد : ل (ب) «$\frac{3}{5}$»

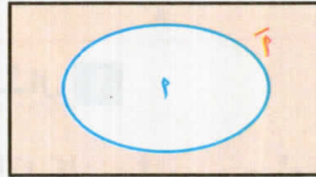


الدرس 2

تابع العمليات على الأحـداث (الحدث المكمل والفرق بين حدثين)



٣ الحدث المكمل :



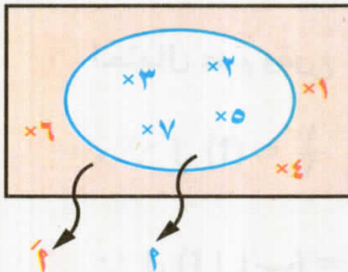
إذا كان أ حدثًا من فضاء العينة ف (أ $\subset$ ف) فإن :

الحدث المكمل للحدث أ يرمز له بالرمز أَ ، وهو حدث عدم وقوع أ

حيث أ $\cup$ أَ = ف ، أ $\cap$ أَ = $\varnothing$

ويكون احتمال عدم وقوع الحدث أ = ل (أَ) = $\frac{\text{ن (أَ)}}{\text{ن (ف)}}$

فمثلًا : فى تجربة سحب بطاقة واحدة عشوائيًا من ٧ بطاقات متماثلة ومرقمة بالأرقام من ١ إلى ٧ وملاحظة الرقم المكتوب عليها :



إذا كان : أ هو حدث الحصول على عدد أولى

فإن : أ = {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧} $\therefore$ ن (أ) = ٤

ويكون : أَ = {١ ، ٤ ، ٦} هو الحدث المكمل للحدث أ

وهو يمثل حدث عدم وقوع الحدث أ

وحيث إن : ن (أ) = ٤ ، ن (أَ) = ٣ ، ن (ف) = ٧

فإن : احتمال وقوع الحدث أ = ل (أ) = $\frac{\text{ن (أ)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\frac{٤}{٧}$

، احتمال عدم وقوع الحدث أ = ل (أَ) = $\frac{\text{ن (أَ)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\frac{٣}{٧}$

ملاحظات

لأى حدث أ من فضاء العينة ف يكون :

(١) $أ \cap أَ = \varnothing$

أى أن : الحدثان أ ، أَ حدثان متنافيان

بمعنى أن وقوع أحدهما يمنع وقوع الآخر ، ويكون : ل (أ $\cap$ أَ) = صفر

(٢) $أ \cup أَ =$ ف

أى أن : اتحاد أى حدث مع الحدث المكمل له = فضاء العينة ف

ويكون : ل (أ $\cup$ أَ) = ل (أ) + ل (أَ) = ل (ف) = ١

ومن ذلك يمكن استنتاج أن :

ل (أ) = ١ − ل (أَ) ، ل (أَ) = ١ − ل (أ)

لاحظ أن : ل (ف) $= \frac{ن (ف)}{ن (ف)} = ١$

مثال ١

إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية ما

وكان : ل (أ) $= \frac{١}{٦}$ ، ل (أ $\cap$ ب) $= \frac{١}{١٨}$ ، ل (أ $\cup$ ب) $= \frac{٤}{٩}$

فأوجد : ١ احتمال عدم وقوع الحدث أ ٢ ل (بَ)

الحل

١ احتمال عدم وقوع الحدث أ = ل (أَ)

∵ ل (أ) $= \frac{١}{٦}$ ، ∴ ل (أَ) = ١ − ل (أ) $= ١ - \frac{١}{٦} = \frac{٥}{٦}$

٢ ∵ ل (أ $\cup$ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ $\cap$ ب)

∴ $\frac{٤}{٩} = \frac{١}{٦} +$ ل (ب) $- \frac{١}{١٨}$ ∴ ل (ب) $= \frac{٤}{٩} + \frac{١}{١٨} - \frac{١}{٦} = \frac{٦}{١٨} = \frac{١}{٣}$

، ∵ ل (بَ) = ١ − ل (ب) ∴ ل (بَ) $= ١ - \frac{١}{٣} = \frac{٢}{٣}$

مثال ٢

اشترك ٤٠ تلميذًا فى إحدى المدارس بالأنشطة الرياضية بالمدرسة فإذا اشترك منهم ٢٥ تلميذًا بفريق كرة القدم ، ١٠ تلاميذ بفريق كرة السلة ، ٤ تلاميذ فى الفريقين معًا والباقى فى فرق أخرى واختير تلميذ من هؤلاء التلاميذ عشوائيًا

فأوجد مستعينًا بشكل ڤن احتمال أن يكون التلميذ المختار :

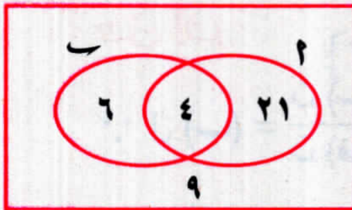
١ مشتركًا فى فريق كرة القدم.

٢ غير مشترك فى فريق كرة القدم.

٣ مشتركًا فى الفريقين معًا.

٤ مشتركًا فى فريق كرة القدم أو السلة.

الحل



بفرض أن :

أ هو حدث أن يكون التلميذ مشتركًا فى كرة القدم

، ب هو حدث أن يكون التلميذ مشتركًا فى كرة السلة

، ف هو فضاء العينة لهذه التجربة

∴ ن (أ) = ٢٥ ، ن (ب) = ١٠ ، ن (ف) = ٤٠

١ احتمال أن يكون التلميذ مشتركًا فى كرة القدم = ل (أ) = $\frac{ن (أ)}{ن (ف)}$ = $\frac{٢٥}{٤٠}$ = $\frac{٥}{٨}$

٢ احتمال أن يكون التلميذ غير مشترك فى كرة القدم = ل (أ̄) = ١ − ل (أ)

= ١ − $\frac{٥}{٨}$ = $\frac{٣}{٨}$

حل آخر :

∵ ن (أ) = ٢٥ ∴ ن (أ̄) = ٤٠ − ٢٥ = ١٥

∴ احتمال أن يكون التلميذ غير مشترك فى كرة القدم = ل (أ̄) = $\frac{ن (أ̄)}{ن (ف)}$

= $\frac{١٥}{٤٠}$ = $\frac{٣}{٨}$

٣ ∵ حدث أن يكون التلميذ مشتركًا فى الفريقين معًا = أ ∩ ب

∴ ن (أ ∩ ب) = عدد التلاميذ المشتركين فى الفريقين معًا = ٤

∴ احتمال أن يكون التلميذ مشتركًا فى الفريقين معًا = ل (أ ∩ ب)

$= \frac{ن (أ \cap ب)}{ن (ف)} = \frac{٤}{٤٠} = \frac{١}{١٠}$

٤ ∵ حدث أن يكون التلميذ مشتركًا فى فريق كرة القدم أو السلة = أ ∪ ب

، ∵ ن (أ ∪ ب) = ٢١ + ٦ + ٤ = ٣١

∴ احتمال أن يكون التلميذ مشتركًا فى فريق كرة القدم أو السلة = ل (أ ∪ ب)

$= \frac{ن (أ \cup ب)}{ن (ف)} = \frac{٣١}{٤٠}$

حل آخر :

∵ ل (ب) $= \frac{ن (ب)}{ن (ف)} = \frac{١٠}{٤٠} = \frac{١}{٤}$

∴ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب) $= \frac{٥}{٨} + \frac{١}{٤} - \frac{١}{١٠} = \frac{٣١}{٤٠}$

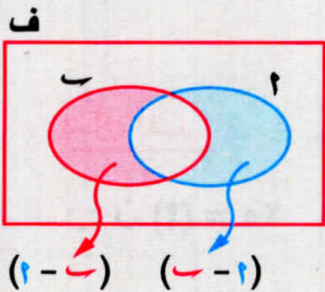
حاول بنفسك ١

إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية ،

وكان : ل (أ) = ٠,٥ ، ل (ب) = ٠,٧ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,١

فأوجد : ١ ل (ب)   ٢ ل (أ ∪ ب)

٤ الفرق بين حدثين :



إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف فإن :

- حدث وقوع أ وعدم وقوع ب (حدث وقوع أ فقط) = أ − ب

  ويكون احتمال وقوع الحدث أ وعدم وقوع الحدث ب = ل (أ − ب)

  $= \frac{ن (أ - ب)}{ن (ف)}$

- حدث وقوع ب وعدم وقوع أ (حدث وقوع ب فقط) = ب − أ

  ويكون احتمال وقوع الحدث ب وعدم وقوع الحدث أ = ل (ب − أ) $= \frac{ن (ب - أ)}{ن (ف)}$

مثال ٣

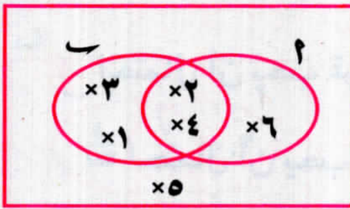
فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى إذا كان أ هو حدث الحصول على عدد زوجى ، ب هو حدث الحصول على عدد أقل من ٥

فأوجد مستعينًا بشكل ڤن :

١ احتمال وقوع الحدث أ فقط.

٢ احتمال وقوع الحدث ب فقط.

الحل



∵ ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}   ∴ ن (ف) = ٦

، ∵ أ = {٢ ، ٤ ، ٦}   ،   ب = {٤ ، ٣ ، ٢ ، ١}

١ حدث وقوع الحدث أ فقط = حدث وقوع أ وعدم وقوع ب = أ − ب = {٦}

∴ ن (أ − ب) = ١

∴ احتمال وقوع الحدث أ فقط = ل (أ − ب) = $\frac{\text{ن (أ − ب)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\frac{١}{٦}$

٢ حدث وقوع الحدث ب فقط = حدث وقوع ب وعدم وقوع أ = ب − أ = {٣ ، ١}

∴ ن (ب − أ) = ٢

∴ احتمال وقوع ب فقط = ل (ب − أ) = $\frac{\text{ن (ب − أ)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\frac{٢}{٦}$ = $\frac{١}{٣}$

مثال ٤

فصل دراسى به ٤٥ تلميذًا منهم ٢٠ تلميذًا يحبون قراءة الروايات البوليسية ، ١٥ يحبون قراءة الروايات الرومانسية ، ٥ يحبون قراءة الاثنين معًا فإذا اختير تلميذ عشوائيًا من الفصل

احسب احتمال أن يكون التلميذ المختار :

١ يحب قراءة الروايات البوليسية.

٢ يحب قراءة الروايات البوليسية فقط.

٣ لا يحب قراءة الروايات البوليسية.

٤ يحب قراءة الاثنين معًا.

الحـــل

بفرض أن : أ هو حدث أن يحب قراءة الروايات البوليسية

، ب هو حدث أن يحب قراءة الروايات الرومانسية

، ف هو فضاء العينة لهذه التجربة.

∴ ن (أ) = ٢٠ ، ن (ب) = ١٥ ، ن (ف) = ٤٥

١ احتمال أن يحب قراءة الروايات البوليسية = ل (أ) = $\frac{\text{ن (أ)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\frac{٢٠}{٤٥}$ = $\frac{٤}{٩}$

٢ احتمال أن يحب قراءة الروايات البوليسية فقط

= احتمال أن يحب قراءة الروايات البوليسية دون غيرها = ل (أ - ب)

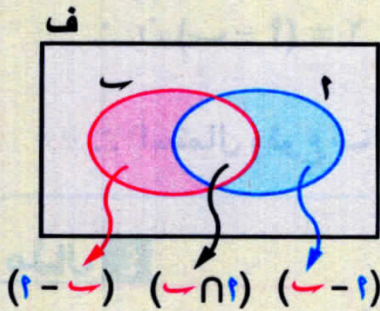
= $\frac{\text{ن (أ - ب)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\frac{١٥}{٤٥}$ = $\frac{١}{٣}$

٣ احتمال أن لا يحب قراءة الروايات البوليسية = ل (أَ) = ١ - ل (أ) = ١ - $\frac{٤}{٩}$ = $\frac{٥}{٩}$

٤ احتمال أن يحب قراءة الاثنين معًا = ل (أ ∩ ب) = $\frac{\text{ن (أ ∩ ب)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\frac{٥}{٤٥}$ = $\frac{١}{٩}$

ملاحظات

إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف فإن :



• (أ - ب) ∪ (أ ∩ ب) = أ

أى أن : ل (أ - ب) + ل (أ ∩ ب) = ل (أ)

ومنها : ل (أ - ب) = ل (أ) - ل (أ ∩ ب)

وكذلك :

• (ب - أ) ∪ (أ ∩ ب) = ب

أى أن : ل (ب - أ) + ل (أ ∩ ب) = ل (ب)

ومنها : ل (ب - أ) = ل (ب) - ل (أ ∩ ب)

مثال ٥

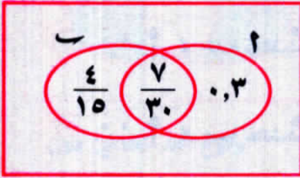
إذا كان : أ ، ب حدثين من أحداث تجربة عشوائية حيث :

ل (أ − ب) = ٠,٣ ، ل (ب − أ) = $\frac{٤}{١٥}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{٧}{٣٠}$

فأوجد احتمال :

١ حدث عدم وقوع أ   ٢ حدث وقوع أ أو ب أو كلاهما .

الحل



١ ∵ ل (أ − ب) = ٠,٣ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{٧}{٣٠}$

∴ ل (أ) = ل (أ − ب) + ل (أ ∩ ب) = ٠,٣ + $\frac{٧}{٣٠}$ = $\frac{١٦}{٣٠}$ = $\frac{٨}{١٥}$

∴ احتمال عدم وقوع أ = ل (أَ) = ١ − ل (أ) = ١ − $\frac{٨}{١٥}$ = $\frac{٧}{١٥}$

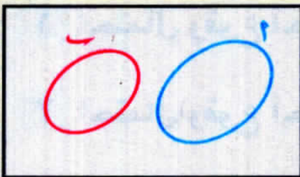
٢ ∵ ل (ب) = ل (ب − أ) + ل (أ ∩ ب) = $\frac{٤}{١٥}$ + $\frac{٧}{٣٠}$ = $\frac{١}{٢}$

∴ احتمال حدث وقوع أ أو ب أو كلاهما = ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

= $\frac{٨}{١٥}$ + $\frac{١}{٢}$ − $\frac{٧}{٣٠}$ = $\frac{٤}{٥}$

ملاحظات

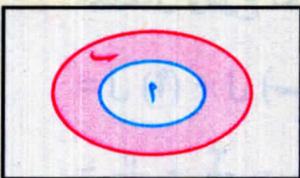
١ إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة ف فإن :



• أ − ب = أ   أى أن : ل (أ − ب) = ل (أ)

• ب − أ = ب   أى أن : ل (ب − أ) = ل (ب)

٢ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف وكان أ ⊂ ب فإن :



أ − ب = ∅

أى أن : ل (أ − ب) = ل (∅) = $\frac{ن (∅)}{ن (ف)}$ = صفر

مثال ٦

إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان :

ل (أ − ب) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٣}{٥}$ فأوجد :

١ ل (أ) ٢ ل (بَ)

٣ احتمال عدم وقوع الحدثين أ ، ب معًا.

الحل

١ ∵ أ ، ب حدثان متنافيان ∴ ل (أ − ب) = ل (أ) = $\frac{١}{٢}$

٢ ∵ أ ، ب حدثان متنافيان ∴ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب)

∴ $\frac{٣}{٥}$ = $\frac{١}{٢}$ + ل (ب) ∴ ل (ب) = $\frac{٣}{٥}$ − $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{١٠}$

∴ ل (بَ) = ١ − ل (ب) = ١ − $\frac{١}{١٠}$ = $\frac{٩}{١٠}$

٣ ∵ أ ، ب حدثان متنافيان ∴ ل (أ ∩ ب) = صفر

∴ احتمال عدم وقوع الحدثين أ ، ب معًا = ل (أ ∩ ب)َ = ١ − ل (أ ∩ ب) = ١ − ٠ = ١

مثال ٧

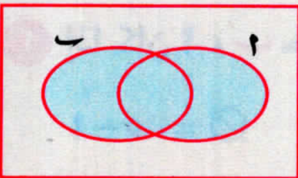
إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية ما ، وكان :

ل (أ) = $\frac{٥}{٩}$ ، ل (ب) = $\frac{٢}{٩}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٩}$ فأوجد :

١ احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل. ٢ احتمال عدم وقوع أى من الحدثين.

٣ احتمال وقوع أحد الحدثين دون وقوع الآخر.

الحل



وقوع أحد الحدثين على الأقل

١ احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل = ل (أ ∪ ب)

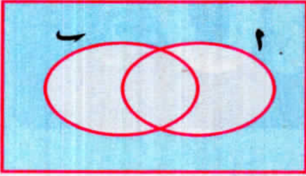
= ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

= $\frac{٥}{٩}$ + $\frac{٢}{٩}$ − $\frac{١}{٩}$ = $\frac{٢}{٣}$

٢ احتمال عدم وقوع أى من الحدثين

$= ل\ (\bar{أ \cup ب}) = ١ - ل\ (أ \cup ب)$

$= ١ - \frac{٢}{٣} = \frac{١}{٣}$



عدم وقوع أى من الحدثين

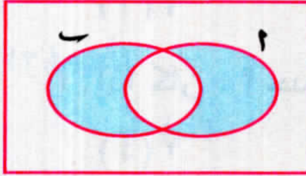
٣ احتمال وقوع أحد الحدثين دون وقوع الآخر

$= ل\ (أ - ب) + ل\ (ب - أ)$

، $\because$ ل (أ − ب) = ل (أ) − ل (أ ∩ ب) = $\frac{٥}{٩} - \frac{١}{٩} = \frac{٤}{٩}$

، ل (ب − أ) = ل (ب) − ل (أ ∩ ب) = $\frac{٢}{٩} - \frac{١}{٩} = \frac{١}{٩}$

$\therefore$ احتمال وقوع أحد الحدثين دون وقوع الآخر = $\frac{٤}{٩} + \frac{١}{٩} = \frac{٥}{٩}$



وقوع أحد الحدثين دون وقوع الآخر

حاول بنفسك ٢

فصل دراسى به ٤٠ طالبًا نجح منهم ٣٠ طالبًا فى الرياضيات ، ٢٤ طالبًا فى العلوم ، ٢٠ طالبًا فى الامتحانين فإذا اختير طالب عشوائيًا ، أوجد احتمال أن يكون الطالب المختار :

١ ناجحًا فى الرياضيات.

٢ ناجحًا فى العلوم فقط.

٣ ناجحًا فى أحد الامتحانين على الأقل.

تمارين 10

على الحدث المكمل والفرق بين حدثين



● تذكر ● فهم ● تطبيق ● حل مشكلات | أسئلة كتاب الوزارة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان : أ ، ب حدثين من ف فإن حدث وقوع أ فقط هو .... (المنيا ١٥)

(أ) أَ (ب) أ − ب (جـ) أ ∩ ب (د) أ ∪ ب

٢ إذا كان : أ حدثًا من فضاء العينة لتجربة عشوائية فإن : ل (أَ) = ... (الدقهلية ١٧)

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ١ − ل (أ) (د) ل (أ) − ١

٣ إذا كان : أ ⊂ ف لتجربة عشوائية وكان : ل (أ) = $\frac{١}{٣}$ فإن : ل (أَ) = ... (القليوبية ٢٢)

(أ) $\frac{-١}{٣}$ (ب) صفر (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

٤ إذا كان : ف فضاء العينة لتجربة عشوائية ما فإن : ل (فَ) = ... (دمياط ١٨)

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) −١

٥ إذا كان : أَ هو الحدث المكمل للحدث أ فإن : أَ ∪ أ = ... (بورسعيد ٢٥ ، الفيوم ٢٤ ، الإسماعيلية ١٦)

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) ∅ (د) ف

٦ إذا كان : أ حدثًا من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية فإن : أ ∩ أَ = ...

(أ) أ (ب) أَ (جـ) ∅ (د) ١

٧ إذا كان : أ ⊂ ف ، أَ هو الحدث المكمل للحدث أ فإن : ل (أ ∪ أَ) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ف (د) ∅

٨ إذا كان : س ⊂ ف ، سَ هو الحدث المكمل للحدث س

فإن : ل (س ∩ سَ) = ... (أسيوط ١٩)

(أ) صفر (ب) ف (جـ) ∅ (د) ١

٩ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة ف حيث أ ⊂ ب

فإن : ل (أ − ب) = ... (الشرقية ٢٥ ، الجيزة ٢٤ ، الشرقية ٢٣)

(أ) ل (ب) (ب) صفر (جـ) ل (أ) (د) ١

١٠ إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة ف

فإن : ل (أ − ب) = ... (بني سويف ٢٣ ، الفيوم ١٩)

(أ) ل (أ) (ب) ل (ب) (جـ) ل (أَ) (د) ل (بَ)

١١ إذا كان : أ حدثًا من فضاء عينة ف لتجربة عشوائية وكان : ل (أ) = ل (أَ)

فإن : ل (أ) = ... (المنوفية ٢٣)

(أ) ١ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٣}$

١٢ إذا كان : أ ⊂ ف لتجربة عشوائية ما ، وكان : ل (أ) + ل (أَ) = ٢ ك

فإن : ك = ... (أسيوط ٢٣)

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{١}{٤}$

١٣ إذا كان احتمال نجاحك فى امتحان الشهادة الإعدادية ٨٥ ٪ فإن احتمال رسوبك

يساوى .... (الإسماعيلية ٢٤ ، الإسماعيلية ٢٣)

(أ) $\frac{٣}{٢٠٠}$ (ب) $\frac{٣}{٢٠}$ (جـ) $\frac{١٧}{٢٠}$ (د) ٠,٨٥

١٤ إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة لتجربة عشوائية

فإن : ل (أ ∩ ب)َ = ... (قنا ٢٣)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٠,٥ (د) ∅

١٥ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية ، وكان : ل (أ) = ٠,٧

، ل (أ ∩ ب) = ٠,٣ فإن : ل (أ − ب) = ... (سوهاج ٢٤)

(أ) ٠,٤ (ب) صفر (جـ) ٠,٣ (د) ٠,٢

١٦ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان :

ل (أ) = ٠,٧ ، ل (أ − ب) = ٠,٥ فإن : ل (أ ∩ ب) = ... (الغربية ١٦)

(أ) ٠,٦ (ب) ٠,٤ (جـ) ٠,٣ (د) ٠,٢

١٧ إذا كان : ل (أ) = ٤ ل (أَ) فإن : ل (أ) = ... (كفر الشيخ ٢٤ ، الغربية ١٨)

(أ) ٠,٨ (ب) ٠,٦ (جـ) ٠,٤ (د) ٠,٢

١٨ إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين فى تجربة عشوائية وكان : ل (أ) = ٠,٣ ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٦

فإن : ل (بَ) = ... (الشرقية ٢٤)

(أ) ٠,٣ (ب) ٠,٦ (جـ) ٠,٧ (د) ٠,٩

١٩ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف وكان : أ ⊂ ب ، ل (أ) = ٠,٢ ، ل (ب) = ٠,٦ فإن : ل (ب − أ) = ... (الأقصر ١٩)

(أ) ٠,٦ (ب) ٠,٢ (جـ) ٠,٨ (د) ٠,٤

٢٠ لأى حدثين حـ ، ء فى تجربة عشوائية يكون : (حـ − ء) ∪ (حـ ∩ ء) = ... (الدقهلية ١٤)

(أ) ١ (ب) ف (جـ) ء (د) حـ

٢١ إذا كان : ل (أ − ب) = ٠,٤ ، ل (ب) = ٠,٣ فإن : ل (أ ∪ ب) = ...

(أ) ٠,١ (ب) ٠,٧ (جـ) ٠,٢ (د) ١

٢٢ إذا كان : ل (أ) = ٢ ك ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٢}$ ك ، ل (أ − ب) = ٠,٣ فإن قيمة ك = ...

(أ) ٠,٢ (ب) ٠,١ (جـ) ٠,٣ (د) ٠,٥

---

٢ إذا كان ف فضاء العينة لتجربة عشوائية ، أ ⊂ ف ، أَ هو الحدث المكمل للحدث أ ،

ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} أكمل الجدول التالى وسجل ملاحظاتك :

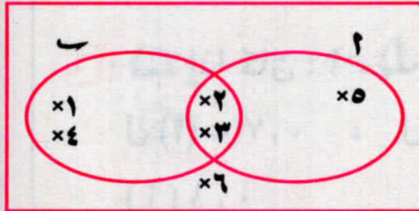
الحدث أ	الحدث أَ	ل (أ)	ل (أَ)	ل (أ) + ل (أَ)
{٢ ، ٤ ، ٦}	....	....	....	....
....	{٣ ، ٦}	....	....	....
{٥}	....	....	....	....
{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}	....	....	....	....

---

٣ فى الشكل المقابل :

إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة ف

لتجربة عشوائية فأوجد :



١ ل (أ ∩ ب) **٢** ل (أ − ب)

٣ احتمال عدم وقوع الحدث أ (القليوبية ٢٤ ، القاهرة ١٧) «$\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٦}$ ، $\frac{١}{٢}$»

---

٤ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة ف وكان :

ل (أ) = $\frac{١}{٥}$ ، ل (ب) = $\frac{٣}{٥}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{١٠}$ أوجد :

١ ل (أَ) + ل (بَ) **٢** ل (أ ∪ ب) **٣** ل (أ − ب)

٤ ل (ب − أ) **٥** ل (ف − ب)

«$\frac{٦}{٥}$ ، $\frac{٧}{١٠}$ ، $\frac{١}{١٠}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٢}{٥}$»

5 إذا كان : س ، ص حدثين من فضاء عينة ف ، وكان :

ل (س) = ٠,٣٥ ، ل (ص) = ٠,٤٨ ، ل (س ∪ ص) = ٠,٦ فأوجد :

1 ل (سَ) ، ل (صَ) 2 ل (س ∩ ص) 3 ل (س – ص)

4 ل (س ∩ ص)َ «٠,٦٥ ، ٠,٥٢ ، ٠,٢٣ ، ٠,١٢ ، ٠,٧٧»

---

6 إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان :

ل (ب) = $\frac{1}{3}$ ، ل (أ – ب) = $\frac{1}{4}$ أوجد قيمة ل (أ) إذا كان :

1 ل (أ ∩ ب) = $\frac{1}{12}$ 2 أ ، ب حدثين متنافيين. 3 ب ⊂ أ « $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{7}{12}$ »

---

7 إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان : (الفيوم ١٩)

ل (أ) = ل (أَ) ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{1}{16}$ ، ل (ب) = $\frac{5}{8}$ ل (أ) أوجد :

1 ل (ب) 2 ل (أ ∪ ب) 3 ل (أ – ب) « $\frac{5}{16}$ ، $\frac{3}{4}$ ، $\frac{7}{16}$ »

---

8 كيس به ١٢ كرة متماثلة مرقمة من ١ إلى ١٢ ، سحبت منه كرة عشوائيًا. فإذا كان أ هو حدث الحصول على عدد فردى ، ب هو حدث الحصول على عدد أولى فأوجد :

1 ل (أ) ، ل (ب) ، ل (أَ) 2 ل (أ ∪ ب) ، ل (أ – ب) « $\frac{1}{2}$ ، $\frac{5}{12}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{7}{12}$ ، $\frac{1}{6}$ »

---

9 صندوق به ٢٠ كرة لها نفس الشكل والحجم والوزن ، ومخلوطة جيدًا ، منها ٨ كرات حمراء ، ٧ كرات بيضاء ، وباقى الكرات خضراء. سحبت كرة واحدة عشوائيًا.

أوجد احتمال أن تكون الكرة المسحوبة :

1 حمراء. 2 بيضاء أو خضراء. 3 ليست بيضاء. « $\frac{2}{5}$ ، $\frac{3}{5}$ ، $\frac{13}{20}$ »

---

10 إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما ، وكان :

ل (أ) = ٠,٦ ، ل (ب) = ٠,٥ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٣ فأوجد :

1 احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل.

2 ل (ب – أ)

3 ل (أَ) (سوهاج ٢٥) «٠,٨ ، ٠,٢ ، ٠,٤»

١١ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان :

ل (أ) = ٠,٨ ، ل (ب) = ٠,٧ ، ل (أ ⋂ ب) = ٠,٦ فأوجد :

١ احتمال عدم وقوع الحدثين أ ، ب معًا.

٢ احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل. «٠,٤ ، ٠,٩»

---

١٢ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان :

ل (أ) = ٠,٥ ، ل (ب) = ٠,٦ ، ل (أ ⋂ ب) = ٠,٤ أوجد :

١ احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل.

٢ احتمال وقوع الحدث ب وعدم وقوع الحدث أ

٣ احتمال عدم وقوع الحدث أ

٤ احتمال عدم وقوع أى من الحدثين.

٥ احتمال وقوع أحد الحدثين دون الآخر.

٦ احتمال وقوع الحدث أ فقط.

«٠,٧ ، ٠,٢ ، ٠,٥ ، ٠,٣ ، ٠,٣ ، ٠,١»

---

١٣ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية

، وكان احتمال عدم وقوع الحدث أ = $\frac{١}{٤}$ ، احتمال عدم وقوع الحدث ب = $\frac{١}{٢}$

، واحتمال وقوع أحدهما على الأكثر = $\frac{٣}{٥}$ أوجد كلًا مما يأتى :

١ احتمال وقوع الحدث أ

٢ احتمال وقوع الحدثين معًا.

٣ احتمال وقوع أى من الحدثين.

٤ احتمال وقوع الحدث أ فقط.

٥ احتمال وقوع أحد الحدثين فقط.

«$\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٢}{٥}$ ، $\frac{١٧}{٢٠}$ ، $\frac{٧}{٢٠}$ ، $\frac{٩}{٢٠}$»

---

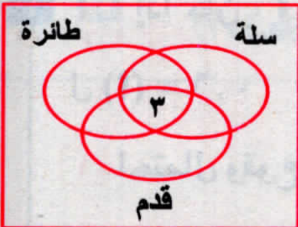
١٤ فصل به ٣٢ طالبًا ، يلعب كرة القدم ٢٢ طالبًا

، يلعب كرة السلة ١٠ طلاب ، ويلعب الكرة الطائرة ١٢ طالبًا

، فإذا كان من هؤلاء اللاعبين ٣ طلاب يلعبون الثلاث ألعاب

، ٥ يلعبون كرتى القدم والسلة

، ٨ يلعبون كرتى القدم والطائرة ، ٦ يلعبون السلة والطائرة.



أكمل شكل ڤن ثم أجب :

١ كم طالبًا يلعبون كرتى القدم والسلة فقط معًا ؟

٢ كم طالبًا لا يلعبون أيًا من هذه الألعاب ؟

٣ إذا اختير طالب من الفصل بطريقة عشوائية، فما احتمال أن يكون من لاعبى كرة القدم فقط ؟

« ٢ ، ٤ ، $\frac{٣}{٨}$ »

---

١٥ فصل دراسى به ٤٠ تلميذًا منهم ١٨ تلميذًا يقرأون جريدة الأخبار ، ١٥ تلميذًا يقرأون جريدة الأهرام ، ٨ تلاميذ يقرأون الجريدتين معًا. فإذا اختير تلميذ عشوائيًا من هذا الفصل ، **احسب احتمال أن يكون هذا التلميذ :**

١ يقرأ جريدة الأخبار.
٢ لا يقرأ جريدة الأخبار.
٣ يقرأ جريدة الأهرام.
٤ يقرأ الجريدتين معًا.
٥ يقرأ جريدة الأخبار فقط.
٦ يقرأ جريدة الأهرام فقط.
٧ يقرأ جريدة الأخبار فقط أو الأهرام فقط.

« $\frac{٩}{٢٠}$ ، $\frac{١١}{٢٠}$ ، $\frac{٣}{٨}$ ، $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{٧}{٤٠}$ ، $\frac{١٧}{٤٠}$ »

---

١٦ اشترك ٤٥ تلميذًا فى إحدى المدارس فى الأنشطة الرياضية منهم ٢٧ تلميذًا فى فريق كرة القدم، ١٥ تلميذًا فى فريق كرة السلة، ٩ تلاميذ فى كرة القدم وكرة السلة، اختير تلميذ من هذه المدرسة عشوائيًا. **مثّل ذلك بشكل ڤن ، ثم أوجد احتمال أن يكون التلميذ المختار :**

١ مشتركًا فى فريق كرة القدم.
٢ مشتركًا فى فريق كرة السلة.
٣ مشتركًا فى فريق كرة القدم وفريق كرة السلة.
٤ غير مشترك فى أى من الفريقين السابقين.

« $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{٤}{١٥}$ »

---

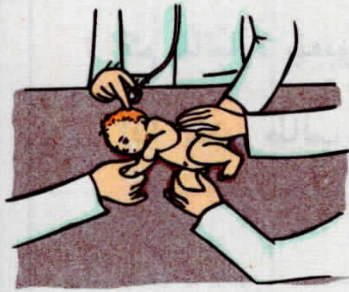
١٧ عدد النواتج الممكنة لتجربة عشوائية جميع نواتجها متساوية الإمكانات هو ٣٠ ناتجًا. فإذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة لهذه التجربة، وكان عدد النواتج التى تؤدى إلى وقوع الحدث ب يساوى ١٢ ناتجًا ، وكان : ل (أ ∪ ب) = $\frac{١٣}{١٥}$ ، ل (أ) = ٠,٦ **فأوجد :**

١ احتمال وقوع الحدثين معًا.
٢ احتمال وقوع أحد الحدثين دون الآخر.

« $\frac{٢}{١٥}$ ، $\frac{١١}{١٥}$ »



للمتفوقين



١ في إحدى الدراسات التى اشتملت على اختيار ٦٠٠٠ حالة ولادة فى إحدى المحافظات اختيرت عشوائيًا ، اهتم الباحثون ببحث العلاقة بين عمر الأم عند الإنجاب ، ومكان إقامتها ، وكان أعداد المواليد فى الحضر والريف كما هو مدون فى الجدول التالى :

عمر الأم	مكان إقامة الأم	
	الحضر	الريف
أقل من ٢٠ عامًا	١٢٠	٢٤٠
من ٢٠ عامًا إلى أقل من ٢٢ عامًا	٢٤٠	٣٦٠
من ٢٢ عامًا إلى أقل من ٣٠ عامًا	١٧٤٠	١٤٤٠
٣٠ عامًا فأكثر	١٥٠٠	٣٦٠

١ إذا كان الحدث أ يعبر عن الأم التى أنجبت وتقيم فى الحضر ، الحدث ب يعبر عن الأم التى أنجبت لا يزيد عمرها عن ٢٢ عامًا. **أوجد :**

(١) ل (أ) (٢) ل (ب)

« $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٤}{٢٥}$ »

٢ مثّل المجموعتين أ ، ب بشكل ڤن ثم أوجد كلًا من :

(١) ل (أ ∩ ب) (٢) ل (أ ∪ ب)

(٣) ل (أ − ب) (٤) ل (أ ∪ ب)َ

« $\frac{٣}{٥٠}$ ، $\frac{٧}{١٠}$ ، $\frac{٢٧}{٥٠}$ ، $\frac{٣}{١٠}$ »

٣ تنبأ بعدد المواليد إذا كانت الأم تقيم فى الحضر، وعمرها ٣٠ عامًا فأكثر، علمًا بأن عدد حالات الولادة ٩٠٠٠ حالة فى المحافظة.

« ٢٢٥٠ حالة »

---

٢ مزرعة تحتوى على بقر من اللونين الأبيض والبنى ، فإذا كان احتمال أن تكون البقرة بها أبيض = $\frac{٥}{٧}$ ، واحتمال أن تكون البقرة بها بنى = $\frac{١١}{٢٨}$ ، **فأوجد احتمال كل مما يأتى :**

١ أن تكون البقرة خليط من اللونين.

٢ أن تكون البقرة بيضاء فقط.

« $\frac{٣}{٢٨}$ ، $\frac{١٧}{٢٨}$ »

● تذكر ● فهم ● تطبيق ● حل مشكلات



اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ مجموع جميع الأعداد الحقيقية فى الفترة]−٢ ، ٢] يساوى .... (قنا ٢٤)

(أ) ٢ (ب) −٢ (ج) صفر (د) لا يمكن جمعها

٢ $\sqrt[3]{أ} + \sqrt[3]{-أ} =$ .... (الإسماعيلية ١٦)

(أ) $\sqrt[3]{-أ^{٢}}$ (ب) $٢\sqrt[3]{أ}$ (ج) −١ (د) صفر

٣ إذا كان : $٢^{٧} \times ٣^{٧} = ٦^{ك}$ فإن : ك = ... (الفيوم ١٩ ، القليوبية ١٧ ، الشرقية ١٦)

(أ) ١٤ (ب) ٧ (ج) ٦ (د) ٥

٤ إذا كان : $٢^{٥} \times ٣^{٥} = م \times ٦^{٤}$ فإن : م = ... (الشرقية ١٧)

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٦

٥ مجموعة حل المتباينة : س ≤ ١ فى ط هى .... (الإسماعيلية ٢٤)

(أ)]٠ ، ١[(ب) [٠ ، ١] (ج) {١} (د) {٠ ، ١}

٦ [٢ ، ٥] هى مجموعة حل المتباينة .... فى ح (المنوفية ٢٤)

(أ) $١ \le س - ١ < ٤$ (ب) $١ < س - ١ \le ٤$

(ج) $١ \le س - ١ \le ٤$ (د) $١ < س - ١ < ٤$

٧ إذا كان : $\frac{١}{٥}$ س = $\frac{١}{١٠}$ فإن : ٢ س = ... (الوادى الجديد ١٧)

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٥٠

٨ إذا كانت : س عددًا سالبًا فإن العدد الأكبر فى الأعداد التالية هو .... (الدقهلية ٢٤ ، البحيرة ٢٣ ، المنوفية ١٨ ، الجيزة ١٧ ، القليوبية ١٧)

(أ) ٥ − س (ب) ٥ + س (جـ) $\frac{٥}{س}$ (د) ٥ س

٩ إذا كان : $\sqrt{٦٤ + ٣٦}$ = ٨ + س فإن : س = ... (المنوفية ١٨ ، أسوان ١٧)

(أ) ٩ (ب) ٦ (جـ) ٢ (د) ١٠

١٠ إذا كان : (٥ ، س − ٤) = (ص + ٢ ، ٣)

فإن : س + ص = ... (الأقصر ١٧)

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (د) ١٢

١١ إذا كان : س هو العنصر المحايد الجمعى ، ص هو العنصر المحايد الضربى

فإن : $٢^{س} + ٣^{ص}$ = ... (الإسماعيلية ١٩)

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

١٢ المعكوس الضربى للعدد $\frac{\sqrt{٢}}{٣}$ هو .... (ش. سيناء ١٧ ، المنيا ١٦)

(أ) $\frac{-\sqrt{٢}}{٣}$ (ب) $\frac{٣\sqrt{٢}}{٢}$ (جـ) $\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$ (د) $\frac{\sqrt{٢}}{٣}$

١٣ $(س - ٥)^{صفر}$ = ١ لكل س ∋ .... (سوهاج ١٦)

(أ) ع (ب) ع − {٥} (جـ) ع − {−٥} (د) ع − {١}

١٤ إذا كان : أ ب = ٢ ، $أ ب^{٢}$ = ١٨ فإن : ب = ... (المنوفية ٢٤)

(أ) −٣ (ب) ± ٣ (جـ) ٣ (د) ٩

١٥ إذا كانت : ٢ س ص = ٦ ، $س^{٢}$ ص + س $ص^{٢}$ = ٦

فإن : س + ص = ... (سوهاج ١٦)

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٦ (د) $\frac{١}{٢}$

١٦ إذا كان : $ص^{-٣}$ = ٨ فإن : ص = ... (الإسماعيلية ٢٣ ، الإسكندرية ١٦)

(أ) $\frac{١}{٥١٢}$ (ب) $\frac{١}{٨}$ (جـ) ٢ (د) $\frac{١}{٢}$

١٧ المنحنى ص = أ $س^{٢}$ + ب س + حـ يقطع محور الصادات فى النقطة .... (الجيزة ٢٥)

(أ) (٠ ، ب) (ب) (٠ ، حـ) (جـ) (ب ، ٠) (د) (حـ ، ٠)

18 إذا كان : $س^٢ + ص^٢ = ٥ س ص$ فإن : $\frac{س}{ص} + \frac{ص}{س} = $ .... (الدقهلية ٢٣)

(أ) ٥ (ب) –٥ (جـ) $\sqrt{٥}$ (د) $-\sqrt{٥}$

19 المعكوس الجمعى للعدد $(١ - \sqrt{٢})$ هو .... (الإسماعيلية ١٦)

(أ) $١ + \sqrt{٢}$ (ب) $-١ - \sqrt{٢}$ (جـ) $\sqrt{٢} - ١$ (د) $\sqrt{٢}$

20 الوسط الحسابى للقيم : ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٧ ، ٩ هو .... (الفيوم ١٦)

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٨

21 إذا كانت د دالة من المجموعة س إلى المجموعة ص

فإن مجال الدالة د هو .... (بنى سويف ١٦)

(أ) س (ب) ص (جـ) س × ص (د) ص × س

22 إذا كان : $أ^٢ - ب^٢ = أ + ب$ فإن : ب – أ = ... حيث : $أ + ب \neq ٠$ (الغربية ١٨)

(أ) ٢ (ب) –٢ (جـ) ١ (د) –١

23 إذا كان : س = ٢ ، ص = ٣ فإن : $(ص - ٢ س)^{١٠} = $ .... (دمياط ١٩ ، الإسكندرية ١٧ ، الأقصر ١٦)

(أ) ١ (ب) –١ (جـ) ٥ (د) ١٠

24 إذا كان : س + ٣ ص = ٧ فإن : س + ٣ (ص + ٥) = ... (المنوفية ٢٥ ، الإسماعيلية ٢٣)

(أ) ٢٢ (ب) ٢١ (جـ) ٧ (د) ٣

25 $٤^{١٥} + ٤^{١٥} = $ .... (المنوفية ١٩)

(أ) $٤^{٣٠}$ (ب) $٤^{صفر}$ (جـ) $٨^{١٥}$ (د) $٢^{٣١}$

26 القاعدة التى تصف النمط $(\frac{١}{٢} ، \frac{٢}{٣} ، \frac{٣}{٤} ، \frac{٤}{٥} ، ...)$ بدلالة ن حيث $ن \in ص_+$

هى .... (الفيوم ١٩)

(أ) $\frac{٢}{ن + ١}$ (ب) $ن + \frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{ن}{ن + ١}$ (د) $\frac{٢ ن - ١}{ن + ١}$

27 إذا كان : س ص = ٤ ، س ع = ٤ ، $\frac{١}{ص ع} = ٤$ حيث س ، ص ، ع $\in ح^+$

فإن : س = ... (أسيوط ٢٤)

(أ) –٨ (ب) ٨ (جـ) ± ٨ (د) ٦٤

28 إذا كان : أ ب = ١ ، ب حـ = ٤ ، أ حـ = ٩ ، أ ، ب ، حـ $\in ح^+$

فإن : أ ب حـ = ... (القليوبية ٢٤)

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

ثانيًا الهندسة



الوحدة الرابعة

الدائرة

الدرس الأول :

تعاريف ومفاهيم أساسية على الدائرة.

الدرس الثانى :

موضع نقطة ومستقيم بالنسبة لدائرة.

الدرس الثالث :

موضع دائرة بالنسبة لدائرة أخرى.

الدرس الرابع :

تعيين الدائرة.

الدرس الخامس :

علاقة أوتار الدائرة بمركزها.

أهداف الوحدة: بعد دراسة هذه الوحدة يجب أن يكون التلميذ قادرًا على أن :

- يتعرف الدائرة ومفاهيم أساسية عليها (نصف القطر - القطر - الوتر).
- يحسب محيط الدائرة ومساحتها.
- يتعرف محور تماثل الدائرة وبعض النتائج الخاصة به.
- يحدد موضع نقطة بالنسبة لدائرة.
- يحدد موضع مستقيم بالنسبة لدائرة.
- يحدد موضع دائرة بالنسبة لدائرة أخرى.
- يحدد العلاقة بين المماس لدائرة ونصف قطر الدائرة المرسوم من نقطة التماس.
- يحدد العلاقة بين خط المركزين لدائرتين متماستين ، والمماس المشترك عند نقطة التماس.
- يحدد العلاقة بين خط المركزين لدائرتين متقاطعتين ، والوتر المشترك للدائرتين.
- يرسم دائرة بمعلومية مركزها ، وطول نصف قطرها.
- يرسم دائرة تمر بنقطة معلومة.
- يرسم دائرة تمر بنقطتين معلومتين.
- يرسم دائرة تمر بثلاث نقط معلومة ليست على استقامة واحدة.
- يتعرف الدائرة الخارجة لمثلث ويعين موقع مركزها بالنسبة للمثلث.
- يحدد العلاقة بين أوتار الدائرة ومركزها.



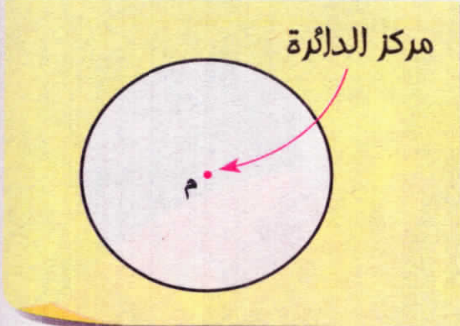
الدرس 1

تعاريف ومفاهيم أساسية على الدائرة



الدائـــرة

الدائرة هى مجموعة نقط المستوى التى تبعد بُعدًا ثابتًا عن نقطة ثابتة فى المستوى.



- تُسمى هذه النقطة الثابتة «مركز الدائرة»

  ويُسمى البُعد الثابت «طول نصف قطر الدائرة»

- نرمز للدائرة عادة بمركزها

  فنقول الدائرة م لنعنى الدائرة التى مركزها النقطة م

تجزئة المستوى بالدائرة

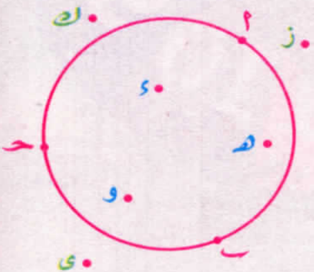
أى دائرة تجزئ المستوى إلى ثلاث مجموعات من النقط ، هى :

١ مجموعة نقط الدائرة.

٢ مجموعة النقط داخل الدائرة.

٣ مجموعة النقط خارج الدائرة.

فمثلًا : الدائرة المرسومة فى الشكل المقابل تقسم المستوى إلى :



١ مجموعة نقط الدائرة «على الدائرة» مثل : أ ، ب ، حـ ، ...

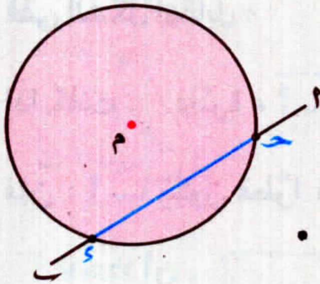
٢ مجموعة النقط التى تقع داخل الدائرة مثل : ء ، هـ ، و ، ...

٣ مجموعة النقط التى تقع خارج الدائرة مثل : ز ، ل ، ى ، ...

سطح الدائرة هو : مجموعة نقط الدائرة $\cup$ مجموعة النقط داخل الدائرة.

وعلى هذا فإن سطح الدائرة يختلف عن الدائرة.

فمثلاً فى الشكل المقابل :



- $\overleftrightarrow{أب}$ $\cap$ الدائرة = {حـ ، ء}

بينما $\overleftrightarrow{أب}$ $\cap$ سطح الدائرة = $\overline{حـ ء}$

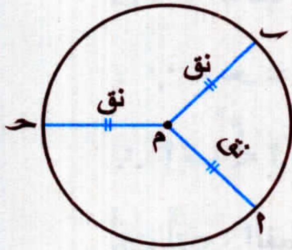
- مركز الدائرة م $\not\in$ الدائرة

بينما مركز الدائرة م $\in$ سطح الدائرة.

نصف قطر الدائرة

نصف قطر الدائرة هو قطعة مستقيمة طرفاها (نهايتاها) مركز الدائرة وأى نقطة على هذه الدائرة.

ففى الشكل المقابل :



إذا كانت : النقط أ ، ب ، حـ تنتمى إلى الدائرة م

فإن : $\overline{مأ}$ ، $\overline{مب}$ ، $\overline{محـ}$ تُسمى أنصاف أقطار للدائرة م

ويكون : م أ = م ب = م حـ = نق «حيث نق طول نصف القطر»

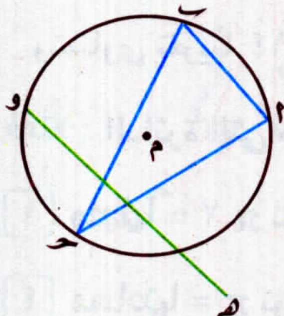
لاحظ أن :

1. للدائرة الواحدة عدد لا نهائى من أنصاف الأقطار وجميعها متساوية فى الطول.
2. إذا تساوى طولا نصفى قطرين فى دائرتين تكونان متطابقتين ، والعكس صحيح.

وتر الدائرة

وتر الدائرة هو قطعة مستقيمة طرفاها (نهايتاها) أى نقطتين على الدائرة.

ففى الشكل المقابل :



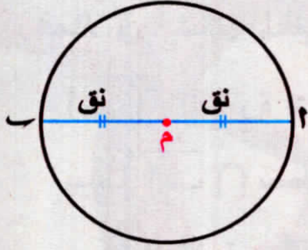
إذا كانت : النقط أ ، ب ، حـ تنتمى للدائرة م

فإن : كلاً من $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ ، $\overline{بحـ}$ وتر فى الدائرة م

* لاحظ أن : $\overline{وهـ}$ ليس وترًا فى الدائرة م لأن هـ $\not\in$ الدائرة م

قطـر الـدائـرة

قطر الدائرة هو وتر مار بمركز الدائرة.



ففى الشكل المقابل :

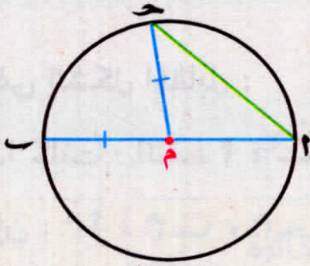
إذا كانت : م دائرة ، $\overline{\text{أب}}$ وترًا فيها ، م $\in$ $\overline{\text{أب}}$

فإن : $\overline{\text{أب}}$ يكون قطرًا فى الدائرة م

لاحظ أن :

1. للدائرة الواحدة عدد لا نهائى من الأقطار وجميعها متساوية فى الطول.
2. قطر الدائرة هو أكبر الأوتار طولاً فى الدائرة ، وطوله يساوى ٢ نق

ففى الشكل المقابل :



Δ أ م حـ فيه : أ م + م حـ > أ حـ (متباينة المثلث)

، $\because$ م حـ = م ب = نق $\therefore$ أ م + م ب > أ حـ

$\therefore$ أ ب > أ حـ

أى أن : القطر $\overline{\text{أب}}$ أكبر من الوتر $\overline{\text{أحـ}}$

محيط الدائرة ومساحتها

- **محيط الدائرة = ٢ π نق**
- **مساحة الدائرة = π نق^{٢}**

حيث : نق طول نصف قطر الدائرة.

، π نسبة ثابتة لأى دائرة ، تعبر عن النسبة بين محيط الدائرة وطول قطرها.

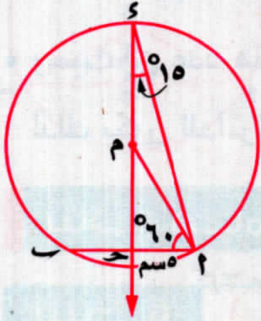
وتساوى تقريبًا ٣,١٤ أو تساوى تقريبًا $\frac{٢٢}{٧}$

فمثلًا : **الدائرة التى طول نصف قطرها ٧ سم يكون :**

1. محيطها = ٢ π نق $\approx$ ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ = ٤٤ سم
2. مساحتها = π نق^{٢} $\approx$ $\frac{٢٢}{٧}$ × (٧)^{٢} = ١٥٤ سم^{٢}

مثال ١

فى الشكل المقابل :



ق (∠ أ ء م) = ١٥° ، ق (∠ م أ حـ) = ٦٠° ، أ حـ = ٥ سم

احسب : مساحة سطح الدائرة م (π ≈ ٣,١٤)

الحـــل

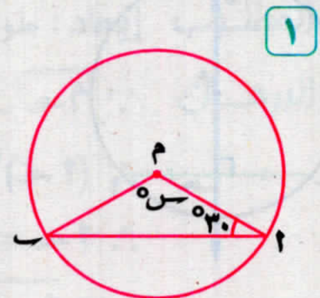
المعطيات	ق (∠ أ ء م) = ١٥° ، ق (∠ م أ حـ) = ٦٠° ، أ حـ = ٥ سم
المطلـوب	حساب : مساحة سطح الدائرة م
البرهــان	∵ م أ = م ء = نق
	∴ ق (∠ ء أ م) = ق (∠ ء) = ١٥°
	، ∵ ق (∠ أ م حـ) = ق (∠ ء) + ق (∠ ء أ م) = ١٥° + ١٥° = ٣٠°
	، ق (∠ م أ حـ) = ٦٠° ∴ ق (∠ أ حـ م) = ٩٠°
	∴ أ م = ٢ أ حـ = ٢ × ٥ = ١٠ سم ∴ نق = ١٠ سم
	∴ مساحة سطح الدائرة م = π نق٢ ≈ ٣,١٤ × (١٠)٢ = ٣١٤ سم٢

(وهو المطلوب)

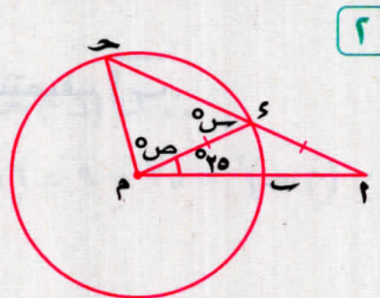
حاول بنفسك ١

فى كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة الرمز المستخدم فى القياس حيث م مركز الدائرة :

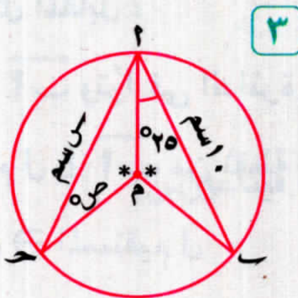
١



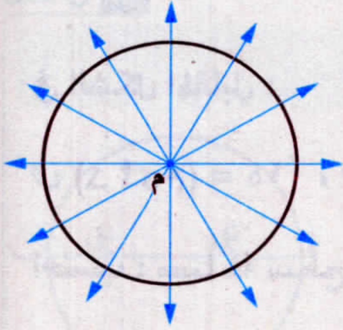
٢



٣



التماثل فى الدائرة



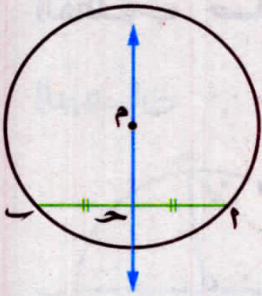
- كل مستقيم يمر بمركز الدائرة هو محور تماثل لهذه الدائرة.
- وحيث إن عدد هذه المستقيمات لا نهائى

لذلك يكون للدائرة عدد لا نهائى من محاور التماثل.

نتائج هامة

نتيجة ١

المستقيم المار بمركز الدائرة وبمنتصف أى وتر فيها يكون عموديًا على هذا الوتر.



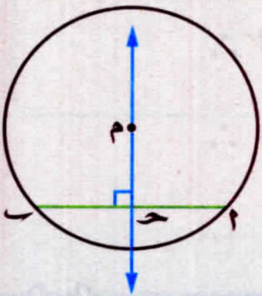
ففى الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{\text{أب}}$ وترًا فى الدائرة م ، حـ منتصف $\overline{\text{أب}}$

فإن : $\overleftrightarrow{\text{م حـ}} \perp \overline{\text{أب}}$

نتيجة ٢

المستقيم المار بمركز الدائرة عموديًا على أى وتر فيها ينصف هذا الوتر.



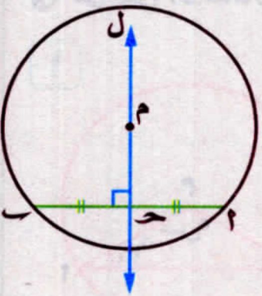
ففى الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{\text{أب}}$ وترًا فى الدائرة م ، $\overleftrightarrow{\text{م حـ}} \perp \overline{\text{أب}}$ بحيث حـ $\in \overline{\text{أب}}$

فإن : حـ منتصف $\overline{\text{أب}}$

نتيجة ٣

المستقيم العمودى على أى وتر فى الدائرة من منتصفه يمر بمركز هذه الدائرة.



ففى الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{\text{أب}}$ وترًا فى الدائرة م ، حـ منتصف $\overline{\text{أب}}$

، المستقيم ل $\perp \overline{\text{أب}}$ من نقطة حـ

فإن : م $\in$ المستقيم ل

مما سبق نستنتج أن : **محور أى وتر فى الدائرة يمر بمركزها وبالتالى يكون محور تماثل للدائرة.**

مثال ٢

في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{أب}$ وترًا فى الدائرة م ، حـ منتصف $\overline{أب}$

، ق (∠ ب م حـ) = ٦٣° فأوجد : ق (∠ م أ ب)

الحـــل

المعطيات | $\overline{أب}$ وتر فى الدائرة م ، حـ منتصف $\overline{أب}$ ، ق (∠ ب م حـ) = ٦٣°

المطلوب | إيجاد : ق (∠ م أ ب)

البرهان | ∵ $\overline{أب}$ وتر فى الدائرة م ، حـ منتصف $\overline{أب}$

∴ $\overline{مح}$ ⊥ $\overline{أب}$ ∴ ق (∠ م حـ ب) = ٩٠°

، ∵ ق (∠ ب م حـ) = ٦٣° ∴ ق (∠ م ب حـ) = ١٨٠° − (٩٠° + ٦٣°) = ٢٧°

، ∵ م أ = م ب = نق ∴ Δ أ ب م متساوى الساقين

∴ ق (∠ م أ ب) = ق (∠ م ب أ) = ٢٧° (وهو المطلوب)

مثال ٣

في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{أب}$ وترًا فى الدائرة م التى طول نصف قطرها = ٥ سم

، $\overline{مح}$ ⊥ $\overline{أب}$ ، م حـ = ٣ سم

فأوجد : طول $\overline{أب}$

الحـــل

المعطيات | $\overline{أب}$ وتر فى الدائرة م ، $\overline{مح}$ ⊥ $\overline{أب}$ ، م حـ = ٣ سم ، م أ = ٥ سم

المطلوب | إيجاد : طول $\overline{أب}$

البرهان | ∵ $\overline{مح}$ ⊥ $\overline{أب}$ ∴ ق (∠ م حـ أ) = ٩٠°

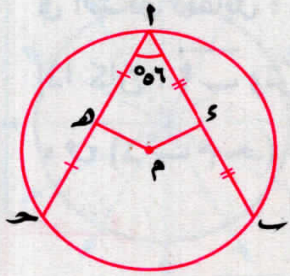
∴ $(أحـ)^2 = (أم)^2 - (محـ)^2$ = ٢٥ − ٩ = ١٦ (نظرية فيثاغورس)

∴ أ حـ = ٤ سم

، ∵ $\overline{مح}$ ⊥ $\overline{أب}$ ∴ حـ منتصف $\overline{أب}$

∴ أ ب = ٨ سم (وهو المطلوب)

مثال ٤



فى الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ وتران فى الدائرة م حيث ق (∠ب أ حـ) = ٥٦°

فإذا كان ء ، هـ منتصفى $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ على الترتيب

فأوجد : ق (∠ء م هـ)

الحل

المعطيات $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ وتران فى الدائرة م ، ق (∠أ) = ٥٦°

، ء منتصف $\overline{أب}$ ، هـ منتصف $\overline{أحـ}$

المطلوب إيجاد : ق (∠ء م هـ)

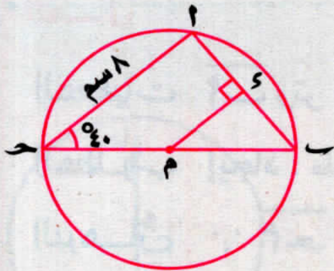
البرهان ∵ ء منتصف $\overline{أب}$ ∴ $\overline{مء}$ ⊥ $\overline{أب}$ ∴ ق (∠م ء أ) = ٩٠°

، ∵ هـ منتصف $\overline{أحـ}$ ∴ $\overline{مهـ}$ ⊥ $\overline{أحـ}$ ∴ ق (∠م هـ أ) = ٩٠°

، ∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعى أ ء م هـ الداخلة = ٣٦٠°

∴ ق (∠ء م هـ) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ٥٦°) = ١٢٤° (وهو المطلوب)

حاول بنفسك ٢



فى الشكل المقابل :

$\overline{بحـ}$ قطر فى الدائرة م ، $\overline{مء}$ ⊥ $\overline{أب}$ حيث $\overline{مء}$ ∩ $\overline{أب}$ = {ء}

، ق (∠حـ) = ٤٠° ، أحـ = ٨ سم

أوجد : ١ ق (∠ء م ب) ٢ طول $\overline{مء}$

تمارين 1



على المفاهيم الأساسية للدائرة ونتائج عليها



اختبار تفاعلى

● تذكر ● فهم ● تطبيق ● حل مشكلات | أسئلة كتاب الوزارة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

● ١ عدد محاور تماثل الدائرة هو .... (الإسكندرية ٢٥ ، المنيا ٢٣ ، دمياط ١٩ ، القليوبية ١٨)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى.

● ٢ عدد محاور تماثل نصف الدائرة هو .... (قنا ٢٥ ، الشرقية ٢٤ ، الشرقية ٢٢ ، البحر الأحمر ١٩)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائى.

● ٣ محور تماثل الدائرة هو .... (المنوفية ١٩)

(أ) القطر. (ب) الوتر.

(جـ) المستقيم المار بالمركز. (د) المماس.

● ٤ القطعة المستقيمة التى طرفاها مركز الدائرة وأى نقطة على الدائرة هى .... فى الدائرة.

(أ) قطر (ب) نصف قطر (جـ) وتر (د) محور تماثل

● ٥ القطعة المستقيمة التى طرفاها أى نقطتين على الدائرة ولا تمر بالمركز تُسمى ....

(أ) قطر. (ب) محور تماثل. (جـ) نصف قطر. (د) وتر.

● ٦ القطر هو .... يمر بمركز الدائرة. (أسيوط ١٩)

(أ) مستقيم (ب) شعاع (جـ) مماس (د) وتر

● ٧ أكبر الأوتار طولًا فى الدائرة يُسمى .... (بورسعيد ١٩)

(أ) وترًا. (ب) قطرًا. (جـ) مماسًا. (د) نصف قطر.

● ٨ المستقيم المار بمركز الدائرة و بمنتصف أى وتر فيها يكون ....

(أ) وترًا فى الدائرة. (ب) قطرًا فى الدائرة

(جـ) مماسًا للدائرة. (د) عموديًا على هذا الوتر.

● ٩ المستقيم العمودى على أى وتر فى الدائرة من منتصفه يكون .... للدائرة. (الوادى الجديد ٢١)

(أ) وترًا (ب) مماسًا (جـ) قطرًا (د) محور تماثل

10 دائرة طول أكبر وتر فيها ١٢ سم فإن محيط الدائرة يساوى .... سم. (الدقهلية ١٩)

(أ) ١٢ π (ب) ٦ π (جـ) ٢٤ π (د) ١٠ π

11 م دائرة طول نصف قطرها نق سم فإن نصف محيط الدائرة = ... سم.

(أ) ٢ π نق (ب) $\frac{1}{4}$ π نق (جـ) $\frac{1}{2}$ π نق (د) π نق

12 دائرة مساحتها ١٦ π سم^{2} فإن محيطها = ... سم (الأقصر ٢٤)

(أ) ٢ π (ب) ٨ π (جـ) ٤ π (د) ٤

13 دائرة محيطها ٨ π سم فإن طول قطرها يساوى .... سم (السويس ١٨)

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٦

14 طول نصف قطر الدائرة التى مركزها نقطة الأصل والمارة بالنقطة (−٣ ، ٤)
يساوى .... وحدة طول. (البحر الأحمر ١٩)

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٧

15 إذا كان : $\overline{أب}$ قطرًا فى الدائرة حيث أ (٣ ، − ٥) ، ب (٥ ، ١)
فإن مركز الدائرة هو .... (البحيرة ١٧)

(أ) (٤ ، −٢) (ب) (٤ ، ٢) (جـ) (٢ ، ٢) (د) (٨ ، −٢)

16 $\overline{أب}$ قطر فى دائرة مركزها نقطة الأصل فإذا كانت : أ = (٢ ، ٠)
فإن : ب = ... (دمياط ١٨)

(أ) (٢ ، ٢) (ب) (٠ ، −٢) (جـ) (−٢ ، ٠) (د) (−٢ ، ٢)

17 وتر طوله ٨ سم مرسوم داخل دائرة طول قطرها ١٠ سم
فإنه يبعد عن المركز .... سم (الغربية ١٨)

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) ٦

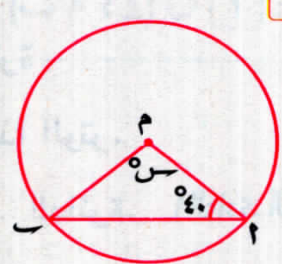
18 دائرة مركزها م رسم فيها وتر طوله ١٦ سم ومحيطها ٢٠ π سم فإن الوتر يبعد عن
مركزها .... سم. (الإسكندرية ٢٥)

(أ) ٢ (ب) ٦ (جـ) ١٠ (د) ٣٦

---

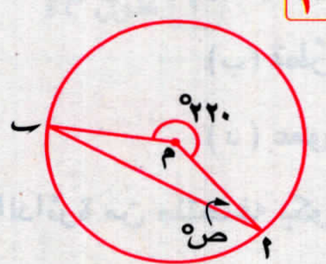
2 فى كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة الرمز المستخدم فى القياس حيث م مركز الدائرة :

1



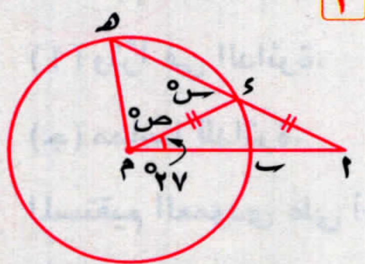
س = ...°

2



ص = ...°

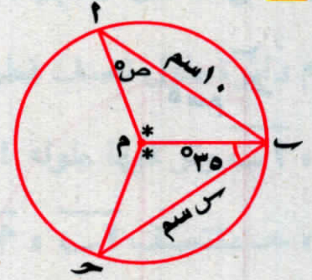
3



س = ...° ، ص = ...°

● تذكر ● فهم ● تطبيق ● حل مشكلات

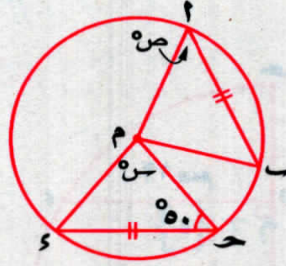
٤



س = ... سم

، ص = ...°

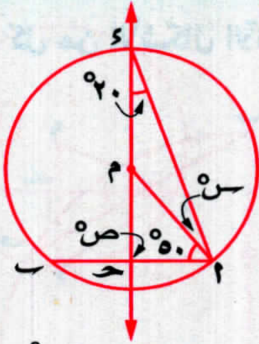
٥



س = ...°

، ص = ...°

٦



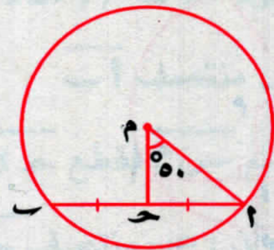
س = ...°

، ص = ...°

---

٣ في كل من الأشكال الآتية م دائرة ، أكمل :

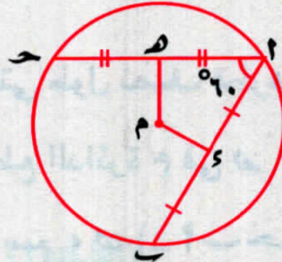
١



ق(∠ م أ حـ) = ...°

(الأقصر ١٤ ، أسيوط ١١)

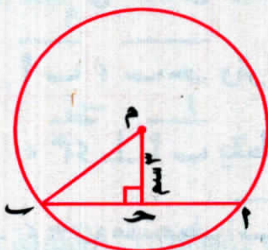
٢



ق(∠ ء م هـ) = ...°

(الجيزة ١٥ ، الأقصر ١٤)

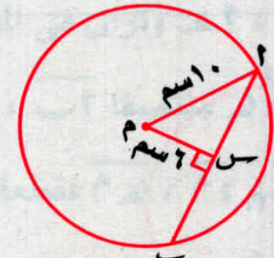
٣



إذا كان : أ ب = ٨ سم

فإن : م ب = ... سم

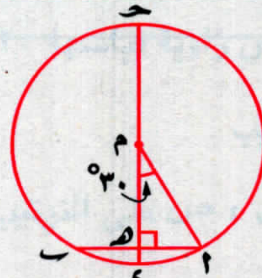
٤



أ ب = ... سم

(البحر الأحمر ١٢)

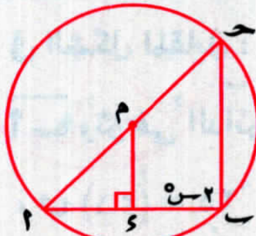
٥



إذا كان : أ ب = ١٠ سم

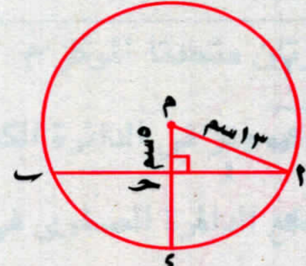
فإن : حـ ء = ... سم

٦



س = ...°

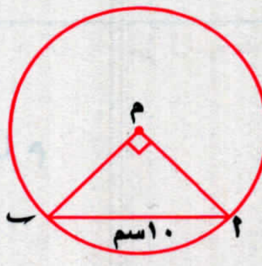
٧



أ ب = ... سم

، حـ ء = ... سم

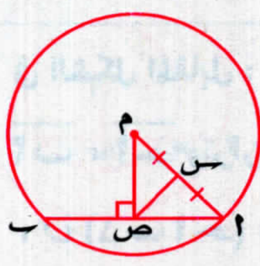
٨



ق(∠ أ) = ...°

، م أ = ... سم

٩

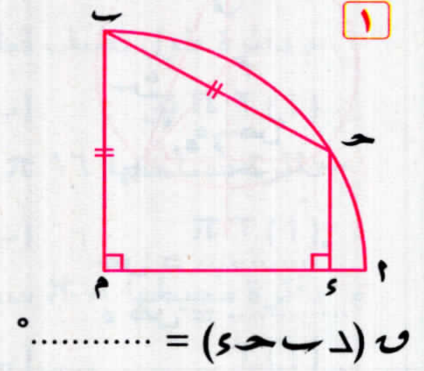


س ص = ٧ سم ، $\pi \approx \frac{22}{7}$

مساحة الدائرة = ... سم²

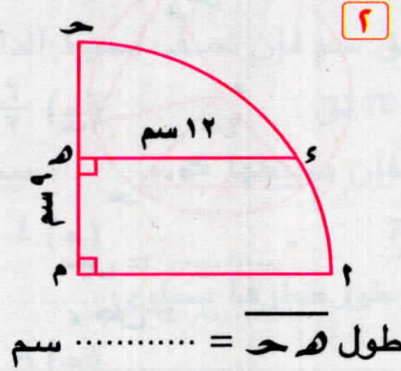
٤ في كل من الأشكال الآتية ، ربع دائرة م ، أكمل :

١



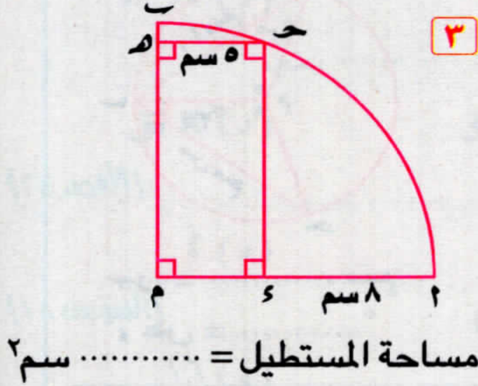
ق (∠ب حـ ء) = ... °

٢



طول $\overline{\text{هـ حـ}}$ = ... سم

٣



مساحة المستطيل = ... سم^٢

---

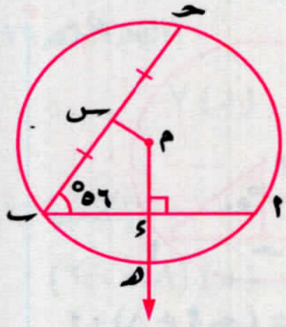
٥ في الشكل المقابل :

$\overline{\text{ا ب}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ وتران في دائرة م التي طول نصف قطرها ٥ سم

، $\overrightarrow{\text{م ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ا ب}}$ يقطع $\overline{\text{ا ب}}$ في ء ويقطع الدائرة م في هـ

، س منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ ، ا ب = ٨ سم ، ق (∠ا ب حـ) = ٥٦°

أوجد : **١** ق (∠ء م س) **٢** طول $\overline{\text{ء هـ}}$



(المنيا ١٩ ، الغربية ١٧ ، سوهاج ١٥) «١٢٤° ، ٢ سم»

---

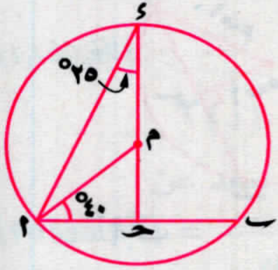
٦ في الشكل المقابل :

$\overline{\text{ا ب}}$ وتر في الدائرة م

، ق (∠ء) = ٢٥°

، ق (∠م ا حـ) = ٤٠°

برهن أن : حـ منتصف $\overline{\text{ا ب}}$



(كفر الشيخ ٠٩)

---

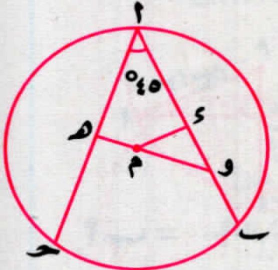
٧ في الشكل المقابل :

$\overline{\text{ا ب}}$ ، $\overline{\text{ا حـ}}$ وتران في دائرة مركزها م

، ق (∠ب ا حـ) = ٤٥°

، ء ، هـ منتصفا $\overline{\text{ا ب}}$ ، $\overline{\text{ا حـ}}$ على الترتيب

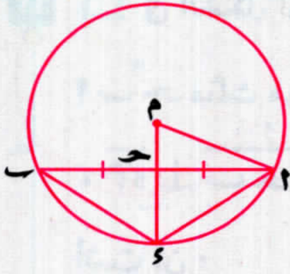
أثبت أن : المثلث ء و م متساوي الساقين.



(الوادي الجديد ٠٥)

● تذكر ● فهم ● تطبيق ● حل مشكلات

٨ في الشكل المقابل :



م دائرة طول نصف قطرها ١٣ سم

، $\overline{\text{أب}}$ وتر فيها طوله ٢٤ سم

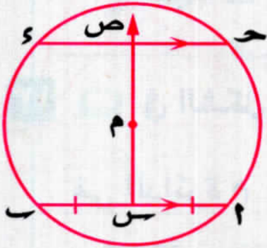
، حـ منتصف $\overline{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{م حـ}}$ ∩ الدائرة م = {ء}

أوجد : مساحة المثلث أ ء ب

(الدقهلية ١٣) «٩٦ سم٢»

---

٩ في الشكل المقابل :



م دائرة ، $\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{حـ ء}}$

، س منتصف $\overline{\text{أب}}$

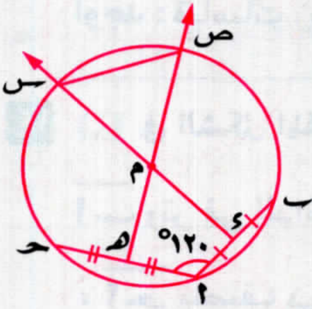
، رسم $\overrightarrow{\text{س م}}$ فقطع $\overline{\text{حـ ء}}$ في ص

أثبت أن : ص منتصف $\overline{\text{حـ ء}}$

(الشرقية ٢٣ ، المنيا ١٨ ، أسيوط ١٨ ، أسوان ١٥ ، الإسكندرية ١٣)

---

١٠ في الشكل المقابل :



$\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أحـ}}$ وتران في الدائرة م يحصران زاوية قياسها ١٢٠°

، ء ، هـ منتصفا $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أحـ}}$ على الترتيب

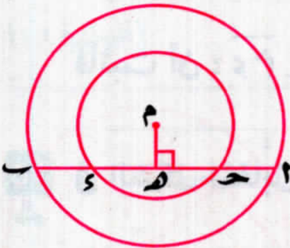
، رسم $\overrightarrow{\text{ء م}}$ ، $\overrightarrow{\text{هـ م}}$ فقطعا الدائرة في س ، ص على الترتيب.

أثبت أن : المثلث س ص م متساوي الأضلاع.

(القليوبية ٢٢ ، أسوان ١٦ ، بني سويف ١٥)

---

١١ في الشكل المقابل :



دائرتان متحدتا المركز م

، $\overline{\text{أب}}$ وتر في الدائرة الكبرى

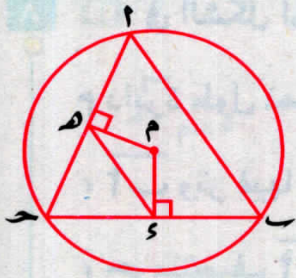
ويقطع الدائرة الصغرى في حـ ، ء

، $\overline{\text{م هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أب}}$

أثبت أن : أحـ = ب ء

(القليوبية ٢٤ ، الجيزة ٢٣ ، القليوبية ٢٢ ، الغربية ١٨ ، قنا ١٧)

١٢ في الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة مركزها م

، $\overline{\text{مء}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{م هـ}} \perp \overline{\text{أ حـ}}$

أثبت أن :

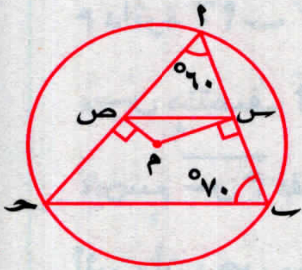
١ $\overline{\text{هـ ء}} \parallel \overline{\text{أ ب}}$

٢ محيط Δ حـ ء هـ = $\frac{1}{2}$ محيط Δ أ ب حـ

(الغربية ٢٣ ، كفر الشيخ ١٦ ، البحيرة ١٣)

---

١٣ في الشكل المقابل :



في الدائرة م ، $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

، $\overline{\text{م ص}} \perp \overline{\text{أ حـ}}$ ، ق (∠ أ) = ٦٠°

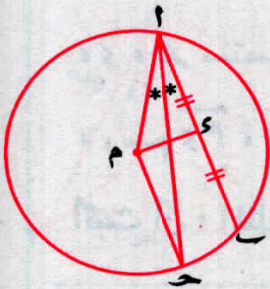
، ق (∠ ب) = ٧٠°

أوجد : قياسات زوايا المثلث م س ص

«١٢٠° ، ٢٠° ، ٤٠°»

---

١٤ في الشكل المقابل :



$\overline{\text{أ ب}}$ وتر في الدائرة م

، $\overrightarrow{\text{أ حـ}}$ ينصف ∠ ب أ م

ويقطع الدائرة م في حـ

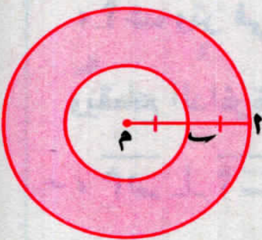
، إذا كانت ء منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

فأثبت أن : $\overline{\text{ء م}} \perp \overline{\text{حـ م}}$

(البحيرة ٢٤ ، البحيرة ١٩ ، الغربية ١٧ ، سوهاج ١٤)

---

١٥ في الشكل المقابل :



دائرتان متحدتا المركز م ، م ب = أ ب

إذا كانت مساحة الجزء المظلل = ٤٨ π سم^2

أوجد طول نصف قطر الدائرة الكبرى.

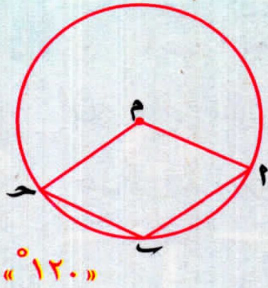
«٨ سم»

تذكر ● فهم ● تطبيق ● حل مشكلات

١٦ في الشكل المقابل :

م ا ب حـ معين

أوجد : ق (∠ ا م حـ)



---

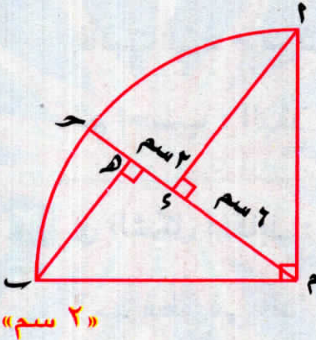
١٧ في الشكل المقابل :

ربع دائرة م ، $\overline{\text{ا م}} \perp \overline{\text{م ب}}$

، $\overline{\text{ا ء}} \perp \overline{\text{م حـ}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}} \perp \overline{\text{م حـ}}$

إذا كان : م ء = ٦ سم ، ء هـ = ٢ سم

أوجد : طول $\overline{\text{هـ حـ}}$



---

١٨ في الشكل المقابل :

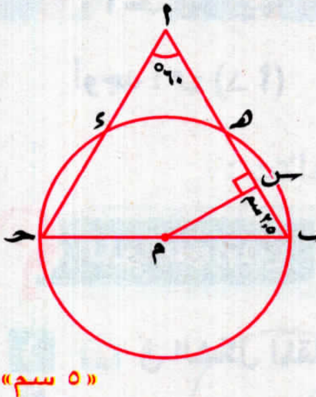
$\overline{\text{ب حـ}}$ قطر في الدائرة م ، ا ب = ا حـ

، ق (∠ ب ا حـ) = ٦٠°

، ب س = ٢,٥ سم

، $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{ا ب}}$

أوجد : طول $\overline{\text{ا هـ}}$



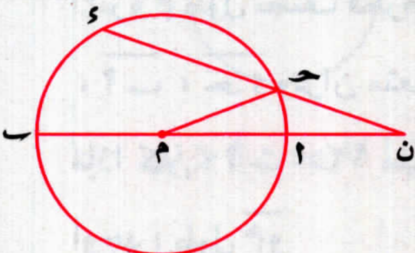
---

١٩ في الشكل المقابل :

$\overline{\text{ا ب}}$ قطر في الدائرة م

، $\overleftarrow{\text{ب ا}} \cap \overleftarrow{\text{ء حـ}} = \{\text{ن}\}$

أثبت أن : ن حـ > ن ا



(البحيرة ١٨)

---

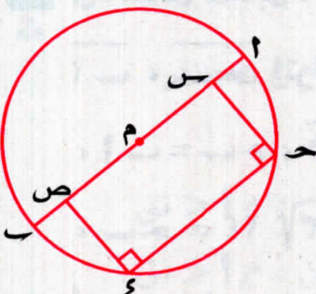
٢٠ في الشكل المقابل :

$\overline{\text{ا ب}}$ قطر في الدائرة م

، $\overline{\text{حـ ء}}$ وتر فيها

، $\overline{\text{س حـ}} \perp \overline{\text{حـ ء}}$ ، $\overline{\text{ص ء}} \perp \overline{\text{حـ ء}}$

أثبت أن : ا س = ب ص



(الشرقية ٠٩)

٢١ 📖 $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{حء}}$ وتران متوازيان فى الدائرة م ، أب = ١٢ سم ، حء = ١٦ سم أوجد البعد بين هذين الوترين إذا كان طول نصف قطر الدائرة م = ١٠ سم

هل توجد إجابات أخرى ؟ فسر إجابتك. «١٤ سم أ، ٢ سم»

---

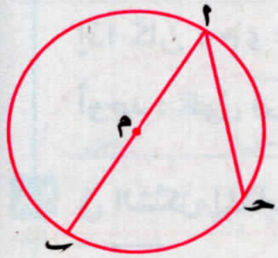
٢٢ فى مستوى إحداثى متعامد إذا كانت : م (–١ ، ٢) ، أ (٢ ، ٦) ، ب (٢ ، –٢)

فأثبت أن : م مركز دائرة مارة بالنقطتين أ ، ب

ثم احسب : البعد العمودى للوتر $\overline{\text{أب}}$ عن مركز الدائرة م «٣ وحدات طولية»

---

٢٣ فى الشكل المقابل :



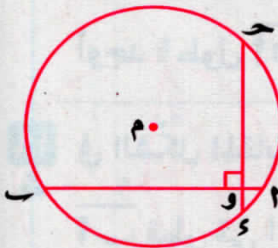
$\overline{\text{أب}}$ قطر فى الدائرة م ، أب = ٨ سم

، $\overline{\text{أحـ}}$ وتر فيها طوله ٤ $\sqrt{٢}$ سم

أوجد : ق (∠ أ) «٤٥°»

للمتفوقين

١ 📖 فى الشكل المقابل :



دائرة م طول نصف قطرها ٧ سم

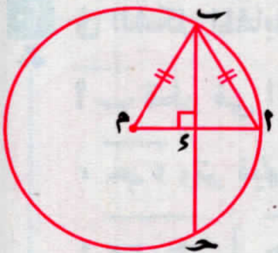
، $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{حء}}$ وتران متعامدان ومتقاطعان فى النقطة و

فإذا كان : أب = ١٢ سم ، حء = ١٠ سم

أوجد : طول $\overline{\text{مو}}$ «$\sqrt{٣٧}$ سم»

---

٢ فى الشكل المقابل :



$\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{بحـ}}$ وتران فى الدائرة م

، أب = ب م ، $\overline{\text{مأ}}$ ⊥ $\overline{\text{بحـ}}$

، ب حـ = ١٤ $\sqrt{٣}$ سم

أوجد : طول نصف قطر الدائرة م «١٤ سم»

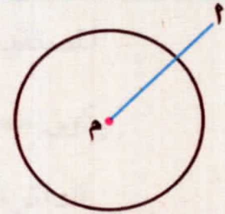
الدرس 2 موضع نقطة ومستقيم بالنسبة لدائرة



أولًا موضوع نقطة بالنسبة لدائرة

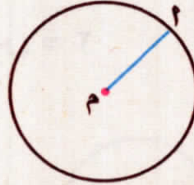
إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها نق ، أ نقطة فى مستويها فإنه توجد ثلاث حالات :

١ أ تقع خارج الدائرة م



إذا كان : م أ > نق

٢ أ تقع على الدائرة م



إذا كان : م أ = نق

٣ أ تقع داخل الدائرة م



إذا كان : م أ < نق

مثال ١

دائرة م طول نصف قطرها ٥ سم ، أ نقطة فى مستويها

حدد موضع النقطة أ بالنسبة للدائرة م فى كل من الحالات التالية :

١ م أ = ٥ سم ٢ م أ = ٣ سم ٣ م أ = ٦,٥ سم ٤ م أ = صفر

الحل

١ أ تقع على الدائرة م ، لأن : م أ = نق ٢ أ تقع داخل الدائرة م ، لأن : م أ < نق

٣ أ تقع خارج الدائرة م ، لأن : م أ > نق ٤ أ تقع داخل الدائرة م ، لأن : م أ < نق

«لاحظ أنه فى هذه الحالة فإن أ ينطبق على م مركز الدائرة».

مثال ٢

إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ٥ سم ، ؟ نقطة فى مستوى الدائرة ، م؟ = ٣ س – ١ من السنتيمترات. أوجد قيم س عندما تقع ؟ :

١ خارج الدائرة. ٢ داخل الدائرة. ٣ على الدائرة.

الحل

١ ∵ ؟ تقع خارج الدائرة ∴ م؟ > نق ∴ ٣ س – ١ > ٥

∴ ٣ س > ٦ ∴ س > ٢ أى أن : س ∈]٢ ، ∞[

٢ ∵ ؟ تقع داخل الدائرة ∴ م؟ < نق

، ∵ م؟ ≥ ٠ ∴ ٠ ≤ م؟ < نق

∴ ٠ ≤ ٣ س – ١ < ٥ ∴ ١ ≤ ٣ س < ٦

∴ $\frac{١}{٣}$ ≤ س < ٢ أى أن : س ∈ [$\frac{١}{٣}$ ، ٢[

٣ ∵ ؟ تقع على الدائرة ∴ م؟ = نق ∴ ٣ س – ١ = ٥

∴ ٣ س = ٦ ∴ س = ٢

حاول بنفسك ١

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كانت النقطة ؟ تقع على الدائرة م التى طول قطرها ٨ سم
فإن : ؟ م = ... سم. (القاهرة ٢١)

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

٢ إذا كانت م دائرة طول قطرها ٧ سم ، ؟ نقطة فى مستويها وكان م؟ = ٤ سم
فإن النقطة ؟ تقع .... (الجيزة ٢٣)

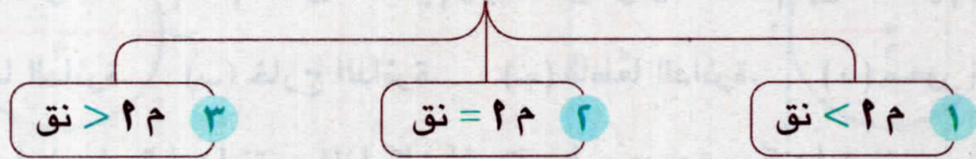
(أ) داخل الدائرة. (ب) خارج الدائرة. (جـ) على الدائرة. (د) غير ذلك.

٣ دائرة م محيطها ١٢ π سم والنقطة ؟ فى مستويها ، فإذا كان م؟ = ٥ سم
فإن النقطة ؟ تقع .... الدائرة. (الشرقية ٢٣)

(أ) خارج (ب) داخل (جـ) على (د) فى مركز

ثانيًا موضع مستقيم بالنسبة لدائرة

إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها نق ، ل مستقيم فى مستويها ، ثم رُسم $\overleftrightarrow{م أ}$ ⊥ المستقيم ل ويقطعه فى أ فيكون م أ هو طول العمود النازل من مركز الدائرة على المستقيم ل فإذا قارنا بين م أ ، نق فإنه يكون لدينا ثلاث حالات هى :



وكل من هذه الحالات يحدد وضعًا للمستقيم ل بالنسبة للدائرة م كما بالجدول التالى :

إذا كان :	فإن :	كما بالشكل	لاحظ أن :
١ م أ > نق	المستقيم ل يقع خارج الدائرة م		• المستقيم ل ∩ الدائرة م = ∅ • المستقيم ل ∩ سطح الدائرة م = ∅
٢ م أ = نق	المستقيم ل يكون مماسًا للدائرة م عند نقطة أ «تسمى أ بنقطة التماس»		• المستقيم ل ∩ الدائرة م = {أ} • المستقيم ل ∩ سطح الدائرة م = {أ}
٣ م أ < نق	المستقيم ل يكون قاطعًا للدائرة م		• المستقيم ل ∩ الدائرة م = {س ، ص} • المستقيم ل ∩ سطح الدائرة م = $\overline{س ص}$ • تسمى $\overline{س ص}$ وتر التقاطع.

مثال ٣

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ دائرة طول نصف قطرها ٥ سم ، والمستقيم ل يبعد عن مركزها ٥ سم فإن المستقيم ل يكون ....

(أ) خارج الدائرة. (ب) مماسًا للدائرة. (جـ) قاطعًا للدائرة. (د) قطرًا فى الدائرة.

٢ دائرة طول قطرها ٦ سم ، فإذا كان المستقيم ل يبعد عن مركزها ٢ سم فإن المستقيم ل يكون ....

(أ) مماسًا للدائرة. (ب) خارج الدائرة. (جـ) قاطعًا للدائرة. (د) محور تماثل للدائرة.

٣ دائرة م طول نصف قطرها نق ، فإذا كان المستقيم ل يبعد عن مركزها ٥ نق فإن المستقيم ل يكون ....

(أ) خارج الدائرة. (ب) مماسًا للدائرة. (جـ) قاطعًا للدائرة. (د) قطرًا فى الدائرة.

الحل

١ (ب) السبب : لأن بُعد المستقيم ل عن مركز الدائرة = نق

٢ (جـ) السبب : لأن بُعد المستقيم ل عن مركز الدائرة < نق (حيث نق = ٣ سم)

٣ (أ) السبب : لأن بُعد المستقيم ل عن مركز الدائرة > نق

حاول بنفسك ٢

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ المماس لدائرة طول قطرها ٦ سم يكون على بُعد .... سم من مركزها. (السويس ٢١)

(أ) ٦ (ب) ١٢ (جـ) ٣ (د) ٢

٢ إذا كان طول قطر الدائرة ١٠ سم ، والمستقيم ل يبعد عن مركزها ٦ سم فإن المستقيم ل ....

(أ) يمس الدائرة. (ب) قاطع للدائرة.

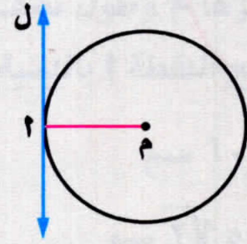
(جـ) يقع خارج الدائرة. (د) محور تماثل الدائرة.

٣ دائرة مساحتها ٣٦ π سم^2 ، والمستقيم ل يبعد عن مركزها ٥ سم فإن المستقيم ل يكون ....

(أ) مماسًا للدائرة. (ب) قاطعًا للدائرة. (جـ) خارج الدائرة. (د) قطرًا فى الدائرة.

حقيقتان

(١) المماس للدائرة يكون عموديًا على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس.

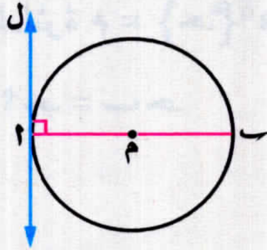


أى أنه :

إذا كان : المستقيم ل مماسًا للدائرة م عند النقطة أ

فإن : $\overline{م أ}$ ⊥ المستقيم ل

(٢) المستقيم العمودى على قطر الدائرة من إحدى نهايتيه يكون مماسًا لها.



أى أنه :

إذا كان : $\overline{أ ب}$ قطرًا فى الدائرة م

، المستقيم ل ⊥ $\overline{أ ب}$ من النقطة أ

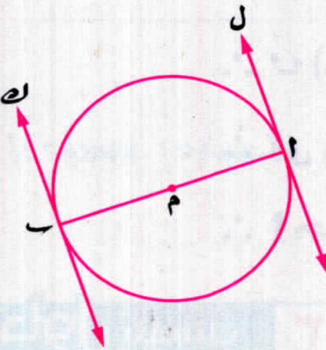
فإن : ل مماس للدائرة م عند النقطة أ

مثال ٤

$\overline{أ ب}$ قطر فى دائرة مركزها م ، رسم المستقيم ل مماسًا للدائرة م عند أ

، المستقيم ك مماسًا للدائرة م عند ب أثبت أن : المستقيم ل // المستقيم ك

الحل



المعطيات $\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة م ، المستقيمان ل ، ك مماسان للدائرة م عند أ ، ب على الترتيب

المطلوب إثبات أن : المستقيم ل // المستقيم ك

البرهان ∵ المستقيم ل مماس للدائرة م عند أ

∴ المستقيم ل ⊥ $\overline{م أ}$ ∴ المستقيم ل ⊥ $\overleftrightarrow{أ ب}$ (١)

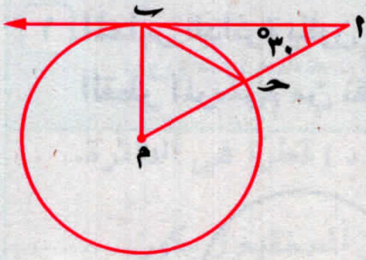
، ∵ المستقيم ك مماس للدائرة م عند ب ∴ المستقيم ك ⊥ $\overline{م ب}$

∴ المستقيم ك ⊥ $\overleftrightarrow{أ ب}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ المستقيم ل // المستقيم ك (وهو المطلوب)

من المثال السابق نستنتج أن : **المماسان لدائرة المرسومان من نهايتى قطر فيها يكونان متوازيين.**

مثال ٥



فى الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يمس الدائرة م عند النقطة ب

، $\overline{\text{أم}}$ ∩ الدائرة م = {حـ} ، ق (∠ أ) = ٣٠°

أثبت أن : أحـ = ب حـ

الحل

المعطيات $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يمس الدائرة م عند النقطة ب ، ق (∠ أ) = ٣٠°

المطلوب إثبات أن : أحـ = ب حـ

البرهان ∵ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يمس الدائرة م عند ب ∴ $\overline{\text{م ب}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

، ∵ فى Δ أ م ب : ق (∠ أ) = ٣٠° ، ق (∠ أ ب م) = ٩٠°

∴ ق (∠ م) = ١٨٠° − (٣٠° + ٩٠°) = ٦٠°

، ∵ Δ م ب حـ متساوى الساقين لأن : م ب = م حـ = نق

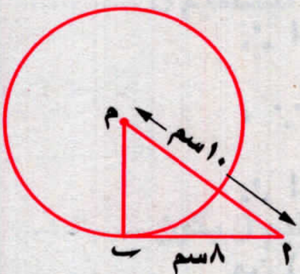
∴ Δ م ب حـ متساوى الأضلاع ∴ ق (∠ م ب حـ) = ٦٠°

∴ ق (∠ أ ب حـ) = ق (∠ أ ب م) − ق (∠ م ب حـ) = ٩٠° − ٦٠° = ٣٠°

∴ فى Δ أ ب حـ : ق (∠ أ) = ق (∠ أ ب حـ) = ٣٠°

∴ أحـ = ب حـ (وهو المطلوب)

حاول بنفسك ٣



فى الشكل المقابل :

$\overline{\text{أب}}$ مماسة للدائرة م عند ب

، أب = ٨ سم ، أم = ١٠ سم

أوجد : مساحة سطح المثلث أ ب م



على موضع نقطة ومستقيم بالنسبة لدائرة



اختبار تفاعلى

● تذكر ● فهم ● تطبيق ● حل مشكلات | أسئلة كتاب الوزارة

١ دائرة مركزها م وطول نصف قطرها ٨ سم ، أ نقطة فى مستوى الدائرة م.

حدد موضع النقطة أ بالنسبة للدائرة م فى كل من الحالات الآتية :

١ م أ = ١٠ سم | ٢ م أ = ٨ سم

٣ م أ = ٥ $\sqrt{٢}$ سم | ٤ م أ = صفر

---

٢ إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ٧ سم ، $\overleftrightarrow{م أ}$ ⊥ ل حيث أ ∈ ل فأكمل ما يأتى :

١ إذا كان : م أ = ٤ $\sqrt{٣}$ سم فإن : المستقيم ل ....

٢ إذا كان : م أ = ٣ $\sqrt{٧}$ سم فإن : المستقيم ل ....

٣ إذا كان : ٢ م أ − ٥ = ٩ فإن : المستقيم ل ....

٤ إذا كان : المستقيم ل يقطع الدائرة م ، م أ = ٣ س − ٥ فإن : س ∈ ....

٥ إذا كان : المستقيم ل مماسًا للدائرة م ، م أ = س^{٢} − ٢ فإن : س ∈ ....

---

٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ المماسان المرسومان من نهايتى قطر فى الدائرة .... (ج. سيناء ٢٥ ، بورسعيد ٢٣)

(أ) متساويان فى الطول. (ب) متوازيان.

(جـ) متقاطعان. (د) متعامدان.

٢ إذا كانت : م دائرة طول قطرها ١٠ سم ، أ نقطة على الدائرة فإن : ....

(أ) م أ > ١٠ سم (ب) م أ = ١٠ سم (جـ) م أ = ٥ سم (د) م أ < ٥ سم

٣ إذا كان المستقيم ل مماسًا للدائرة التى طول قطرها ٨ سم فإنه يبعد عن مركزها بمقدار .... سم. (المنوفية ٢٣ ، الغربية ٢٢ ، سوهاج ١٩ ، القليوبية ١٨)

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

٤ م دائرة طول نصف قطرها ٧ سم ، وكانت أ نقطة فى مستويها تقع خارج الدائرة م

فإن م أ ∈ .... (الدقهلية ٢٥)

(أ) {٧} (ب) [٠ ، ٧] (جـ)]٧ ، ∞[(د)]١٤ ، ∞[

٥ إذا كان طول قطر الدائرة ٨ سم ، والمستقيم ل يبعد ٣ سم عن مركزها

فإن المستقيم ل .... (دمياط ١٦ ، قنا ١٥ ، المنيا ١٤)

(أ) يمس الدائرة. (ب) قاطع للدائرة.

(جـ) يقع خارج الدائرة. (د) يكون محور تماثل لها.

٦ أ نقطة داخل الدائرة م التى طول قطرها ٦ سم فإن : م أ ∈ .... (القليوبية ٢٥)

(أ) [٠ ، ٣] (ب) [٠ ، ٣[(جـ)]٠ ، ٣[(د)]٠ ، ٦[

٧ دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٥ وحدات طول.

أى من النقط الآتية لا تنتمى للدائرة ؟ (الدقهلية ٢٥)

(أ) (−٥ ، ٠) (ب) (٠ ، ٥) (جـ) (٥ ، ٠) (د) (٥ ، ٥)

٨ دائرة مركزها م طول نصف قطرها نق ، أ نقطة فى المستوى بحيث م أ = $\frac{٣}{٢}$ نق

فإن : أ تقع .... الدائرة. (الأقصر ٢٣)

(أ) على (ب) داخل (جـ) خارج (د) فى مركز

٩ إذا كانت م دائرة طول قطرها ١٤ سم ، م أ = (٢ س + ٣) سم حيث أ تقع على الدائرة

فإن : س = ... (القليوبية ١٧ ، الشرقية ١٥)

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١

١٠ إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ٦ سم ، أ نقطة داخل الدائرة ، م أ = (٢ س − ٤) سم

فإن : س ∈ .... (الشرقية ٢٥)

(أ)]٢ ، ٥[(ب)]٢ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ٠[(د)]٢ ، ٥]

١١ دائرة مركزها م طول نصف قطرها ٥ سم ، أ نقطة فى مستوى الدائرة م حيث أ ∉ سطح

الدائرة م فإذا كان م أ = ٢ س − ٣ فإن : س ∈ .... (البحيرة ٢٥)

(أ) [٠ ، ٤] (ب)]٤ ، ∞[(جـ) [٤ ، ∞[(د)]٠ ، ٤]

١٢ أب قطر فى الدائرة م ، $\overleftrightarrow{أحـ}$ ، $\overleftrightarrow{بء}$ مماسان للدائرة

فإن : $\overleftrightarrow{أحـ}$ .... $\overleftrightarrow{بء}$ (القليوبية ٢٤ ، الإسكندرية ١٣)

(أ) يقطع (ب) يوازى (جـ) عمودى على (د) ينطبق على

١٣ إذا كانت : م دائرة محيطها ٨ π سم ، أ نقطة على الدائرة فإن : م أ = ... سم.

(أ) ١٦ (ب) ٨ (جـ) ٤ (د) ٢

١٤ دائرة محيطها ٦ π سم ، والمستقيم ل يبعد عن مركزها ٣ سم

فإن المستقيم ل يكون .... (الشرقية ٢٢ ، البحر الأحمر ١٩ ، البحر الأحمر ١٧ ، المنوفية ١٥)

(أ) مماسًا للدائرة. (ب) قاطعًا للدائرة.

(جـ) خارج الدائرة. (د) قطرًا فى الدائرة.

١٥ إذا كانت مساحة الدائرة م = ١٦ π سم^{٢} ، أ نقطة فى مستويها ، حيث م أ = ٨ سم

فإن : أ تقع .... الدائرة م (قنا ١٧ ، الشرقية ٠٩)

(أ) داخل (ب) خارج (جـ) على (د) على مركز

١٦ دائرة م طول قطرها ٨ سم فإذا كان المستقيم ل خارج الدائرة فإن بعد مركز الدائرة عن

المستقيم ل $\in$ .... (كفر الشيخ ١٤)

(أ)]٤ ، ∞[(ب)]٠ ، ٤] (جـ)]٠ ، ٤[(د) [٠ ، ٨]

١٧ دائرة طول قطرها (٢ س + ٥) سم ، المستقيم ل يبعد عن مركزها (س + ٢) سم

حيث س > ٠ فإن المستقيم ل يكون .... (الفيوم ٢٢ ، بورسعيد ١٧)

(أ) قاطعًا للدائرة فى نقطتين. (ب) خارج الدائرة.

(جـ) مماسًا للدائرة. (د) محور تماثل للدائرة.

١٨ دائرة محيطها ١٦ π سم والنقطة أ تقع خارجها حيث أ م = ٢ك - ٣

فإن : ك يمكن أن تساوى ....

(أ) ٦ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ٧

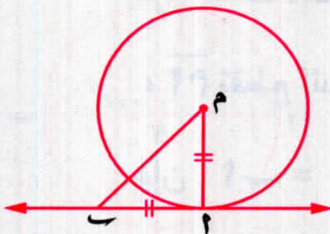
---

٤ باستخدام كل من الأشكال الآتية اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان : $\overleftrightarrow{أب}$ مماسًا للدائرة م عند أ

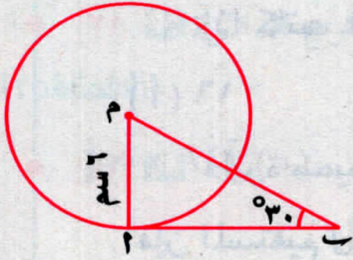
، أ ب = أ م

فإن : ق (∠ م) = ...



(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

٢ $\overline{\text{أب}}$ مماسة للدائرة م



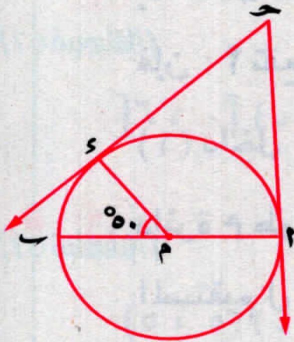
، ق (∠ب) = ٣٠° ، أ م = ٦ سم

فإن : م ب = ... سم.

(البحر الأحمر ١٨)

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١٢

٣ $\overline{\text{أب}}$ قطر فى الدائرة م



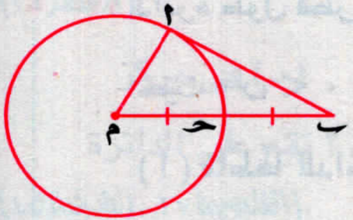
، $\overleftarrow{\text{جـ أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ ء}}$ يمسان الدائرة عند أ ، ء

فإذا كان : ق (∠ء م ب) = ٥٠°

فإن : ق (∠جـ) = ...

(أ) ٥٠° (ب) ١٣٠° (جـ) ٩٠° (د) ٤٠°

٤ إذا كانت : $\overline{\text{أب}}$ تمس الدائرة م عند أ

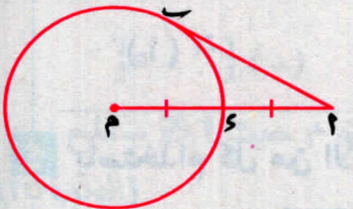


، $\overline{\text{م ب}}$ ∩ الدائرة م = {جـ}

حيث م جـ = ب جـ فإن : ق (∠ب) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

٥ فى الشكل المقابل :



دائرة م طول نصف قطرها نق

فإذا كانت $\overline{\text{أب}}$ مماسة للدائرة م عند ب

، $\overline{\text{أ م}}$ تقطع الدائرة فى ء حيث أ ء = ء م

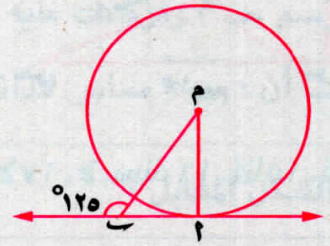
(الدقهلية ٢٤)

فإن : أ ب = ...

(أ) ٢ نق (ب) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ نق (جـ) $\sqrt{3}$ نق (د) نق

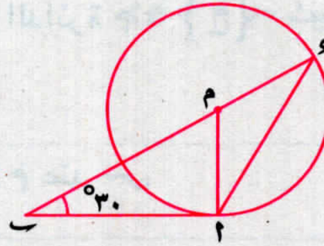
٥ في كل من الأشكال الآتية م دائرة ، $\overleftrightarrow{أب}$ مماس ، أكمل :

١



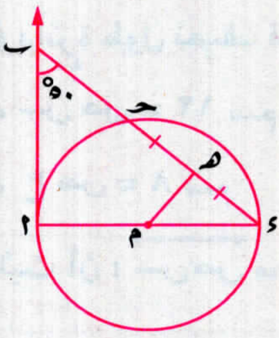
ق (د أ م ب) = ...°

٢



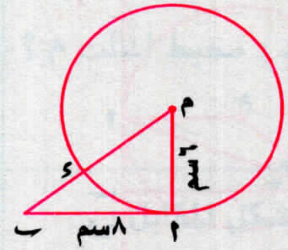
ق (د أ ء ب) = ...°

٣



ق (د أ م هـ) = ...°

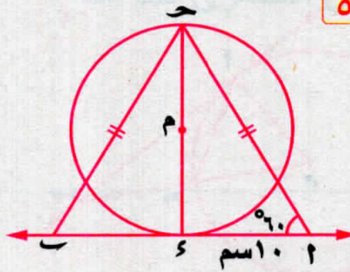
٤



ء ب = ... سم

(الغربية ١٢)

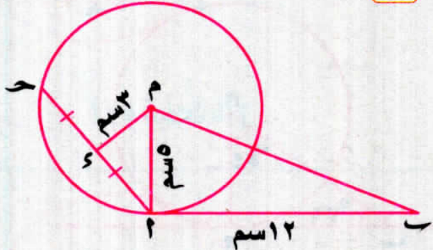
٥



محيط Δ أ ب حـ = ... سم

(الإسكندرية ١١)

٦



محيط الشكل أ ب م ء = ... سم

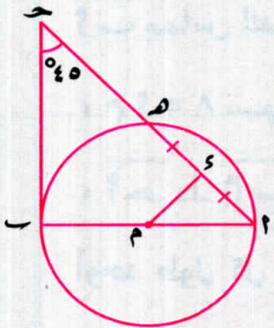
٦ في الشكل المقابل :

دائرة مركزها م

، $\overleftarrow{ب حـ}$ مماس لها عند ب

، ق (د حـ) = ٤٥° ، ء منتصف $\overline{أ هـ}$

أثبت أن : ء أ = ء م



(أسوان ١١)

٧ في الشكل المقابل :

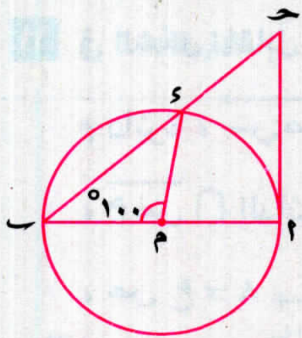
$\overline{أ ب}$ قطر في الدائرة م ، $\overleftarrow{أ حـ}$ مماس للدائرة عند أ

، ق (د ء م ب) = ١٠٠°

أوجد مع البرهان :

١ ق (د أ حـ ب)

٢ ق (د حـ ء م)



(المنيا ١١) «٥٠° ، ١٤٠°»

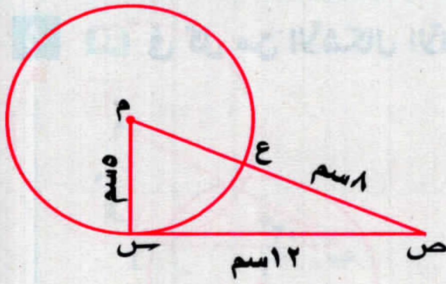
٨ **في الشكل المقابل :**

م دائرة طول نصف قطرها ٥ سم

، $\overline{\text{س ص}}$ = ١٢ سم ، $\overline{\text{م ص}}$ ∩ الدائرة م = {ع}

، ع ص = ٨ سم

أثبت أن : $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ مماس للدائرة م عند س

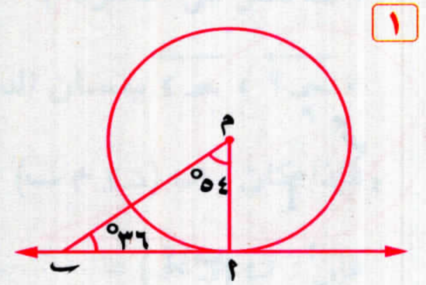


(مطروح ١٧ ، ج. سيناء ١٦ ، قنا ١٥ ، البحيرة ١٤)

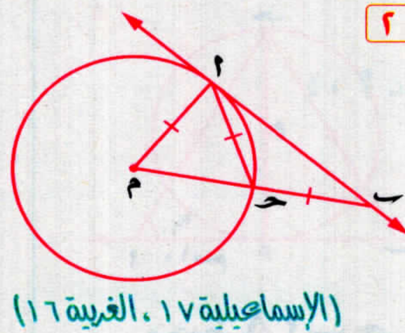
---

٩ **في كل من الأشكال الآتية وضح لماذا يكون $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماسًا للدائرة م :**

١

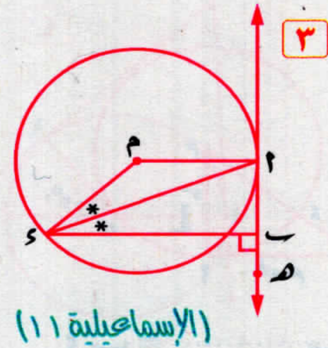


٢



(الإسماعيلية ١٧ ، الغربية ١٦)

٣



(الإسماعيلية ١١)

---

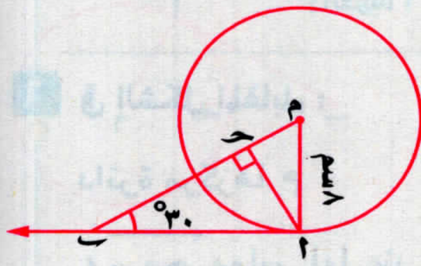
١٠ **في الشكل المقابل :**

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة م عند أ

، م أ = ٨ سم ، ق (∠ أ ب م) = ٣٠°

، $\overline{\text{أ حـ}}$ ⊥ $\overline{\text{م ب}}$

أوجد طول كل من : $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$



(الجيزة ١٩ ، مطروح ١٨ ، الوادي الجديد ١٨ ، المنوفية ١٤) «٨ $\sqrt{3}$ سم ، ٤ $\sqrt{3}$ سم»

---

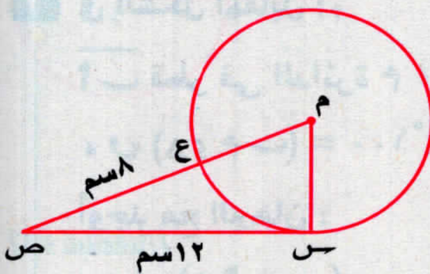
١١ **في الشكل المقابل :**

م دائرة ، $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ مماس للدائرة عند س

، $\overline{\text{م ص}}$ ∩ الدائرة م = {ع} ، س ص = ١٢ سم

، ص ع = ٨ سم

أوجد : طول نصف قطر الدائرة م



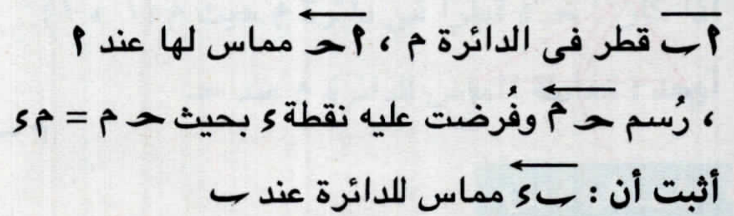
(المنيا ١٣) «٥ سم»

١٢ في الشكل المقابل :

$\overline{\text{أب}}$ قطر فى الدائرة م ، $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$ مماس لها عند أ

، رُسم $\overrightarrow{\text{حـ م}}$ وفُرضت عليه نقطة ء بحيث حـ م = م ء

أثبت أن : $\overleftrightarrow{\text{بـ ء}}$ مماس للدائرة عند ب



---

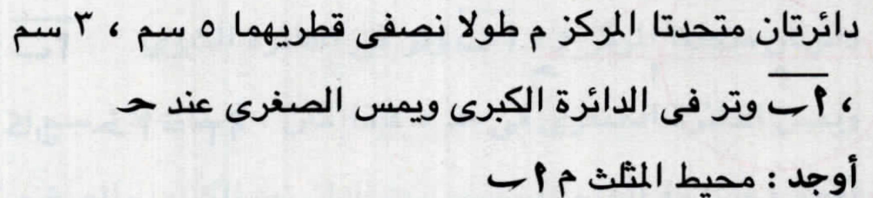
١٣ في الشكل المقابل :

دائرتان متحدتا المركز م طولا نصفى قطريهما ٥ سم ، ٣ سم

، $\overline{\text{أب}}$ وتر فى الدائرة الكبرى ويمس الصغرى عند حـ

أوجد : محيط المثلث م أ ب

(الدقهلية ٢٤) «١٨ سم»



---

١٤ في الشكل المقابل :

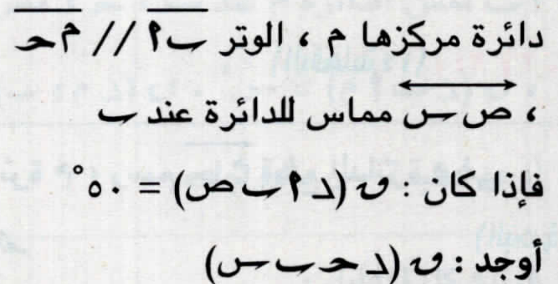
دائرة مركزها م ، الوتر $\overline{\text{ب أ}}$ // $\overline{\text{م حـ}}$

، $\overleftrightarrow{\text{ص س}}$ مماس للدائرة عند ب

فإذا كان : ق (∠ أ ب ص) = ٥٠°

أوجد : ق (∠ حـ ب س)

«٢٠°»



---

١٥ في الشكل المقابل :

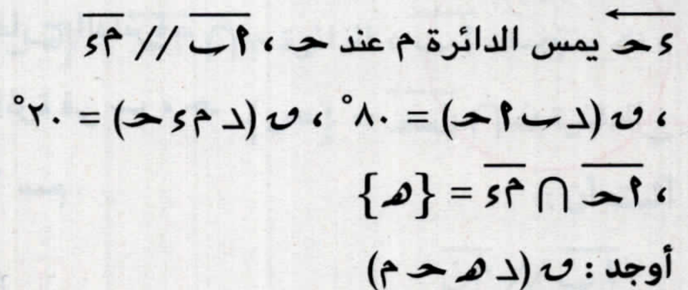
$\overleftrightarrow{\text{ء حـ}}$ يمس الدائرة م عند حـ ، $\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{م ء}}$

، ق (∠ ب أ حـ) = ٨٠° ، ق (∠ م ء حـ) = ٢٠°

، $\overline{\text{أحـ}}$ ∩ $\overline{\text{م ء}}$ = {هـ}

أوجد : ق (∠ هـ حـ م)

(بنى سويف ٠٥) «٣٠°»



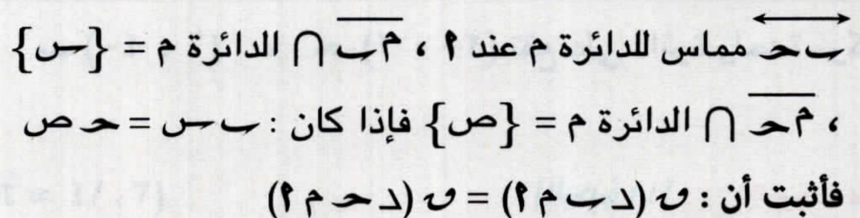
---

١٦ في الشكل المقابل :

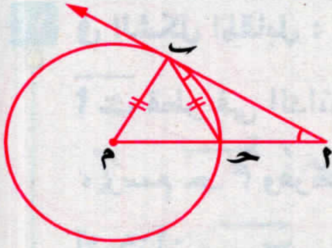
$\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ مماس للدائرة م عند أ ، $\overline{\text{م ب}}$ ∩ الدائرة م = {س}

، $\overline{\text{م حـ}}$ ∩ الدائرة م = {ص} فإذا كان : ب س = حـ ص

فأثبت أن : ق (∠ ب م أ) = ق (∠ حـ م أ)



١٧ في الشكل المقابل :



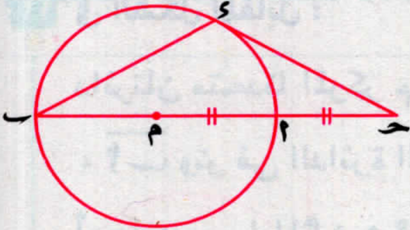
$\overline{\text{ب حـ}}$ وتر في الدائرة م ، أ ∈ $\overleftarrow{\text{م حـ}}$

، ق (∠ أ) = ق (∠ حـ ب أ) ، ب حـ = ب م

أثبت أن : $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة م عند ب

---

١٨ في الشكل المقابل :



$\overline{\text{أ ب}}$ قطر في الدائرة م ، حـ ∈ $\overleftarrow{\text{ب أ}}$

، $\overline{\text{حـ ء}}$ تمس الدائرة عند ء فإذا كان : حـ أ = م أ

أوجد : ق (∠ حـ ء ب)

«١٢٠°»

---

١٩ $\overline{\text{أ ب}}$ قطر في دائرة مساحة سطحها ٣٦ π سم^{٢} ، رسم $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ مماسًا للدائرة عند ب فإذا كان :

ق (∠ أ حـ ب) = ٦٠°

فاحسب مساحة سطح المثلث أ ب حـ (الدقهلية ١٤) «٢٤ $\sqrt{٣}$ سم^{٢}»

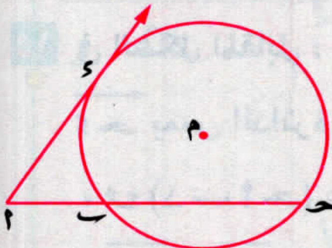
---

٢٠ $\overline{\text{أ ب}}$ قطر في الدائرة م ، $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ مماسان للدائرة م ، رسم $\overleftarrow{\text{حـ م}}$ قطع الدائرة م في

س ، ص وقطع $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ في هـ أثبت أن : حـ س = ص هـ (البحيرة ١٩)

---

٢١ في الشكل المقابل :



م دائرة طول نصف قطرها ٥ سم ، أ نقطة خارج الدائرة

، $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ مماس للدائرة م عند ء ، $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ يقطع الدائرة في ب ، حـ

على الترتيب حيث أ ب = ٤ سم ، أ حـ = ١٢ سم

١ أوجد بعد الوتر $\overline{\text{ب حـ}}$ عن مركز الدائرة.

٢ احسب طول $\overline{\text{أ ء}}$

«٣ سم ، ٤ $\sqrt{٣}$ سم»

---

٢٢ أثبت أن : النقط أ (٣ ، −١) ، ب (−٤ ، ٦) ، حـ (٢ ، −٢) تقع على دائرة واحدة مركزها م (−١ ، ٢)

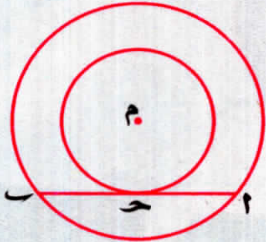
ثم أوجد : محيط الدائرة (حيث π ≈ ٣,١٤) (البحيرة ١١) «٣١,٤ وحدة طول»

٢٣ إذا كان : $\overline{\text{حـ ء}}$ قطرًا فى دائرة م حيث م (١ ، ١) ، ء (٣ ، −٢)

أوجد : معادلة المماس للدائرة م عند حـ (الدقهلية ١١) «ص = $\frac{٢}{٣}$ س + ٤ $\frac{٢}{٣}$»

للمتفوقين

١ فى الشكل المقابل :



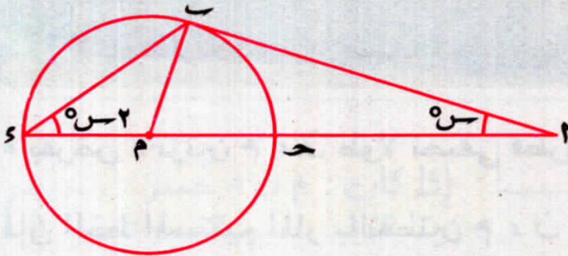
دائرتان متحدتا المركز م ، $\overline{\text{أ ب}}$ وتر فى الدائرة الكبرى

ويمس الدائرة الصغرى فى حـ ، فإذا كان : أ ب = ١٤ سم

أوجد : مساحة الجزء المحصور بين الدائرتين الكبرى والصغرى. (الدقهلية ١٩) «٤٩ π سم²»

---

٢ فى الشكل المقابل :



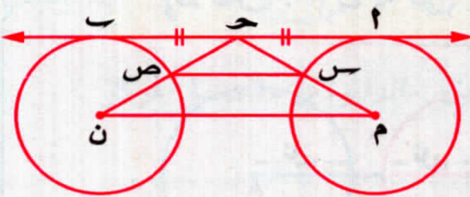
$\overline{\text{أ ب}}$ تمس الدائرة م عند ب ، $\overline{\text{حـ ء}}$ قطر فيها

، ق (∠ ب أ م) = س° ، ق (∠ م ء ب) = ٢ س°

أوجد : قيمة س بالدرجات. (الإسماعيلية ٠٦) «١٨°»

---

٣ فى الشكل المقابل :



م ، ن دائرتان متطابقتان ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس مشترك لهما

، حـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، الدائرة م ∩ $\overline{\text{م حـ}}$ = {س}

، الدائرة ن ∩ $\overline{\text{ن حـ}}$ = {ص}

أثبت أن :

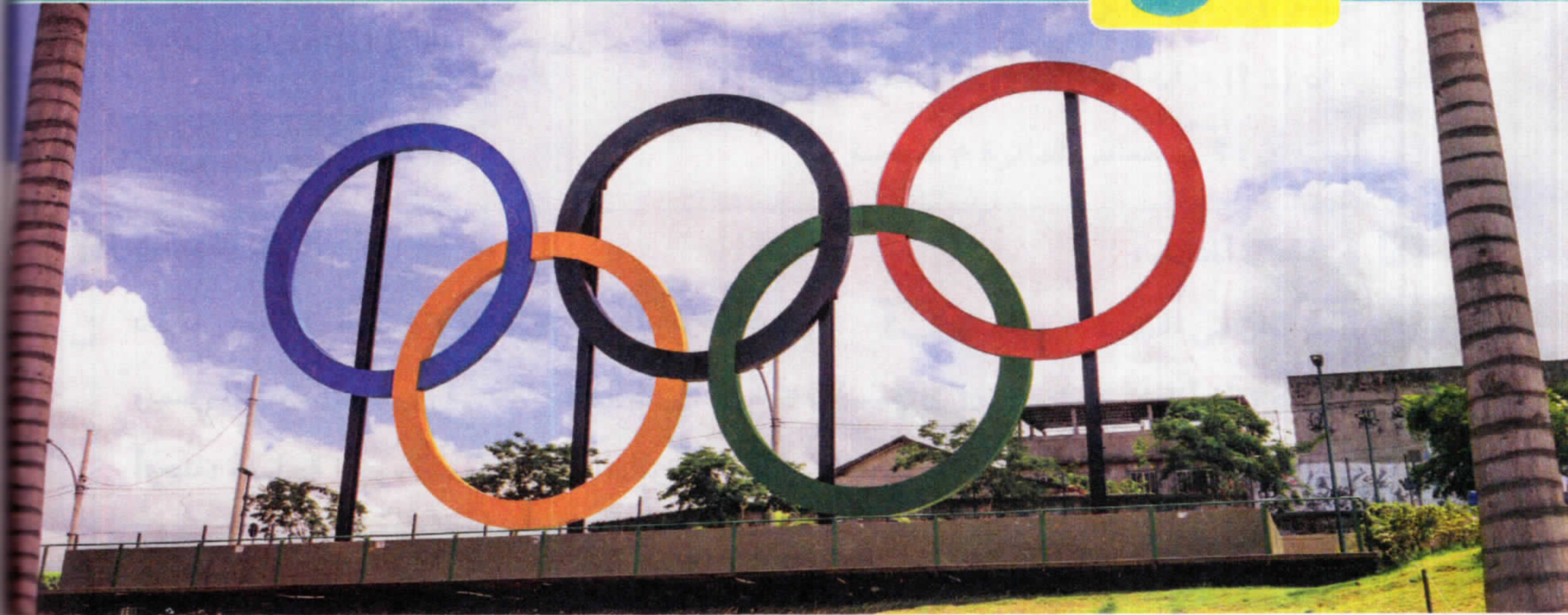
١ $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{م ن}}$

٢ Δ حـ م ن متساوى الساقين.

٣ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{م ن}}$

(القليوبية ٠٤)

موضع دائرة بالنسبة لدائرة أخرى

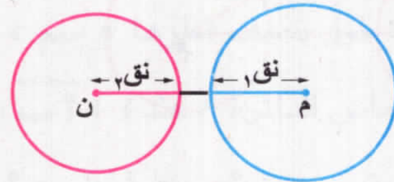


- بفرض دائرتين م ، ن طولا نصفى قطريهما $نق_1$ ، $نق_2$ على الترتيب ، $نق_1 > نق_2$

فإن الخط المستقيم المار بالنقطتين م ، ن يُسمى «خط المركزين»

- **الدائرتان م ، ن تأخذان أحد الأوضاع الستة الآتية :**

إذا كان : م ن > $نق_1 + نق_2$

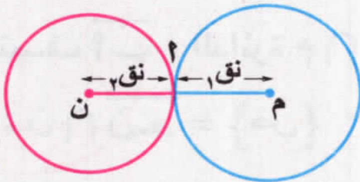


فإن : الدائرتين متباعدتان

لاحظ أن :

- الدائرة م ⋂ الدائرة ن = ∅
- سطح الدائرة م ⋂ سطح الدائرة ن = ∅

إذا كان : م ن = $نق_1 + نق_2$

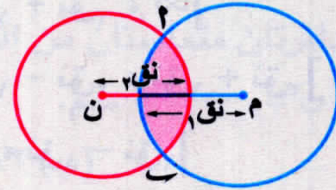


فإن : الدائرتين متماستان من الخارج

لاحظ أن :

- الدائرة م ⋂ الدائرة ن = {أ}
- سطح الدائرة م ⋂ سطح الدائرة ن = {أ}

إذا كان : $نق_1 - نق_2 <$ م ن $< نق_1 + نق_2$



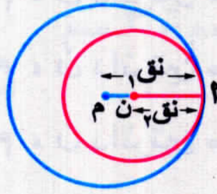
فإن : الدائرتين متقاطعتان

لاحظ أن :

- الدائرة م ∩ الدائرة ن = {أ ، ب}
- سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن

= سطح المنطقة المظللة

إذا كان : م ن $= نق_1 - نق_2$



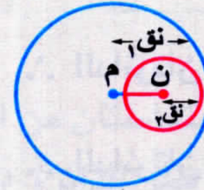
فإن : الدائرتين متماستان من الداخل

لاحظ أن :

- الدائرة م ∩ الدائرة ن = {أ}
- سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن

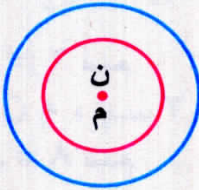
= سطح الدائرة ن

إذا كان : م ن $< نق_1 - نق_2$



فإن : الدائرتين متداخلتان «الدائرة ن داخل الدائرة م»

إذا كان : م ن = صفر

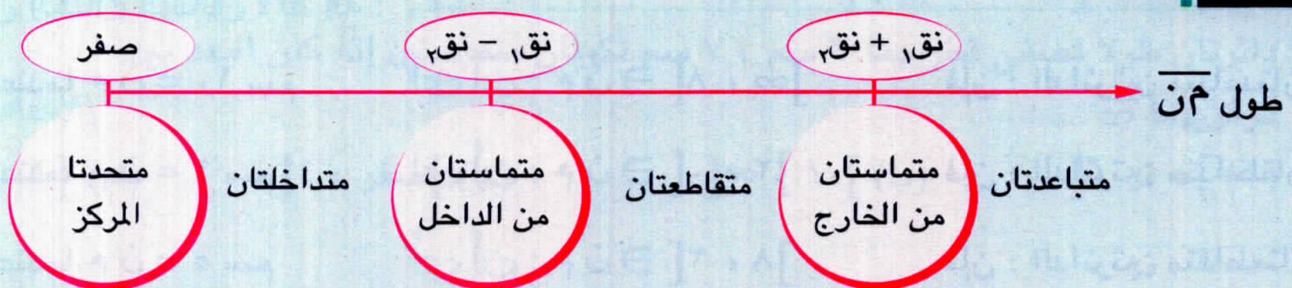


فإن : الدائرتين متحدتا المركز

لاحظ فى الحالتين أن :

- الدائرة م ∩ الدائرة ن = ∅
- سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن

ملخص



ملاحظات من الملخص السابق لاحظ أنه :

1. إذا كانت : م ، ن دائرتين متباعدتين فإن : م ن $\in$]نق$_1$ + نق$_2$ ، ∞[
2. إذا كانت : م ، ن دائرتين متقاطعتين فإن : م ن $\in$]نق$_1$ − نق$_2$ ، نق$_1$ + نق$_2$[
3. إذا كانت : م ، ن دائرتين متداخلتين فإن : م ن $\in$]٠ ، نق$_1$ − نق$_2$[

مثال ١

إذا كان طول نصف قطر الدائرة م = ٥ سم ، طول نصف قطر الدائرة ن = ٣ سم

فبين وضع كل منهما بالنسبة للأخرى فى كل من الحالات الآتية :

١ م ن = ٢ سم	٢ م ن = ٨ سم	٣ م ن = صفر
٤ م ن = ١٠ سم	٥ م ن = ١ سم	٦ م ن = ٥ سم

الحل

∵ نق$_1$ = ٥ سم ، نق$_2$ = ٣ سم ∴ نق$_1$ + نق$_2$ = ٨ سم ، نق$_1$ − نق$_2$ = ٢ سم

١ ∵ م ن = ٢ سم ∴ م ن = نق$_1$ − نق$_2$ ∴ الدائرتان متماستان من الداخل.

٢ ∵ م ن = ٨ سم ∴ م ن = نق$_1$ + نق$_2$ ∴ الدائرتان متماستان من الخارج.

٣ ∵ م ن = صفر ∴ الدائرتان متحدتا المركز.

٤ ∵ م ن = ١٠ سم ∴ م ن > نق$_1$ + نق$_2$ ∴ الدائرتان متباعدتان.

٥ ∵ م ن = ١ سم ∴ م ن < نق$_1$ − نق$_2$ ∴ الدائرتان متداخلتان.

٦ ∵ م ن = ٥ سم ∴ نق$_1$ − نق$_2$ < م ن < نق$_1$ + نق$_2$ ∴ الدائرتان متقاطعتان.

من المثال السابق لاحظ أنه :

1. عندما م ن = ١٠ سم أى أن : م ن $\in$]٨ ، ∞[فإن : الدائرتين متباعدتان
2. عندما م ن = ١ سم أى أن : م ن $\in$]٠ ، ٢[فإن : الدائرتين متداخلتان
3. عندما م ن = ٥ سم أى أن : م ن $\in$]٢ ، ٨[فإن : الدائرتين متقاطعتان

حاول بنفسك ١

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ م ، ن دائرتان متماستان من الخارج طولا نصفى قطريهما ٧ سم ، ٣ سم
فإن : م ن = ... سم. (الشرقية ٢٣ ، دمياط ٢١)
(أ) ٤ (ب) ١٢ (جـ) ٦ (د) ١٠

٢ م ، ن دائرتان متماستان من الداخل طولا نصفى قطريهما ٧ سم ، ١٠ سم
فإن : م ن = ... سم. (الإسماعيلية ٢١)
(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٧ (د) ١٧

٣ إذا كان م ، ن دائرتان طولا نصفى قطريهما ٥ سم ، ٧ سم وكان م ن = ١٢ سم
فإن الدائرتين .... (القليوبية ٢٣)
(أ) متباعدتان. (ب) متماستان من الخارج.
(جـ) متماستان من الداخل. (د) متحدتى المركز.

٤ م ، ن دائرتان طولا نصفى قطريهما ٥ سم ، ٣ سم ، إذا كان : م ن = ٦ سم
فإن الدائرتين تكونان .... (دمياط ٢٢)
(أ) متباعدتين. (ب) متماستين من الخارج.
(جـ) متقاطعتين. (د) متداخلتين.

٥ دائرتان م ، ن متماستان من الداخل ، طول نصف قطر الدائرة ن = ٣ سم ، م ن = ٥ سم
فإن طول نصف قطر الدائرة م = ... سم. (الأقصر ٢٢)
(أ) ٢ (ب) ٨ (جـ) ٥ (د) ٩

٦ إذا كانت الدائرتان م ، ن متماستين من الخارج ، طول نصف قطر إحداهما ٥ سم ، م ن = ٩ سم
فإن طول نصف قطر الأخرى = ... سم. (مطروح ٢٣)
(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٧ (د) ١٤

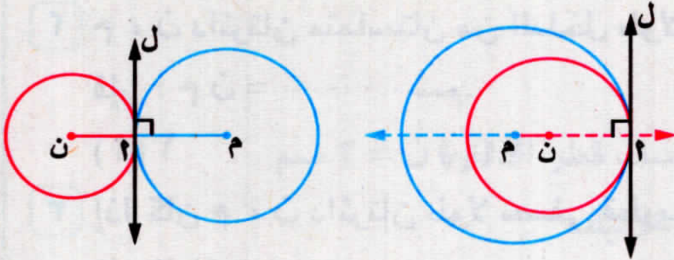
٧ م ، ن دائرتان متقاطعتان فى نقطتين طولا نصفى قطريهما ٣ سم ، ٥ سم
فإن : م ن ∋ .... (كفر الشيخ ٢١)
(أ)]٨ ، ∞[(ب)]٢ ، ∞[(جـ)]٠ ، ٢[(د)]٢ ، ٨[

٨ دائرتان طولا نصفى قطريهما ٣ سم ، ٧ سم تكونان متماستين إذا كان البعد بين
مركزيهما ∋ .... (الإسماعيلية ٢٣)
(أ)]٤ ، ١٠[(ب)]١٠ ، ∞[(جـ)]صفر ، ٤[(د) {٤ ، ١٠}

نتيجة ١

خط المركزين لدائرتين متماستين يمر بنقطة التماس ، ويكون عموديًا على المماس المشترك عند هذه النقطة.

ففى الشكلين المقابلين :



إذا كانت الدائرتان م ، ن

متماستين عند نقطة ا «نقطة التماس»

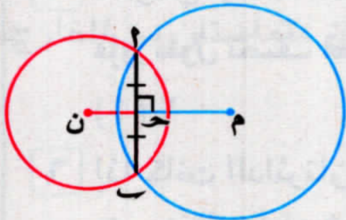
، المستقيم ل مماسًا مشتركًا لهما عند ا

فإن : ا ∈ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ ⊥ المستقيم ل

نتيجة ٢

خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديًا على الوتر المشترك وينصفه.

ففى الشكل المقابل :



إذا كانت الدائرتان م ، ن متقاطعتين فى ا ، ب

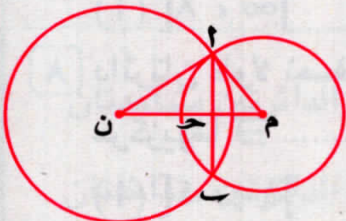
فإن : $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ ⊥ $\overline{\text{ا ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ ينصف $\overline{\text{ا ب}}$

أى أن : ا حـ = ب حـ

وهذا يعنى أن : $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ محور تماثل $\overline{\text{ا ب}}$

مثال ٢

فى الشكل المقابل :



دائرتان م ، ن متقاطعتان فى ا ، ب ، $\overline{\text{ا ب}}$ ∩ $\overline{\text{م ن}}$ = {حـ}

، فإذا كان : م ا = ٦ سم ، ن ا = ٨ سم ، م ن = ١٠ سم

فأوجد : طول $\overline{\text{ا ب}}$

الحـل

المعطيات دائرتان م ، ن متقاطعتان فى أ ، ب ، م أ = ٦ سم ، ن أ = ٨ سم ، م ن = ١٠ سم

المطلوب إيجاد : طول $\overline{\text{أب}}$

البرهان فى Δ أ م ن :

$\because$ (م أ)^2 = ٣٦ ، (ن أ)^2 = ٦٤ ، (م ن)^2 = ١٠٠

$\therefore$ (م ن)^2 = (م أ)^2 + (ن أ)^2

$\therefore$ ق (∠ م أ ن) = ٩٠° (عكس فيثاغورس)

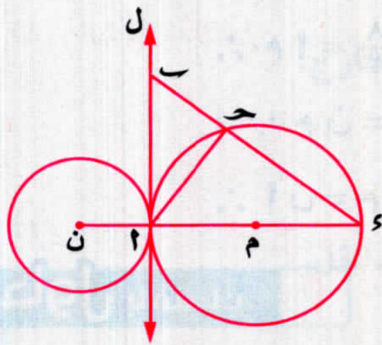
، $\because$ الوتر المشترك $\overline{\text{أب}}$ يقطع $\overline{\text{م ن}}$ فى نقطة حـ

$\therefore$ $\overline{\text{أب}} \perp \overline{\text{م ن}}$ $\therefore$ أ حـ = $\frac{\text{أ م} \times \text{أ ن}}{\text{م ن}}$ = $\frac{٦ \times ٨}{١٠}$ = ٤,٨ سم

، $\because$ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ ينصف $\overline{\text{أب}}$

$\therefore$ أب = ٢ أ حـ = ٢ × ٤,٨ = ٩,٦ سم (وهو المطلوب)

مثال ٣



فى الشكل المقابل :

م ، ن دائرتان متماستان من الخارج فى نقطة أ

، المستقيم ل مماس مشترك لهما عند أ

، $\overline{\text{أء}}$ قطر فى الدائرة م ، ب ∈ ل بحيث أب = م ن = ٦ سم

، رُسمت $\overline{\text{ب ء}}$ فقطعت الدائرة م فى حـ بحيث ب حـ = ٣,٦ سم

١ أثبت أن : ق (∠ أ حـ ء) = ٩٠° ٢ أوجد : طول $\overline{\text{أ ن}}$

الحـل

المعطيات م ، ن دائرتان متماستان من الخارج فى نقطة أ

، المستقيم ل مماس مشترك لهما عند أ

، أب = م ن = ٦ سم ، ب حـ = ٣,٦ سم

المطلوب ١ إثبات أن : ق (∠ أ حـ ء) = ٩٠° ٢ إيجاد : طول $\overline{\text{أ ن}}$

العمـــل نرسم $\overline{مح}$

البرهـان ∵ حم = ءم = م أ = نق

∴ Δ أحء فيه : حم = $\frac{1}{2}$ أء

، ∵ م منتصف $\overline{أء}$

∴ $\overline{حم}$ متوسط فى Δ أحء

∴ ق (∠ أحء) = ٩٠°

(المطلوب أولًا)

، ∵ الدائرتين م ، ن متماستان من الخارج فى أ

، المستقيم ل مماس مشترك لهما عند أ ∴ $\overleftrightarrow{من}$ ⊥ ل

∴ Δ أبء فيه : ق (∠ ء أب) = ٩٠° ، $\overline{أح}$ ⊥ $\overline{بء}$

∴ $(أب)^2$ = بح × بء (إقليدس)

∴ ٣٦ = ٣,٦ × بء ∴ بء = $\frac{٣٦}{٣,٦}$ = ١٠ سم

، ∵ $(أء)^2 = (بء)^2 - (أب)^2$ (فيثاغورس)

∴ $(أء)^2$ = ١٠٠ - ٣٦ = ٦٤ ∴ أء = ٨ سم

∴ م أ = $\frac{٨}{٢}$ = ٤ سم

، ∵ م ن = م أ + أ ن ، ∵ م ن = ٦ سم

∴ أ ن = م ن - م أ = ٦ - ٤ = ٢ سم

(المطلوب ثانيًا)

حاول بنفسك ٢

فى الشكل المقابل :

دائرتان م ، ن متقاطعتان فى أ ، ب

، س منتصف الوتر $\overline{حء}$

، $\overleftrightarrow{ءح} \cap \overleftrightarrow{بأ}$ = {هـ} حيث ق (∠ هـ) = ٦٠°

، $\overleftrightarrow{صو}$ يمس الدائرة م عند و حيث $\overleftrightarrow{نم} \cap \overleftrightarrow{صو}$ = {و}

١ أوجد : ق (∠ ع ن س) ٢ أثبت أن : $\overleftrightarrow{صو}$ // $\overline{أب}$



على موضع دائرة بالنسبة لـدائرة أخـرى



اختبار تفاعلى

● تذكر ● فهم ● تطبيق ● حل مشكلات | أسئلة كتاب الوزارة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان سطح الدائرة م ⋂ سطح الدائرة ن = {أ}
فإن الدائرتين تكونان .... (القليوبية ٢١)

(أ) متماستين من الداخل. (ب) متماستين من الخارج.
(جـ) متقاطعتين. (د) متحدتى المركز.

٢ إذا كانت الدائرة م ⋂ الدائرة ن = {أ ، ب}
فإن الدائرتين م ، ن .... (دمياط ٢٥ ، السويس ٢٢)

(أ) متباعدتان. (ب) متحدتا المركز.
(جـ) متماستان من الخارج. (د) متقاطعتان.

٣ إذا كان سطح الدائرة م ⋂ سطح الدائرة ن = ∅ فإن الدائرتين م ، ن ....

(أ) متماستان من الداخل. (ب) متباعدتان.
(جـ) متقاطعتان. (د) متماستان من الخارج.

٤ إذا كان م ، ن مركزى دائرتين طولا نصفى قطريهما نق$_1$ ، نق$_2$
حيث : م ن > نق$_1$ + نق$_2$ فإن الدائرتين ....

(أ) متماستان من الخارج. (ب) متماستان من الداخل.
(جـ) متباعدتان. (د) متقاطعتان.

٥ إذا كان مجموع طولى نصفى قطرين لدائرتين يساوى البعد بين مركزيهما
فإن الدائرتين تكونان ....

(أ) متباعدتين. (ب) متماستين من الداخل.
(جـ) متماستين من الخارج. (د) متحدتى المركز.

٦ محور التماثل للوتر المشترك $\overline{\text{أب}}$ لدائرتين متقاطعتين م ، ن هو .... (بنى سويف ١٩)

(أ) $\overleftrightarrow{\text{م أ}}$ (ب) $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ (جـ) $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ (د) $\overleftrightarrow{\text{ن أ}}$

٧ خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديًا على .... وينصفه. (الجيزة ١٨)

(أ) القطر (ب) الوتر (جـ) الوتر المشترك (د) المماس

8 خط المركزين لدائرتين متماستين يكون عموديًا على ....

(أ) الوتر المشترك. (ب) المماس المشترك.

(جـ) القطر. (د) نصف القطر.

9 دائرتان م ، ن متماستان من الداخل وطولا نصفى قطريهما ٣ سم ، ٥ سم

فإن : م ن = ... سم (بنى سويف ١٧ ، الغربية ١٥)

(أ) ٨ (ب) ٦ (جـ) ٤ (د) ٢

10 دائرتان م ، ن متماستان من الخارج وطولا نصفى قطريهما ٥ سم ، ٩ سم

فإن : م ن = ... سم (الإسكندرية ٢٣ ، بورسعيد ٢٣ ، ج. سيناء ٢١)

(أ) ١٤ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٩

11 م ، ن دائرتان طولا نصفى قطريهما ٩ سم ، ٤ سم فإذا كان م ن = ٥ سم

فإن الدائرتين تكونان .... (ش. سيناء ٢١ ، الدقهلية ١٧ ، الغربية ١٤)

(أ) متماستين من الخارج. (ب) متماستين من الداخل.

(جـ) متقاطعتين. (د) متباعدتين.

12 دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٨ سم ، ٥ سم فإذا كان م ن = ١٣ سم

فإن الدائرتين م ، ن تكونان .... (الدقهلية ٢٥)

(أ) متقاطعتين. (ب) متماستين من الداخل.

(جـ) متماستين من الخارج. (د) متباعدتين.

13 دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٤ سم ، ٣ سم فإذا كان م ن = ٩ سم

فإن الدائرتين .... (بورسعيد ٠٩)

(أ) متباعدتان. (ب) متقاطعتان. (جـ) متماستان. (د) متداخلتان.

14 إذا كان طولا نصفى قطرى الدائرتين م ، ن هما ٦ سم ، ٣ سم ، وكان م ن = ٢ سم

فإن : م ، ن .... (الدقهلية ١٨)

(أ) متقاطعتان. (ب) متداخلتان.

(جـ) متماستان من الخارج. (د) متباعدتان.

15 إذا كان طول نصف قطر الدائرة م = ٣ سم وطول نصف قطر الدائرة ن = ٥ سم

، م ن = ٦ سم فإن الدائرتين م ، ن .... (الغربية ٠٨)

(أ) متباعدتان. (ب) متداخلتان.

(جـ) متقاطعتان. (د) متماستان من الخارج.

١٦ م ، ن دائرتان طولا قطريهما متساويان ، وكانت م ن = ٣ نق حيث نق طول نصف قطر الدائرة م فإن الدائرتين م ، ن .... (كفر الشيخ ٢٥)

(أ) متباعدتان. (ب) متداخلتان.

(جـ) متقاطعتان. (د) متماستان من الخارج.

١٧ م ، ن دائرتان متقاطعتان ، نق$_1$ = ٣ سم ، نق$_2$ = ٥ سم على الترتيب فإن : م ن ∈ .... (الوادى الجديد ٢٣ ، الإسكندرية ١٦ ، القاهرة ١٦ ، السويس ١١)

(أ)]٠ ، ٢[(ب)]٢ ، ٨[(جـ)]٨ ، ∞[(د)]٣ ، ∞[

١٨ دائرتان طولا نصفى قطريهما ٣ سم ، ٧ سم تكونان متماستين إذا كان البعد بين مركزيهما ∈ .... (المنوفية ٢٥)

(أ)]٤ ، ١٠[(ب)]١٠ ، ∞[(جـ)]٠ ، ٤[(د) {٤ ، ١٠}

١٩ إذا كان طول نصف قطر الدائرة م = طول نصف قطر الدائرة ن = م ن فإن الدائرتين .... (الإسكندرية ٠٥)

(أ) متداخلتان. (ب) متماستان من الخارج.

(جـ) متباعدتان. (د) متقاطعتان.

٢٠ إذا كانت الدائرتان م ، ن متماستين من الداخل وطول نصف قطر إحداهما ٣ سم ، م ن = ٨ سم ، فإن طول نصف قطر الدائرة الأخرى يساوى .... سم (الجيزة ١٧)

(أ) ١٢ (ب) ١١ (جـ) ٦ (د) ٥

٢١ م ، ن دائرتان متماستان حيث م ن = ٦ سم ، وطول نصف قطر الدائرة الكبرى ١٠ سم فيكون طول نصف قطر الدائرة الصغرى = ... سم (الشرقية ٠٥)

(أ) ١٦ (ب) ١٢ (جـ) ٨ (د) ٤

٢٢ م ، ن ، ل ثلاث دوائر متماسة من الخارج مَثْنَى مَثْنَى أطوال أنصاف أقطارها على الترتيب ٥ سم ، ٦ سم ، ٤ سم فإن : محيط Δ م ن ل = ... سم (المنوفية ١١)

(أ) ١٥ (ب) ٣٠ (جـ) ٤ (د) ٦٠

٢٣ م ، ن دائرتان متماستان من الخارج ، نصف قطر الدائرة م = ٤ سم فإذا كان م ن = ٧ سم فإن محيط الدائرة ن = ... سم (المنوفية ١٦)

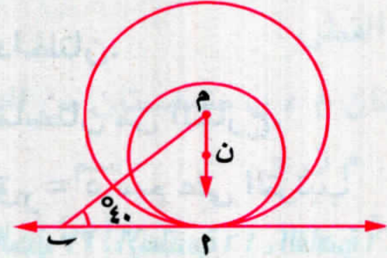
(أ) ٤ π (ب) ٦ π (جـ) ٧ π (د) π

٢٤ دائرة م طول نصف قطرها ٤ سم تمس دائرة ن من الداخل ، م ن = ٧ سم فإن محيط الدائرة م : محيط الدائرة ن = ... (الدقهلية ٠٩)

(أ) ٤ : ٧ (ب) ٣ : ٤ (جـ) ٤ : ٣ (د) ٤ : ١١

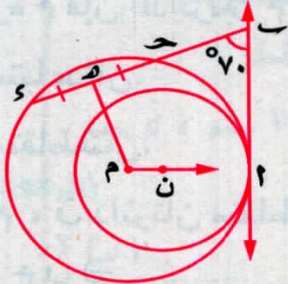
٢ في كل من الأشكال الآتية الدوائر متماسة مَثْنَى مَثْنَى ، باستخدام معلومات كل شكل أكمل :

١



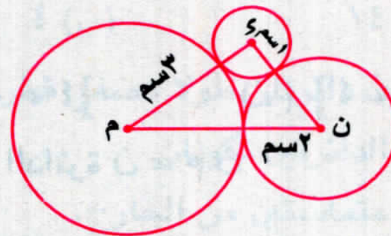
ق (∠ ب م ن) = ...°

٢



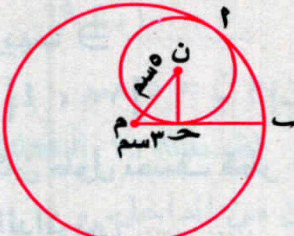
ق (∠ هـ م ن) = ...°

٣



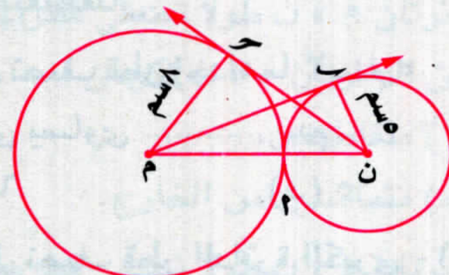
ق (∠ م ء ن) = ...°

٤



ب حـ = ... سم

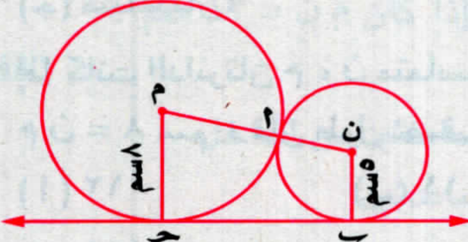
٥



م ب = ... سم

، ن حـ = ... سم

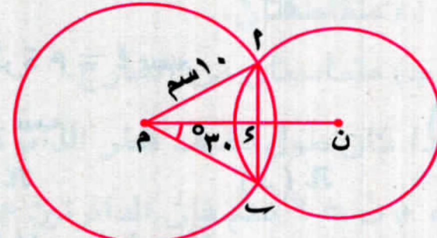
٦



ب حـ = ... سم

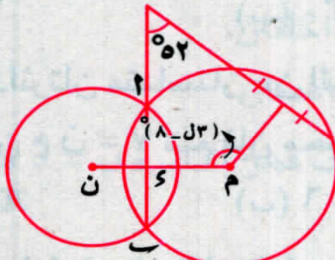
٣ في كل من الشكلين الآتيين م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ، ب أكمل :

١



أ ب = ... سم

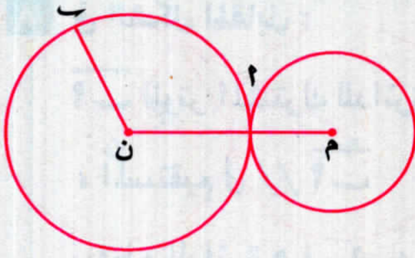
٢



ل = ...

● تذكر ● فهم ○ تطبيق ● حل مشكلات

٤ في الشكل المقابل :



دائرتان م ، ن متماستان فى أ

البعد بين مركزيهما م ن = ١٢ سم

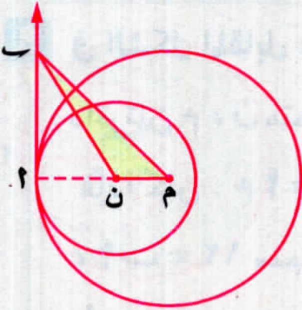
فإذا كان : ن ب = ٧ سم

أوجد : طول $\overline{\text{م أ}}$

(كفر الشيخ ٠٦) «٥ سم»

---

٥ في الشكل المقابل :



م ، ن دائرتان طولا نصفى قطريهما ١٠ سم ، ٦ سم

على الترتيب ومتماستان من الداخل فى أ

، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس مشترك لهما عند أ

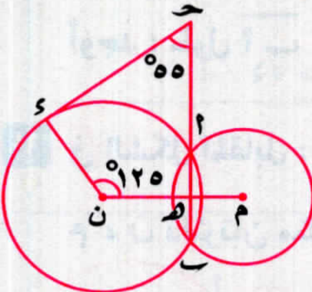
، إذا كانت مساحة المثلث ب م ن = ٢٤ سم٢

أوجد : طول أ ب

(سوهاج ٢٤ ، القليوبية ١٨ ، الأقصر ١٦ ، بورسعيد ١٤) «١٢ سم»

---

٦ في الشكل المقابل :



م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب

، حـ ∈ $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ، ء ∈ الدائرة ن

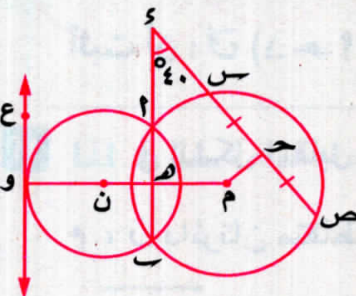
، ق (∠ م ن ء) = ١٢٥° ، ق (∠ ب حـ ء) = ٥٥°

أثبت أن : $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ مماس للدائرة ن عند ء

(البحيرة ٢٤ ، البحر الأحمر ١٩ ، كفر الشيخ ١٧ ، سوهاج ١٥)

---

٧ في الشكل المقابل :



م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب

، حـ منتصف $\overline{\text{س ص}}$ ، ق (∠ ء) = ٤٠°

، $\overleftrightarrow{\text{و ع}}$ مماس للدائرة ن فى و

حيث $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{و ع}}$ = {و}

١ أوجد : ق (∠ حـ م هـ) «١٤٠°»

٢ أثبت أن : $\overleftrightarrow{\text{و ع}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$

(الفيوم ١١)

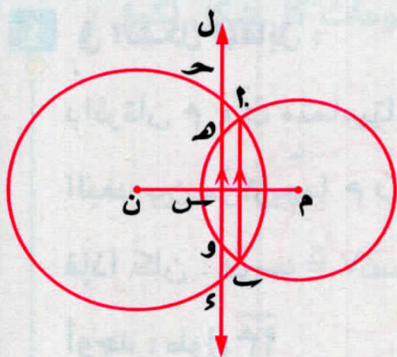
٨ في الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ الوتر المشترك للدائرتين المتقاطعتين م ، ن

، المستقيم ل // $\overline{أب}$

ويقطع الدائرة م فى هـ ، و ، ويقطع الدائرة ن فى حـ ، ء

أثبت أن : حـ هـ = و ء



---

٩ في الشكل المقابل :

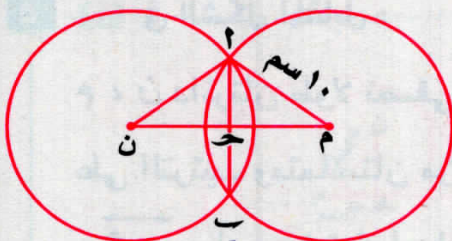
دائرتان م ، ن متطابقتان ومتقاطعتان فى أ ، ب

فإذا كان : م أ = ١٠ سم

، أب = ١٢ سم

فأوجد بالبرهان : طول $\overline{من}$

(المنيا ١٧) «١٦ سم»



---

١٠ دائرتان م ، ن متقاطعتان فى أ ، ب ، م أ = ٩ سم ، أ ن = ١٢ سم ، م ن = ١٥ سم

أوجد : طول $\overline{أب}$

(بوسعيد ١١) «١٤,٤ سم»

---

١١ في الشكل المقابل :

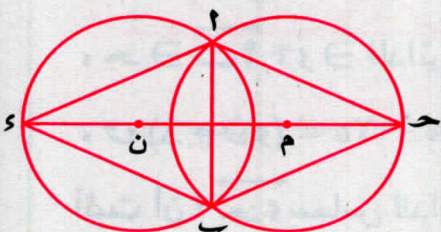
م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب

حيث نقطة حـ تقع على الدائرة م

، نقطة ء تقع على الدائرة ن ، حـ ∈ $\overleftrightarrow{من}$ ، ء ∈ $\overleftrightarrow{من}$

أثبت أن : ق (∠ حـ أ ء) = ق (∠ حـ ب ء)

(الشرقية ١٥)



---

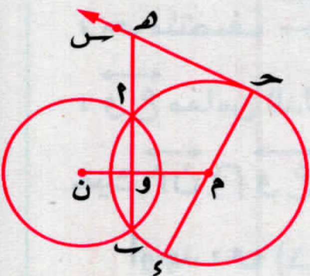
١٢ في الشكل المقابل :

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب ، $\overline{حـ ء}$ قطر فى الدائرة م

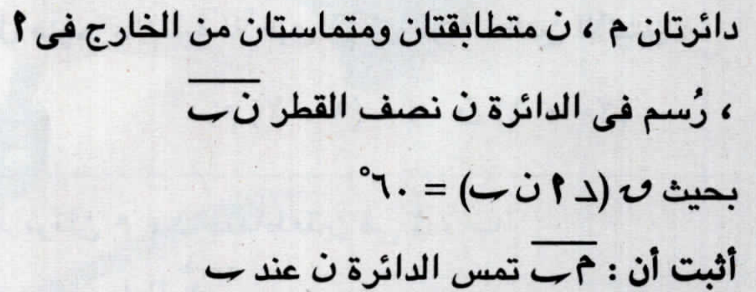
، $\overleftarrow{حـ س}$ مماس للدائرة م عند حـ ، $\overleftarrow{حـ س}$ ∩ $\overleftarrow{ب أ}$ = {هـ}

، $\overleftrightarrow{من}$ ∩ $\overline{أب}$ = {و}

أثبت أن : ق (∠ ء م ن) = ق (∠ حـ هـ ب)



١٣ في الشكل المقابل :



دائرتان م ، ن متطابقتان ومتماستان من الخارج في أ

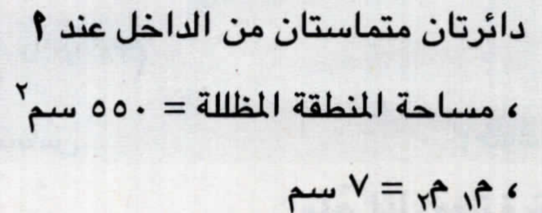
، رُسم في الدائرة ن نصف القطر $\overline{\text{ن ب}}$

بحيث ق (∠ أ ن ب) = ٦٠°

أثبت أن : $\overline{\text{م ب}}$ تمس الدائرة ن عند ب

---

١٤ في الشكل المقابل :



دائرتان متماستان من الداخل عند أ

، مساحة المنطقة المظللة = ٥٥٠ سم²

، م١ م٢ = ٧ سم

أوجد : مجموع طولي نصفي قطريهما. $\left(\pi \approx \frac{22}{7}\right)$ «٢٥ سم»

---

١٥ إذا كان : أ ب = ٣ سم ، ورسمت دائرة مركزها النقطة أ وتمر بالنقطة ب

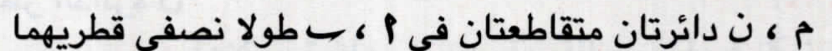
ودائرة أخرى مركزها النقطة ب وتمر بالنقطة أ فإذا تقاطعت الدائرتان في حـ ، ى

فأوجد : [١] ق (∠ أ حـ ب)   [٢] طول الوتر المشترك $\overline{\text{حـ ى}}$ «٦٠° ، ٣ $\sqrt{3}$ سم»

---

١٦ في الشكل المقابل :

م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ، ب طولا نصفي قطريهما



٨ سم ، ٦ سم على الترتيب ، س ص = ٤ سم

ادرس الشكل ثم أجب عن الأسئلة الآتية :

[١] أكمل : ص م = ... سم ، حـ س = ... سم ، حـ ى = ... سم

[٢] هل محيط المثلث أ ن م = طول $\overline{\text{حـ ى}}$ ؟ فسر إجابتك.

[٣] ما قياس زاوية ن أ م ؟

[٤] أوجد مساحة المثلث ن أ م

[٥] ما طول الوتر المشترك $\overline{\text{أ ب}}$ ؟

١٧ في مستوى إحداثي متعامد رُسمت دائرتان م ، ن طولا نصفي قطريهما ٦ وحدة طول ، ٤ وحدة طول على الترتيب. **بيِّن وضع كل منهما بالنسبة للأخرى في كل من الحالتين الآتيتين :**

١ م (−٤ ، ٨) ، ن (٥ ، −٤)　　**٢** م (٢ ، ١) ، ن (٦ ، −٢)

---

١٨ في مستوى إحداثي متعامد إذا كانت الدائرتان م ، ن متقاطعتين في أ ، ب حيث أ (٠ ، ٣) ، ب (−٤ ، −١) **فأوجد :** معادلة $\overleftrightarrow{من}$　«ص = −س − ١»

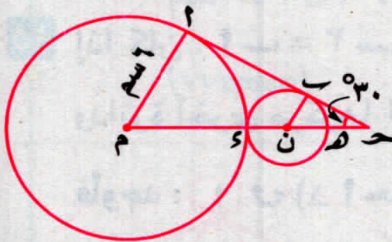
---

١٩ إذا كانت : م (٣ ، ٥) ، ن (−٣ ، −٧) مركزي دائرتين طولا نصفي قطريهما ٤ $\sqrt{٥}$ وحدة طول ، ٢ $\sqrt{٥}$ وحدة طول على الترتيب ، أ (−١ ، −٣)

أثبت أن : الدائرتين م ، ن متماستان عند أ مبينًا نوع التماس.　(حلوان ٠٩)

للمتفوقين

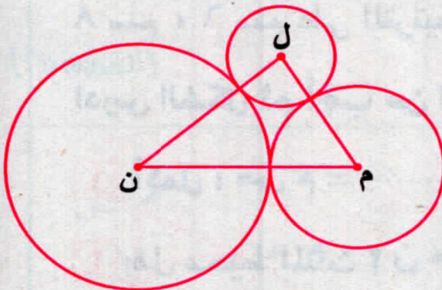
١ في الشكل المقابل :



م ، ن دائرتان متماستان من الخارج في ء ، إذا مُد المماس المشترك للدائرتين ليتلاقى مع امتداد خط المركزين عند حـ وكان ق (∠ حـ) = ٣٠° فإذا كان طول نصف قطر الدائرة م يساوي ٦ سم **أوجد :** طول نصف قطر الدائرة ن　«٢ سم»

---

٢ في الشكل المقابل :

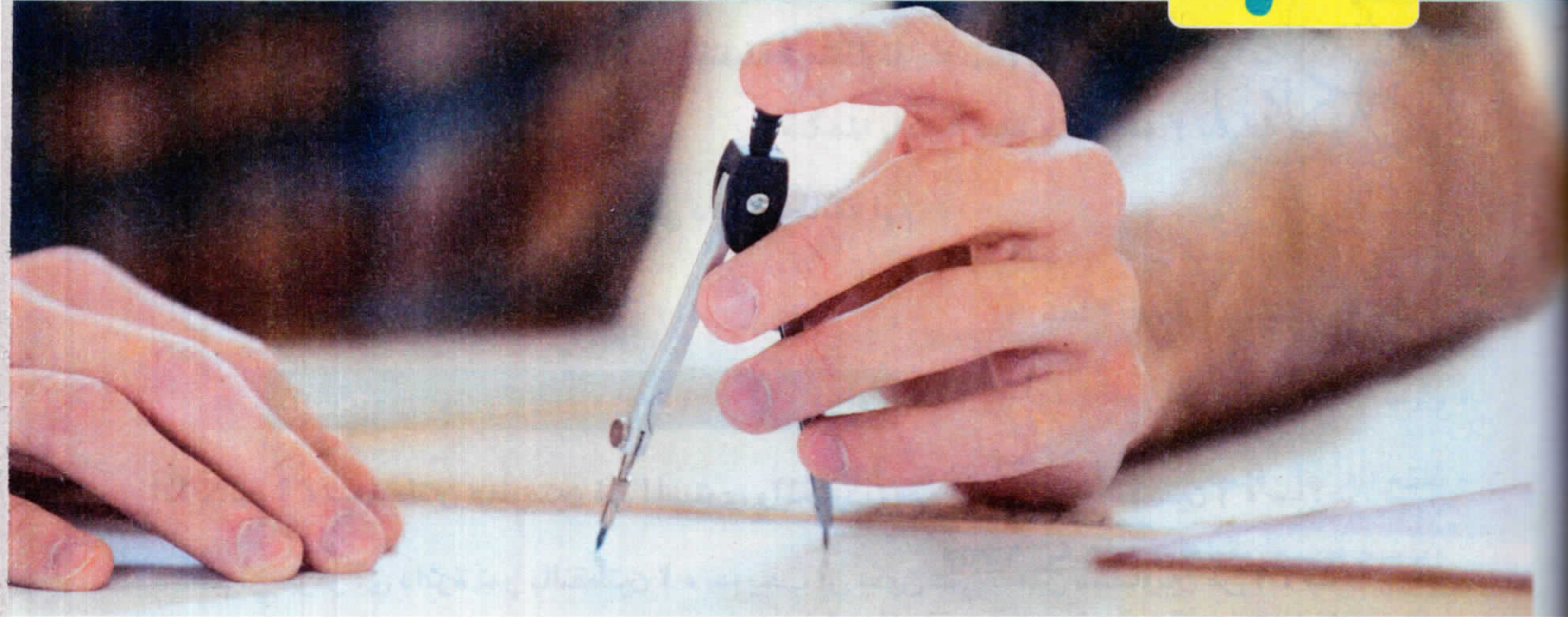


ثلاث دوائر مراكزها م ، ن ، ل متماسة مَثْنَى مَثْنَى فإذا كان : ل م = ٥ سم ، م ن = ٨ سم ، ل ن = ٧ سم

احسب : طول نصف قطر كل منها.　«٢ سم ، ٣ سم ، ٥ سم»

الدرس 4

تعيين الـدائـرة



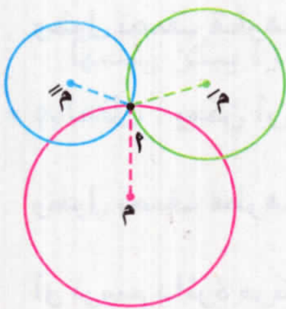
الدائرة تتعين إذا عُلم :

١ مركزها.   ٢ طول نصف قطرها.

وفيما يلى سوف ندرس إمكانية تعيين (رسم) دائرة تحت شروط خاصة.

أولًا رسم دائرة تمر بنقطة معلومة

إذا كانت أ نقطة معلومة فى المستوى والمطلوب رسم دائرة تمر بالنقطة أ :

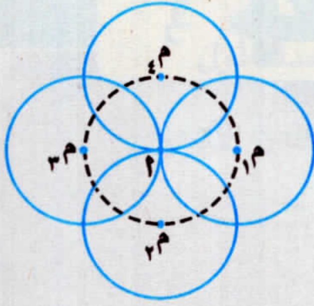


- نفرض أى نقطة أخرى فى المستوى ولتكن م
  ثم نركز فيها بسن الفرجار ونرسم دائرة مركزها م
  وطول نصف قطرها = م أ فتمر هذه الدائرة بالنقطة أ
- وبالمثل : يمكن أن نرسم دائرة مركزها مَ وطول نصف قطرها
  = مَ أ فتمر بالنقطة أ

أو نرسم دائرة مركزها مً وطول نصف قطرها = مً أ فتمر بالنقطة أ وهكذا ...

أى أنه :
يمكن رسم عدد لا نهائى من الدوائر تمر بنقطة معلومة.

• لاحظ أنه :

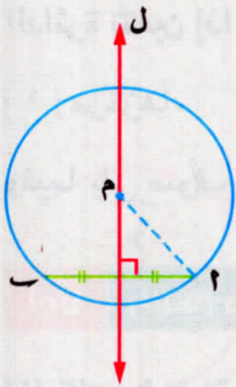


إذا كانت الدوائر المطلوب رسمها لتمر بالنقطة أ متطابقة «أنصاف أقطارها متساوية فى الطول» فإن مراكز هذه الدوائر جميعًا تقع على دائرة مطابقة لهم ومركزها نقطة أ كما بالشكل المقابل.

ثانيًا رسم دائرة تمر بنقطتين معلومتين

إذا كانت أ ، ب نقطتين معلومتين فى المستوى والمطلوب رسم دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب :

• نعلم أن مركز أى دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب يجب أن يكون على بعدين متساويين من أ ، ب

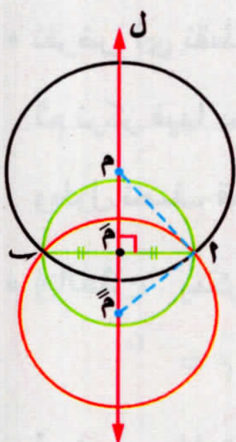


∴ مركز أى دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب يجب أن يقع على محور $\overline{أب}$ وهو المستقيم العمودى على $\overline{أب}$ من منتصفها

، لذلك نرسم المستقيم ل محور $\overline{أب}$

• نأخذ على المستقيم ل أى نقطة مثل م ثم نرسم الدائرة التى مركزها م

وطول نصف قطرها = م أ (أو م ب) فتمر بالنقطتين أ ، ب



• وبالمثل : يمكن أن نرسم دائرة مركزها مَ

وطول نصف قطرها = مَ أ فتمر بالنقطتين أ ، ب

أو نرسم دائرة مركزها مً وطول نصف قطرها = مً أ

فتمر بالنقطتين أ ، ب

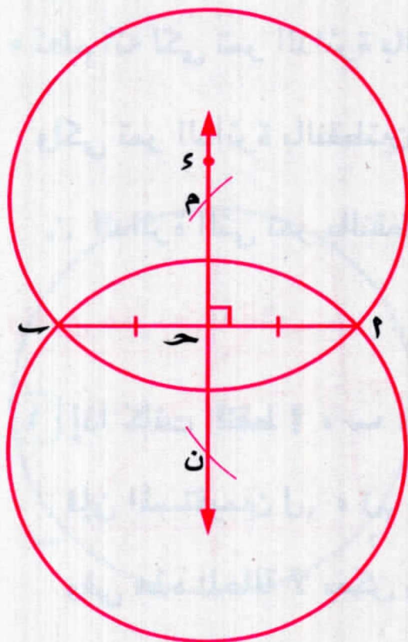
أى أنه :

يوجد عدد لا نهائى من الدوائر التى تمر بالنقطتين أ ، ب ومراكز هذه الدوائر تقع جميعها على محور $\overline{أب}$

مثال ١

باستخدام الأدوات الهندسية ، ارسم $\overline{أب}$ طولها ٣ سم ثم ارسم دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب ، وطول نصف قطرها ٢ سم ، كم عدد الحلول الممكنة ؟

الحل



- نرسم $\overline{أب}$ بحيث أب = ٣ سم
- ونرسم $\overleftrightarrow{حـ ء}$ ⊥ $\overline{أب}$ من منتصفها حـ فيكون $\overleftrightarrow{حـ ء}$ محور $\overline{أب}$
- نفتح الفرجار فتحة طولها ٢ سم ونركز فى أ (أو ب) ونرسم قوسين يقطعان $\overleftrightarrow{حـ ء}$ فى م ، ن
- بنفس الفتحة السابقة نركز فى م ونرسم دائرة ثم نركز فى ن ونرسم دائرة فتكون الدائرتان م ، ن هما دائرتان طول نصف قطر كل منهما ٢ سم وتمران بالنقطتين أ ، ب

ملاحظات

- إذا كانت : $\overline{أب}$ قطعة مستقيمة والمطلوب رسم دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب فإن :

١ إذا كان : نق > $\frac{1}{2}$ أب فإنه يمكن رسم دائرتين (كما فى المثال السابق)

٢ إذا كان : نق = $\frac{1}{2}$ أب فإنه يمكن رسم دائرة واحدة ، وهى أصغر دائرة يمكن رسمها لتمر بالنقطتين أ ، ب وتكون $\overline{أب}$ قطرًا فيها ومركزها هو منتصف $\overline{أب}$

٣ إذا كان : نق < $\frac{1}{2}$ أب فإنه لا يمكن رسم دائرة.

- لا يمكن أن تتقاطع دائرتان فى أكثر من نقطتين.

حاول بنفسك ١

باستخدام الأدوات الهندسية ارسم $\overline{س ص}$ حيث س ص = ٤ سم ثم ارسم دائرة تمر بالنقطتين س ، ص وطول نصف قطرها ٢ سم ، كم عدد الحلول الممكنة ؟

ثالثًا رسم دائرة تمر بثلاث نقط معلومة

إذا كانت أ ، ب ، حـ ثلاث نقط فى المستوى والمطلوب رسم دائرة تمر بالنقط الثلاث أ ، ب ، حـ :

- نعلم أنه لكى تمر الدائرة بالنقطتين أ ، ب يجب أن يقع مركزها على محور $\overline{أب}$ وليكن $ل_1$ ،

ولكى تمر الدائرة بالنقطتين ب ، حـ يجب أن يقع مركزها على محور $\overline{بحـ}$ وليكن $ل_2$

∴ الدائرة التى تمر بالنقط الثلاث أ ، ب ، حـ يقع مركزها على كل من المستقيمين $ل_1$ ، $ل_2$

ونفرق هنا بين حالتين :

1 إذا كانت النقط أ ، ب ، حـ على استقامة واحدة كما فى شكل (1)



شكل (1)

فإن المستقيمين $ل_1$ ، $ل_2$ يكونان متوازيين ولا يتقاطعان.

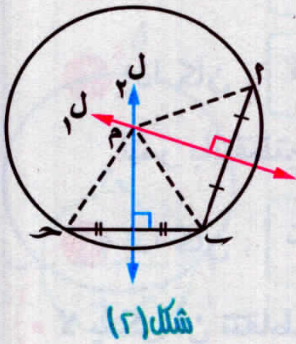
وفى هذه الحالة لا يمكن رسم دائرة تمر

بالنقط الثلاث أ ، ب ، حـ

أى أنه :

لا يمكن رسم دائرة تمر بثلاث نقط تنتمى لمستقيم واحد.

2 إذا كانت النقط أ ، ب ، حـ ليست على استقامة واحدة كما فى شكل (2)



شكل (2)

فإن $ل_1$ ، $ل_2$ يتقاطعان فى نقطة واحدة مثل م

وتكون هى مركز الدائرة التى تمر بالنقط الثلاث أ ، ب ، حـ

ويكون طول نصف قطر هذه الدائرة = م أ = م ب = م حـ

أى أن :

أى ثلاث نقط لا تنتمى لمستقيم واحد تمر بها دائرة وحيدة.

لاحظ أنه :

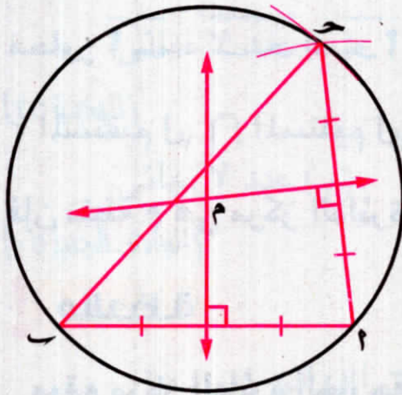
توجد دائرة وحيدة تمر بثلاث نقط أ ، ب ، حـ ليست على استقامة واحدة ومركز هذه الدائرة هو نقطة تقاطع أى محورين من محاور القطع المستقيمة $\overline{أب}$ ، $\overline{بحـ}$ ، $\overline{أحـ}$

مثال ٢

باستخدام الأدوات الهندسية ارسم Δ ٲبحـ الذى فيه : ٲب = ٲحـ = ٣ سم ، بحـ = ٤ سم

ثم ارسم الدائرة المارة بالنقط ٲ ، ب ، حـ

الحـل



- نرسم ٲب طولها ٣ سم
- نفتح الفرجار فتحة طولها ٣ سم ونركز فى ٲ ونرسم قوسًا ،

ثم نفتح الفرجار فتحة طولها ٤ سم ونركز فى ب ونرسم

قوسًا ليقطع القوس السابق فى حـ ثم نرسم ٲحـ ، بحـ

- نرسم محورى ٲب ، ٲحـ فيتقاطعا فى نقطة م
- نركز بسن الفرجار فى م وبفتحة طولها ٲ م (أو ب م أو حـ م) نرسم الدائرة المطلوبة.

حاول بنفسك ٢

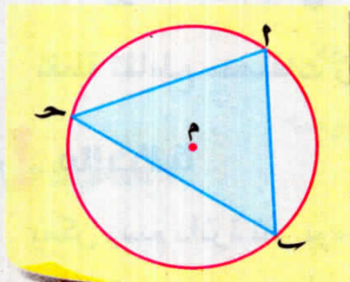
باستخدام الأدوات الهندسية ارسم Δ س ص ع الذى فيه : ق(∠س) = ٨٠° ، س ص = ٤ سم

، س ع = ٣ سم ثم ارسم الدائرة المارة بالنقط س ، ص ، ع

نتيجة ١

الدائرة التى تمر برءوس مثلث تُسمى دائرة خارجة لهذا المثلث.

كما يُقال للمثلث الذى تقع رءوسه على دائرة بأنه مثلث مرسوم داخل هذه الدائرة.



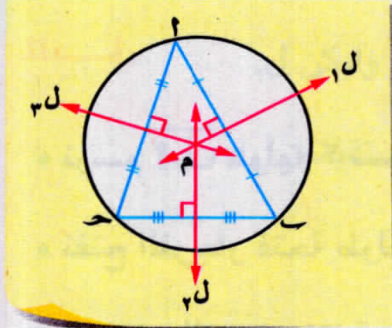
ففى الشكل المقابل :

م هى الدائرة الخارجة للمثلث ٲبحـ

أو Δ ٲبحـ مرسوم داخل الدائرة م

نتيجة ٢

الأعمدة المقامة على أضلاع مثلث من منتصفاتها تتقاطع فى نقطة واحدة هى مركز الدائرة الخارجة لهذا المثلث.



ففى الشكل المقابل :

إذا كانت المستقيمات $ل_١$ ، $ل_٢$ ، $ل_٣$

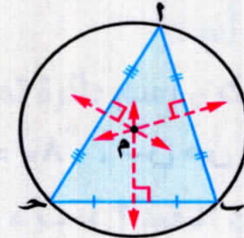
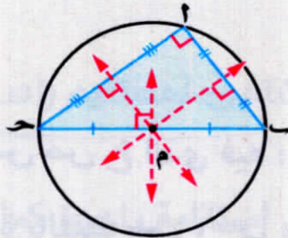
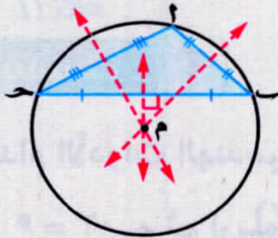
محاور $\overline{أب}$ ، $\overline{بحـ}$ ، $\overline{حـ أ}$ على الترتيب

، المستقيم $ل_١$ $\cap$ المستقيم $ل_٢$ $\cap$ المستقيم $ل_٣$ = {م}

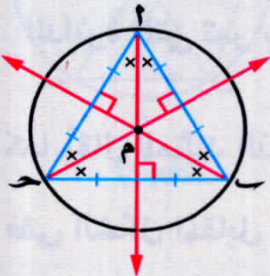
فإن نقطة م هى مركز الدائرة الخارجة للمثلث أ ب حـ

ملاحظة

موقع مركز الدائرة الخارجة للمثلث وليكن نقطة م يختلف حسب نوع المثلث كما بالجدول التالى :

المثلث حاد الزوايا	المثلث قائم الزاوية	المثلث منفرج الزاوية
		
م تقع داخل المثلث	م تقع فى منتصف الوتر	م تقع خارج المثلث

- **حالة خاصة :**



مركز الدائرة الخارجة للمثلث المتساوى الأضلاع هو نقطة تقاطع محاور أضلاعه وهى نفسها نقطة تقاطع متوسطاته وهى نفسها نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة وهى نفسها نقطة تقاطع ارتفاعاته.

ملاحظة

يمكن رسم دائرة تمر برءوس كل من المستطيل والمربع وشبه المنحرف المتساوى الساقين ، بينما لا يمكن رسم دائرة تمر برءوس متوازى الأضلاع والمعين وشبه المنحرف غير المتساوى الساقين.

تمارين 4



على تعيين الدائرة ورسمها بشروط خاصة



اختبار تفاعلى

● تذكر ● فهم ● تطبيق ● حل مشكلات | أسئلة كتاب الوزارة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ عدد الدوائر المارة بثلاث نقط على استقامة واحدة هو .... (الشرقية ٢٥ ، سوهاج ١٨ ، الجيزة ١٦)

(أ) صفر. (ب) واحد. (جـ) ثلاث. (د) عدد لا نهائى.

٢ عدد الدوائر التى تمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة هو .... (البحيرة ٢٥)

(أ) صفر (ب) واحد (جـ) اثنان (د) عدد لا نهائى.

٣ يمكن رسم .... تمر بنقطة معلومة. (الوادى الجديد ٠٥)

(أ) دائرة واحدة (ب) دائرتين

(جـ) ثلاث دوائر (د) عدد لا نهائى من الدوائر

٤ عدد الدوائر التى يمكن رسمها وتمر بطرفى القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ يساوى ....

(القليوبية ٢٢ ، البحيرة ٢٢)

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) عددًا لا نهائى.

٥ يمكن تعيين دائرة بمعلومية .... (الشرقية ٠٨)

(أ) ثلاث نقط على استقامة واحدة. (ب) نقطتين.

(جـ) ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة. (د) نقطة واحدة.

٦ مراكز الدوائر التى تمر بالنقطتين أ ، ب تقع جميعًا على .... (السويس ٢٥ ، الدقهلية ١٧)

(أ) محور تماثل $\overline{أب}$ (ب) $\overline{أب}$

(جـ) العمود المقام على $\overline{أب}$ (د) منتصف $\overline{أب}$

٧ مركز الدائرة الخارجة للمثلث هو نقطة تقاطع .... (الفيوم ١٩ ، كفر الشيخ ١٧ ، قنا ١٧)

(أ) منصفات زواياه الداخلة. (ب) منصفات زواياه الخارجة.

(جـ) ارتفاعاته. (د) محاور تماثل أضلاعه.

٨ إذا كان المثلث أ ب جـ قائم الزاوية فى ب فإن مركز الدائرة المارة برءوسه هو .... (الإسماعيلية ٠٣)

(أ) منتصف $\overline{أب}$ (ب) منتصف $\overline{أجـ}$

(جـ) منتصف $\overline{بجـ}$ (د) خارج المثلث.

٩ عدد الدوائر التى مركزها (٧ ، ٤) وتمر بالنقطة (٣ ، ١) هو .... (سوهاج ٢٣)

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) ٥ (د) عدد لا نهائى.

١٠ لا يمكن رسم دائرة تمر برءوس .... (بنى سويف ١٧ ، الدقهلية ١٣ ، الشرقية ١٢)

(أ) مستطيل. (ب) مثلث. (جـ) مربع. (د) معين.

١١ يمكن رسم دائرة تمر برؤوس .... (الجيزة ٢٥ ، بورسعيد ٢٣ ، الشرقية ١٩ ، سوهاج ١٨)

(أ) معين. (ب) مربع. (جـ) متوازى أضلاع. (د) شبه منحرف.

١٢ أ ب حـ ء معين فإن عدد الدوائر التى يمكن أن تمر بالرؤوس أ ، ب ، حـ يساوى .... (الغربية ٢٣)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائى.

١٣ إذا كانت : أ ب = ٦ سم فإن عدد الدوائر التى تمر بالنقطتين أ ، ب وطول نصف قطر كل منها ٦ سم يساوى .... (الشرقية ٢٤)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٦

١٤ أ ، ب نقطتان فى المستوى حيث أ ب = ٥,٤ سم فإن عدد الدوائر التى طول نصف قطر كل منها ٢,٧ سم وتمر بالنقطتين أ ، ب هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائى.

١٥ إذا كانت : $\overline{\text{أ ب}}$ قطعة مستقيمة طولها ٤ سم فإن طول نصف قطر أصغر دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب يساوى .... سم (الدقهلية ٢٣ ، المنوفية ١٦)

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

١٦ طول نصف قطر أصغر دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب يساوى .... (كفر الشيخ ٢٥)

(أ) أ ب (ب) ٢ أ ب (جـ) $\frac{١}{٢}$ أ ب (د) $\frac{١}{٣}$ أ ب

١٧ إذا كانت : أ ب = ١٠ سم فإن محيط أصغر دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب يساوى .... سم. (القاهرة ٢٥)

(أ) ١٠ (ب) ٢٥ (جـ) ١٠ π (د) ٢٥ π

١٨ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب طولا ضلعى القائمة ٦ سم ، ٨ سم فإن مساحة الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ = ... π سم^{٢}. (المنوفية ٢٥ ، الشرقية ٢٣)

(أ) ٣٦ (ب) ٦٤ (جـ) ٢٥ (د) ١٠٠

● تذكر ● فهم ● تطبيق ● حل مشكلات

٢ ل مستقيم فى المستوى ، أ نقطة تبعد عن المستقيم ل بمقدار ٢ سم بيِّن كيف ترسم دائرة طول نصف قطرها ٣ سم بحيث تمر بالنقطة أ ويقع مركزها على المستقيم ل ، كم عدد الحلول ؟

٣ إذا كانت أ ∋ المستقيم ل فارسم دائرة م تمر بنقطة أ
، يكون طول نصف قطرها ٣ سم عندما : (أسيوط ١١)

١ م ∋ المستقيم ل - كم دائرة يمكن رسمها ؟ ٢ م ∌ المستقيم ل - كم دائرة يمكن رسمها ؟

٤ ارسم $\overline{أب}$ طولها ٦ سم ، ثم ارسم دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب وطول نصف قطرها ٥ سم كم عدد الحلول الممكنة ؟ ثم أوجد بالبرهان بُعد مركز الدائرة عن $\overline{أب}$ (دمياط ١٧) «٤ سم»

٥ باستخدام أدواتك الهندسية ارسم $\overline{أب}$ طولها ٤ سم ثم ارسم على شكل واحد :

١ دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب وطول قطرها ٥ سم ، ما عدد الحلول الممكنة ؟

٢ دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب وطول نصف قطرها ٢ سم ، ما عدد الحلول الممكنة ؟

٣ دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب وطول قطرها ٣ سم ، ما عدد الحلول الممكنة ؟

٦ $\overline{أب}$ قطعة مستقيمة طولها ٦ سم ، ارسم الدائرة التى تمر بالنقطتين أ ، ب وطول نصف قطرها أصغر ما يمكن. (الأقصر ٠٥)

٧ مستخدمًا الأدوات الهندسية ارسم قطعة مستقيمة $\overline{أب}$ طولها ٦ سم ، ثم ارسم $\overleftarrow{أحـ}$ بحيث ق (∠ حـ أ ب) = ٦٠° ، ارسم دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب ويقع مركزها على $\overleftarrow{أحـ}$ ثم احسب طول نصف قطرها. (الدقهلية ١٧) «٦ سم»

٨ ارسم دائرة طول نصف قطرها ٣ سم تمس مستقيمًا ل ، ثم اذكر كم حلًا للمسألة. (الجيزة ٠٦)

٩ باستخدام الأدوات الهندسية ارسم المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ ب = ٤ سم
، ب حـ = ٥ سم ، حـ أ = ٦ سم ثم ارسم الدائرة المارة بالنقاط أ ، ب ، حـ
ما نوع المثلث أ ب حـ بالنسبة لقياسات زواياه ؟ وأين يقع مركز الدائرة بالنسبة للمثلث ؟

١٠ ارسم المثلث أ ب حـ القائم الزاوية فى ب حيث أ ب = ٤ سم ، ب حـ = ٣ سم ، ثم ارسم الدائرة الخارجة لهذا المثلث. أين يقع مركز الدائرة بالنسبة لأضلاع هذا المثلث ؟ (دمياط ١٨)

١١ ارسم المثلث أ ب حـ المتساوى الأضلاع والذى طول ضلعه ٤ سم ، ارسم الدائرة الخارجة للمثلث أ ب حـ

١ حدد موضع مركز الدائرة بالنسبة إلى :
ارتفاعات المثلث – متوسطات المثلث – منصفات زوايا رءوس المثلث.

٢ كم عدد محاور التماثل للمثلث المتساوى الأضلاع ؟

---

١٢ ارسم Δ أ ب حـ المتساوى الساقين فيه : ق(∠ أ ب حـ) = ١٢٠° ، ب حـ = ٤ سم
ثم عيّن مركز الدائرة المارة برؤوسه وأوجد طول نصف قطرها. (الدقهلية ١١) «٤ سم»

---

١٣ ارسم المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ ب = ٦ سم ، أ حـ = ٤ سم ، ق(∠ ب أ حـ) = ٦٠°
ثم ارسم دائرة تمر بالنقطتين أ ، حـ بحيث يقع مركزها على $\overline{أب}$

---

١٤ إذا كانت : أ(٢ ، ٠) ، ب(–٢ ، ٣) فارسم دائرة م طول نصف قطرها ٤ وحدات طول وتمر بالنقطتين أ ، ب كم حلًا للمسألة ؟ (ش. سيناء ٠٩)

---

١٥ إذا كانت : أ(١ ، ٣) ، ب(١ ، –١) ، حـ(–٣ ، –١)
فأوجد إحداثيي م مركز الدائرة المارة برءوس Δ أ ب حـ «(–١ ، ١)»

للمتفوقين

١ ارسم المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ ب = ٦ سم ، ق(∠ أ) = ٤٠° وطول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب حـ يساوى ٥ سم ، وإذا كانت ء منتصف $\overline{أب}$ ،
فاحسب طول $\overline{مء}$ حيث م مركز الدائرة الخارجة للمثلث. «٤ سم»

---

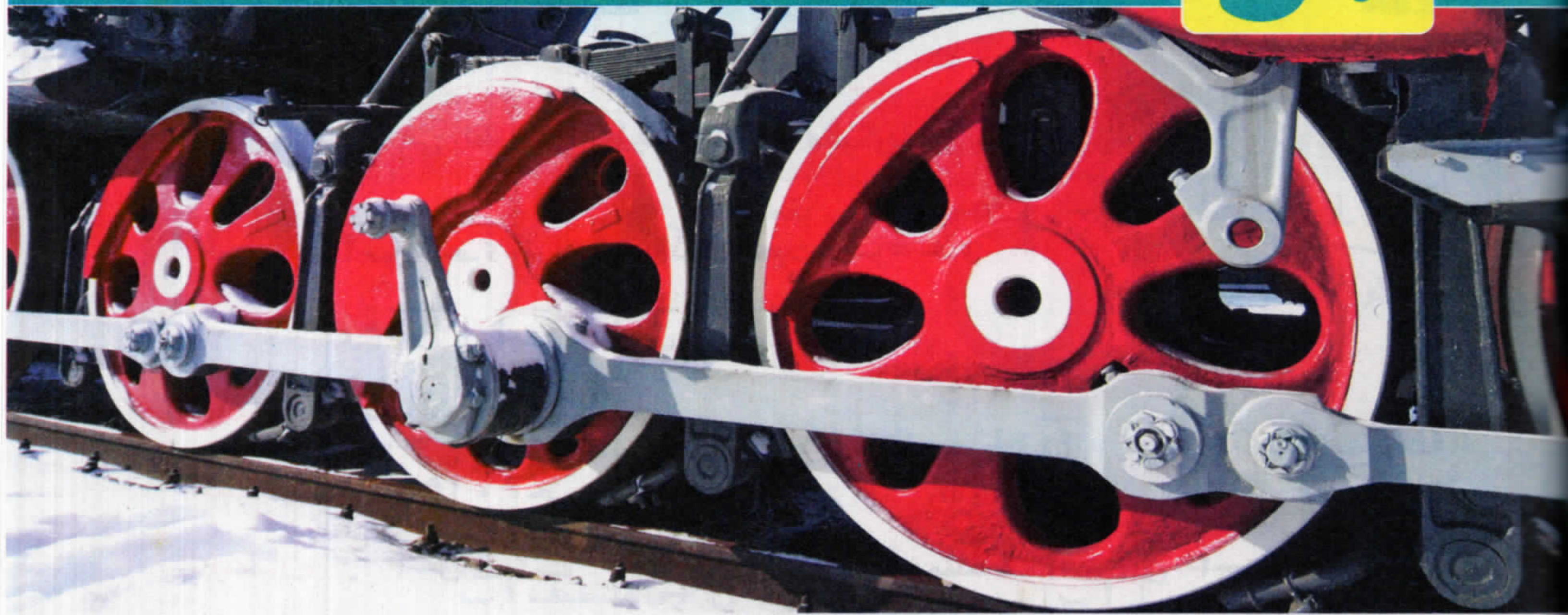
٢ ارسم Δ أ ب حـ القائم الزاوية فى ب بحيث : أ ب = ٤ سم ، ق(∠ أ) = ٣٠°
ثم ارسم الدائرة م بحيث $\overline{أب}$ وتر فيها ، $\overline{أحـ}$ مماسة لها عند أ

١ أثبت أن : Δ أ ب م متساوى الأضلاع واحسب مساحته. «٤ $\sqrt{3}$ سم²»

٢ أوجد : مساحة الدائرة م «١٦ π سم²»

● تذكر ● فهم ○ تطبيق ● حل مشكلات

الدرس 5 علاقة أوتار الدائرة بمركزها



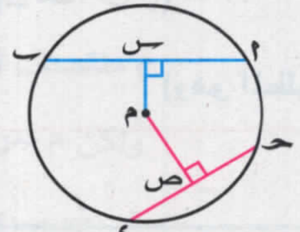
تمهيد

إذا كانت م دائرة ، $\overline{أب}$ وترًا فيها يبعد عن مركزها مسافة قدرها م س

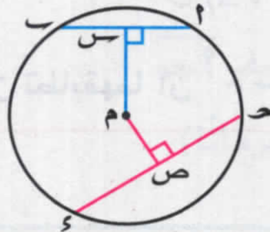
، $\overline{حء}$ وترًا آخر يبعد عن مركزها مسافة قدرها م ص

والأشكال الثلاثة الآتية تعين ثلاثة أوضاع لهذين الوترين بالنسبة لبعدهما عن مركز الدائرة م :

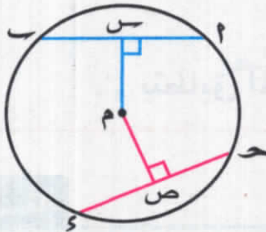
شكل(١)



شكل(٢)



شكل(٣)



باستخدام المسطرة تحقق بنفسك من صحة المعلومات الآتية :

شكل(١)	شكل(٢)	شكل(٣)
أب > حء	أب < حء	أب = حء
، م س < م ص	، م س > م ص	، م س = م ص

- من شكل (١) ، (٢) نستنتج أنه :

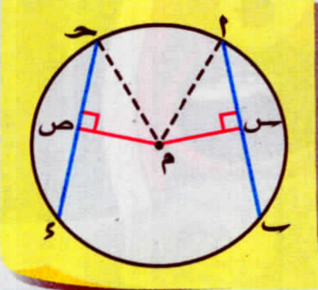
> كلما قل بُعد الوتر عن مركز الدائرة م فإن طوله يزداد ، والعكس صحيح

أي أنه : **توجد علاقة بين طول الوتر وبُعده عن مركز الدائرة.**

علاقة أوتار الدائرة بمركزها

نظرية

الأوتار المتساوية فى الطول فى دائرة على أبعاد متساوية من مركزها.



المعطيات $\overline{أب}$ ، $\overline{حـ ء}$ وتران فى دائرة م حيث أب = حـ ء

، $\overline{م س} \perp \overline{أب}$ ، $\overline{م ص} \perp \overline{حـ ء}$

المطلوب إثبات أن : م س = م ص

العمل نرسم $\overline{م أ}$ ، $\overline{م حـ}$

البرهان ∵ $\overline{م س} \perp \overline{أب}$ ∴ س منتصف $\overline{أب}$ أى أ س = $\frac{1}{2}$ أ ب

، ∵ $\overline{م ص} \perp \overline{حـ ء}$ ∴ ص منتصف $\overline{حـ ء}$ أى حـ ص = $\frac{1}{2}$ حـ ء

، ∵ أ ب = حـ ء (معطى) ∴ أ س = حـ ص

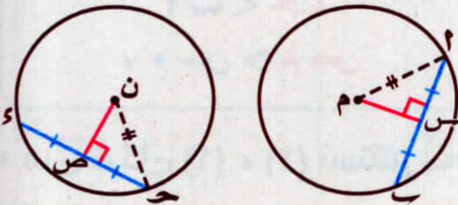
∴ ΔΔ أ س م ، حـ ص م فيهما :
- أ س = حـ ص (برهانًا)
- م أ = م حـ = نق
- ق (∠ أ س م) = ق (∠ حـ ص م) = 90°

∴ يتطابق المثلثان وينتج من تطابقهما أن : م س = م ص (وهو المطلوب)

نتيجة

الأوتار المتساوية فى الطول فى الدوائر المتطابقة على أبعاد متساوية من المركز.

ففى الشكل المقابل :



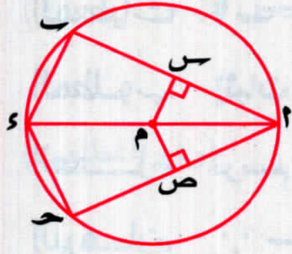
إذا كانت الدائرتان م ، ن متطابقتين ، أب = حـ ء

، $\overline{م س} \perp \overline{أب}$ ، $\overline{ن ص} \perp \overline{حـ ء}$

فإن : م س = ن ص

مثال ١

في الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ وتران متساويان في الطول في دائرة م ، $\overline{أء}$ قطر فيها

، $\overleftrightarrow{مس} \perp \overline{أب}$ يقطعها في س ، $\overleftrightarrow{مص} \perp \overline{أحـ}$ يقطعها في ص

أثبت أن : ب ء = ء حـ

الحل

المعطيات	أب = أحـ ، $\overline{أء}$ قطر في الدائرة م ، $\overline{مس} \perp \overline{أب}$ ، $\overline{مص} \perp \overline{أحـ}$
المطلوب	إثبات أن : ب ء = ء حـ

البرهان

∵ $\overline{مس} \perp \overline{أب}$ ∴ س منتصف $\overline{أب}$

، ∵ $\overline{مص} \perp \overline{أحـ}$ ∴ ص منتصف $\overline{أحـ}$

، ∵ أب = أحـ ∴ م س = م ص (نظرية)

∵ Δ أ ء ب فيه :

م منتصف $\overline{أء}$ ، س منتصف $\overline{أب}$ ∴ م س = $\frac{1}{2}$ ب ء

، ∵ Δ أ ء حـ فيه :

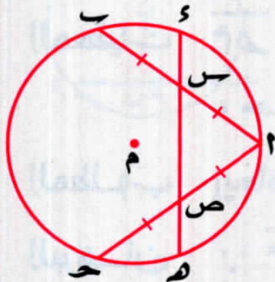
م منتصف $\overline{أء}$ ، ص منتصف $\overline{أحـ}$ ∴ م ص = $\frac{1}{2}$ ء حـ

ولكن م س = م ص (برهانًا)

∴ $\frac{1}{2}$ ب ء = $\frac{1}{2}$ ء حـ ∴ ب ء = ء حـ (وهو المطلوب)

مثال ٢

في الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ وتران متساويان في الطول في الدائرة م

، س منتصف $\overline{أب}$ ، ص منتصف $\overline{أحـ}$

، $\overleftrightarrow{سص}$ يقطع الدائرة م في ء ، هـ

أثبت أن : س ء = ص هـ

الحل

المعطيات	$\overline{أب} = \overline{أحـ}$ ، س منتصف $\overline{أب}$ ، ص منتصف $\overline{أحـ}$
المطلوب	إثبات أن : س ء = ص هـ
العمل	نرسم $\overline{م س}$ ، $\overline{م ص}$ ، ونرسم $\overline{م و} \perp \overleftrightarrow{س ص}$ فيقطعه فى و
البرهان	∵ س منتصف $\overline{أب}$ ∴ $\overline{م س} \perp \overline{أب}$

، ∵ ص منتصف $\overline{أحـ}$ ∴ $\overline{م ص} \perp \overline{أحـ}$

، ∵ أب = أحـ ∴ م س = م ص (نظرية)

∴ Δ م س ص فيه : م س = م ص ، $\overline{م و} \perp \overline{س ص}$

∴ س و = ص و (١)

، ∵ $\overline{م و} \perp \overline{ء هـ}$ ∴ ء و = هـ و (٢)

وبطرح (١) من (٢) : ∴ ء و − س و = هـ و − ص و

∴ س ء = ص هـ (وهو المطلوب)

مثال ٣

فى الشكل المقابل :

م دائرة ، $\overline{أب}$ وتر فيها ، $\overline{م هـ} \perp \overline{أب}$ ، $\overline{م و} \perp \overline{حـ ء}$

، أ م = ٦ سم ، حـ ء = ٥ سم ، أ ب = (س + ٢) سم

فإذا كان : م و > م هـ

فأوجد : قيم س التى تحقق ذلك.

الحل

المعطيات	$\overline{م هـ} \perp \overline{أب}$ ، $\overline{م و} \perp \overline{حـ ء}$ ، أ م = ٦ سم
	، حـ ء = ٥ سم ، أ ب = (س + ٢) سم ، م و > م هـ
المطلوب	إيجاد : قيم س
البرهان	∵ $\overline{م هـ} \perp \overline{أب}$ ، $\overline{م و} \perp \overline{حـ ء}$ ، م و > م هـ

∴ أ ب > حـ ء ∴ س + ٢ > ٥ ∴ س > ٣ (١)

، ∵ $\overline{أب}$ وتر لا يمر بالمركز ∴ أب < طول قطر الدائرة

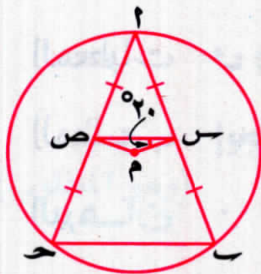
∴ أب < ١٢ ∴ س + ٢ < ١٢ ∴ س < ١٠ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : ٣ < س < ١٠

∴ س ∈]٣ ، ١٠[(وهو المطلوب)

حاول بنفسك ١

في الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث مرسوم داخل الدائرة م بحيث أ ب = أ حـ

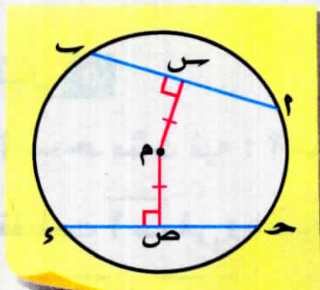
، س منتصف $\overline{أب}$ ، ص منتصف $\overline{أحـ}$

فإذا كان : ق (∠ ص س م) = ٢٠°

أوجد : ق (∠ حـ ص س)

عكس النظرية

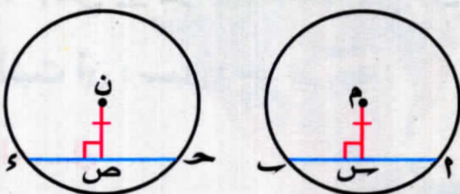
في الدائرة الواحدة (أو في الدوائر المتطابقة) إذا كانت الأوتار على أبعاد متساوية من المركز فإنها تكون متساوية في الطول.



أي أنه إذا كان : $\overline{أب}$ ، $\overline{حـ ء}$ وترين في الدائرة م

، $\overline{م س}$ ⊥ $\overline{أب}$ ، $\overline{م ص}$ ⊥ $\overline{حـ ء}$ ، م س = م ص

فإن : أ ب = حـ ء



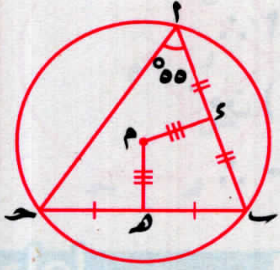
وكذلك : إذا كانت م ، ن دائرتين متطابقتين

، $\overline{أب}$ وترًا في الدائرة م ، $\overline{حـ ء}$ وترًا في الدائرة ن

، $\overline{م س}$ ⊥ $\overline{أب}$ ، $\overline{ن ص}$ ⊥ $\overline{حـ ء}$ ، م س = ن ص

فإن : أ ب = حـ ء

مثال ٤



فى الشكل المقابل :

المثلث أ ب حـ مرسوم داخل دائرة مركزها م ، فإذا كان : ق(∠ أ) = ٥٥°

، ء منتصف $\overline{أب}$ ، هـ منتصف $\overline{بحـ}$ ، م ء = م هـ

أوجد : ق(∠ ب)

الحل

المعطيات	ق(∠ أ) = ٥٥° ، ء منتصف $\overline{أب}$ ، هـ منتصف $\overline{بحـ}$ ، م ء = م هـ
المطلوب	إيجاد : ق(∠ ب)
البرهان	∵ ء منتصف $\overline{أب}$ ∴ $\overline{مء} \perp \overline{أب}$
	، ∵ هـ منتصف $\overline{بحـ}$ ∴ $\overline{مهـ} \perp \overline{بحـ}$
	، ∵ م ء = م هـ ∴ أ ب = حـ ب
	∴ فى Δ أ ب حـ : ∵ ق(∠ أ) = ٥٥° ، أ ب = ب حـ
	∴ ق(∠ حـ) = ق(∠ أ) = ٥٥°
	∴ ق(∠ ب) = ١٨٠° - (٥٥° + ٥٥°) = ٧٠° (وهو المطلوب)

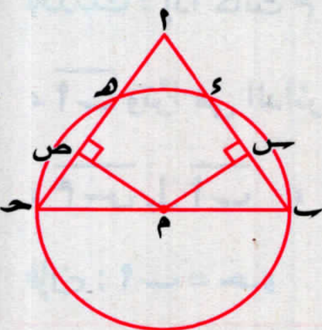
مثال ٥

أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = أ حـ ، رُسمت دائرة مركزها م ، وقطرها $\overline{بحـ}$

فقطعت $\overline{أب}$ فى ء وقطعت $\overline{أحـ}$ فى هـ ، رُسم $\overleftarrow{مس} \perp \overline{بء}$ يقطعها فى س

، $\overleftarrow{مص} \perp \overline{حـهـ}$ يقطعها فى ص

أثبت أن : ب ء = حـ هـ



الحل

المعطيات	أ ب = أ حـ ، $\overline{بحـ}$ قطر فى الدائرة م
	، $\overline{مس} \perp \overline{بء}$ ، $\overline{مص} \perp \overline{حـهـ}$
المطلوب	إثبات أن : ب ء = حـ هـ

البرهان ∵ ΔΔ م س ب ، م ص حـ فيهما :

م ب = م حـ (طولا نصفى قطرين)

ق (∠ م س ب) = ق (∠ م ص حـ) = ٩٠°

ق (∠ ب) = ق (∠ حـ) (لأن : أ ب = أ حـ)

∴ Δ م س ب ≡ Δ م ص حـ

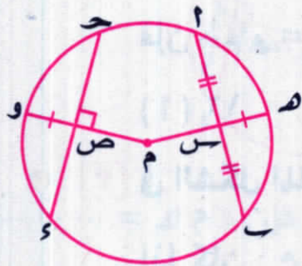
وينتج أن : م س = م ص

، ∵ $\overline{\text{م س}}$ ⊥ $\overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{م ص}}$ ⊥ $\overline{\text{حـ هـ}}$

∴ ب ء = حـ هـ (وهو المطلوب)

حاول بنفسك ٢

في الشكل المقابل :



$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{حـ ء}}$ وتران في دائرة مركزها م ، $\overline{\text{م و}}$ ⊥ $\overline{\text{حـ ء}}$ يقطعه في ص ، س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، س هـ = ص و

أثبت أن : أ ب = حـ ء



على علاقة أوتار الدائرة بمركزها



اختبار تفاعلى

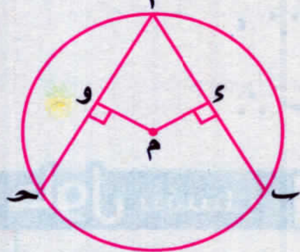
● تذكر ● فهم ● تطبيق ● حل مشكلات | أسئلة كتاب الوزارة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان : $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ وتران لدائرة ، أب = ٥ سم ، أحـ = ٣ سم ، فإن بعد الوتر $\overline{أب}$ عن مركز الدائرة .... بعد الوتر $\overline{أحـ}$ عن مركز الدائرة. (القاهرة ٢٥)

(أ) < (ب) ≤ (جـ) = (د) >

٢ فى الشكل المقابل :



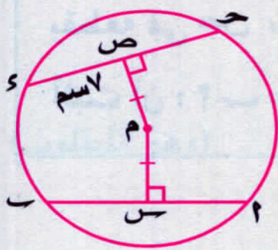
أب = أحـ ، $\overline{مء}$ ⊥ $\overline{أب}$ ، $\overline{مو}$ ⊥ $\overline{أحـ}$

فإذا كانت : مء = ٦ سم

فإن : م و = ... سم (القليوبية ٢١)

(أ) ١٢ (ب) ٨ (جـ) ٦ (د) ٣

٣ فى الشكل المقابل :

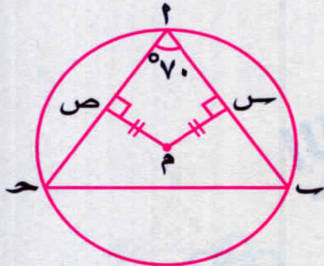


إذا كان : م س = م ص ، ص ء = ٧ سم

فإن : أب = ... سم

(أ) ٣,٥ (ب) ٧ (جـ) ١٤ (د) ٤٩

٤ فى الشكل المقابل :



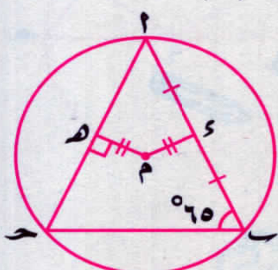
أب حـ مثلث مرسوم داخل الدائرة م ، $\overline{مس}$ ⊥ $\overline{أب}$

، $\overline{مص}$ ⊥ $\overline{أحـ}$ ، م س = م ص ، ق (∠ أ) = ٧٠°

فإن : ق (∠ حـ) = ...

(أ) ٣٥° (ب) ٥٥° (جـ) ٧٠° (د) ٨٠°

٥ فى الشكل المقابل :

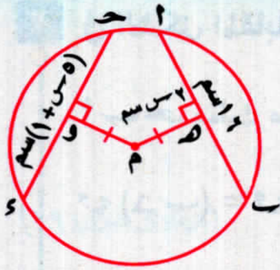


إذا كان : مء = م هـ ، ق (∠ ب) = ٦٥° فإن : ق (∠ أ) = ...

(أ) ٥٠° (ب) ٦٥°

(جـ) ٧٠° (د) ٨٠°

٦ في الشكل المقابل :



إذا كان : $\overline{مهـ} \perp \overline{اب}$ ، $\overline{مو} \perp \overline{حـ ء}$

، م هـ = م و ، اب = ١٦ سم

، م هـ = ٢ س سم ، حـ ء = (٥ س + ١) سم

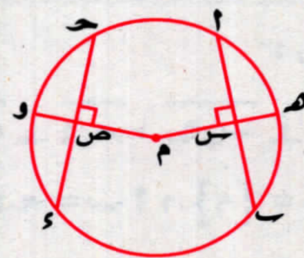
فإن : هـ م = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٠

---

٢ ادرس الشكل ثم أكمل :

١

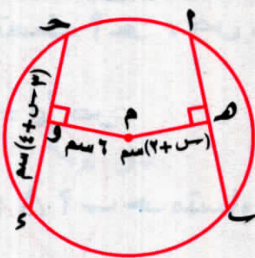


إذا كان : اب = حـ ء فإن : م س = ...

، ∵ م هـ = ...

∴ هـ س = ...

٢

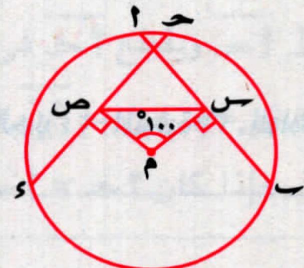


إذا كان : اب = حـ ء فإن : م هـ = ...

∴ س = ... سم

∴ حـ ء = ... سم

٣



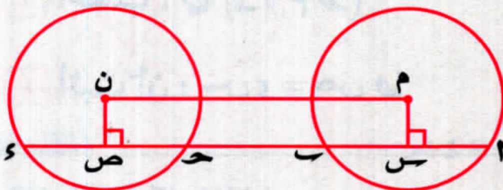
إذا كان : اب = حـ ء فإن : م س = ...

، في Δ م س ص :

∵ ق (∠ س م ص) = ١٠٠°

∴ ق (∠ م س ص) = ...°

٤



إذا كانت : م ، ن دائرتين متطابقتين

، اب = حـ ء

فإن : م س = ...

والشكل م س ص ن ....

٣ في الشكل المقابل :



ا ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة م فيه :

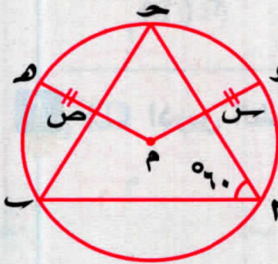
ق (∠ ب) = ق (∠ حـ)

، س منتصف $\overline{اب}$ ، $\overline{مص}$ ⊥ $\overline{احـ}$

أثبت أن : م س = م ص (الإسماعيلية ٢٥ ، البحيرة ٢٥ ، أسيوط ٢٣ ، الجيزة ١٩ ، البحيرة ١٩ ، مطروح ١٧)

---

٤ في الشكل المقابل :



في الدائرة م ، ق (∠ ا) = ٦٠°

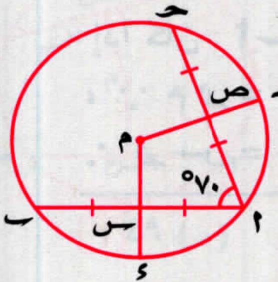
، س منتصف $\overline{احـ}$ ، ص منتصف $\overline{بحـ}$

، و س = هـ ص

أثبت أن : Δ ا ب حـ متساوي الأضلاع. (الشرقية ١٨)

---

٥ في الشكل المقابل :



$\overline{اب}$ ، $\overline{احـ}$ وتران متساويان في الطول في الدائرة م

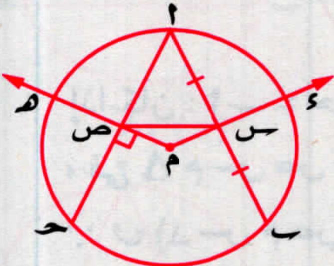
، س منتصف $\overline{اب}$ ، ص منتصف $\overline{احـ}$ ، ق (∠ حـ ا ب) = ٧٠°

[١] احسب : ق (∠ ء م هـ) «١١٠°»

[٢] أثبت أن : س ء = ص هـ (الوادي الجديد ٢٤ ، المنوفية ٢٣ ، الوادي الجديد ١٩ ، بورسعيد ١٨)

---

٦ في الشكل المقابل :



$\overline{اب}$ ، $\overline{احـ}$ وتران متساويان في الطول في الدائرة م

، س منتصف $\overline{اب}$ ، $\overleftarrow{مس}$ يقطع الدائرة في ء

، $\overleftarrow{مص}$ ⊥ $\overline{احـ}$ يقطعه في ص ويقطع الدائرة في هـ

أثبت أن : [١] س ء = ص هـ [٢] ق (∠ ص س ب) = ق (∠ س ص حـ) (أسيوط ١٨ ، الغربية ١٣)

٧ $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أحـ}}$ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة م
، س ، ص منتصفا $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أحـ}}$ على الترتيب ، ق (∠ م س ص) = ٣٠°

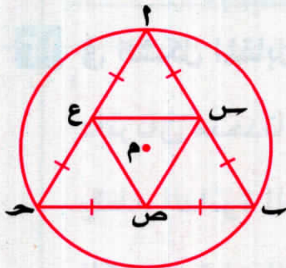
برهن أن : **١** م س ص مثلث متساوى الساقين.

٢ أ س ص مثلث متساوى الأضلاع.

(الوادى الجديد ١٦)

---

٨ في الشكل المقابل :



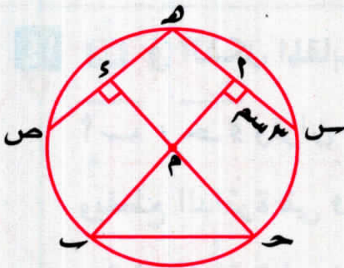
Δ أ ب حـ متساوى الأضلاع مرسوم داخل دائرة م
، س ، ص ، ع منتصفات أضلاعه

برهن أن : م هى مركز الدائرة المارة برؤوس Δ س ص ع

(الفيوم ٢٤)

---

٩ في الشكل المقابل :



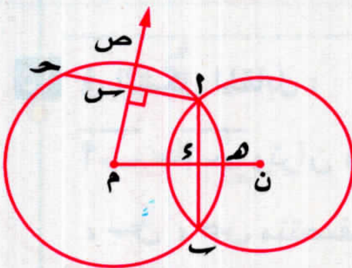
دائرة م ، $\overline{\text{ب أ}}$ ⊥ $\overline{\text{س هـ}}$ ، $\overline{\text{حـ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ص هـ}}$
، $\overline{\text{أب}}$ ∩ $\overline{\text{حـ ء}}$ = {م} ، أب = حـ ء
، أ س = ٣ سم

أوجد : طول $\overline{\text{هـ ص}}$

«٦ سم»

---

١٠ في الشكل المقابل :

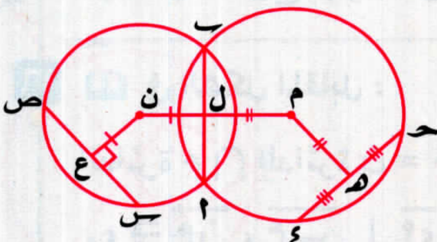


م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب
، رسم $\overrightarrow{\text{م س}}$ ⊥ $\overline{\text{أحـ}}$ ويقطع $\overline{\text{أحـ}}$ فى س
ويقطع الدائرة م فى ص ، رسم $\overline{\text{م ن}}$ يقطع $\overline{\text{أب}}$ فى ء
والدائرة م فى هـ فإذا كان أحـ = أب أثبت أن : س ص = ء هـ

(القليوبية ١٨)

---

١١ في الشكل المقابل :



الدائرة م ∩ الدائرة ن = {أ ، ب}
، هـ منتصف $\overline{\text{حـ ء}}$ ، م هـ = م ل ، ن ل = ن ع
، $\overline{\text{ن ع}}$ ⊥ $\overline{\text{س ص}}$

أثبت أن : حـ ء = س ص

(الغربية ١٨)

١٢ $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ وتران فى الدائرة م ، $\overline{مس} \perp \overline{أب}$ ، ص منتصف $\overline{أحـ}$

، ق (∠ أ ب حـ) = ٧٥° ، م س = م ص

١ أوجد : ق (∠ ب أ حـ) «٣٠°»

٢ أثبت أن : محيط Δ أ س ص = $\frac{1}{2}$ محيط Δ أ ب حـ (كفر الشيخ ١٨ ، الإسكندرية ١٦)

---

١٣ فى الشكل المقابل :



دائرتان متحدتا المركز م ، $\overline{أب}$ وتر فى الدائرة الكبرى

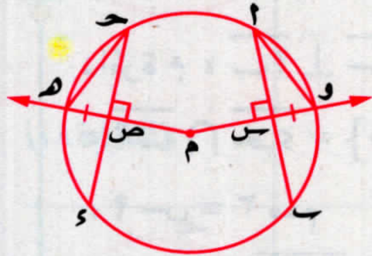
يقطع الدائرة الصغرى فى حـ ، ء ، $\overline{أع}$ وتر فى الدائرة

الكبرى يقطع الدائرة الصغرى فى س ، ص

فإذا كان : ق (∠ أ ب ع) = ق (∠ أ ع ب) أثبت أن : حـ ء = س ص (القليوبية ١٧ ، سوهاج ١٣)

---

١٤ فى الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ ، $\overline{حـ ء}$ وتران فى الدائرة م ، $\overleftarrow{مس} \perp \overline{أب}$

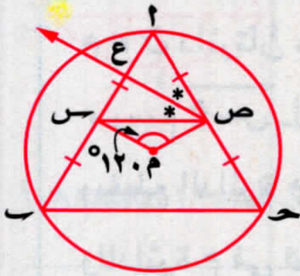
ويقطع الدائرة فى و ، $\overleftarrow{مص} \perp \overline{حـ ء}$

ويقطع الدائرة فى هـ ، و س = هـ ص

أثبت أن : **١** أ ب = حـ ء **٢** أ و = حـ هـ (الأقصر ٢٣ ، الغربية ١٦ ، كفر الشيخ ١١)

---

١٥ فى الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة م

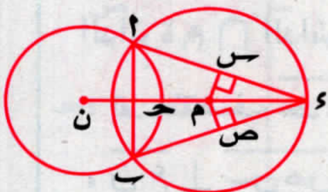
، س ، ص منتصفاهما على الترتيب

إذا كان : ق (∠ س م ص) = ١٢٠° ، $\overleftarrow{صع}$ ينصف ∠ أ ص س

أثبت أن : $\overleftarrow{صع}$ // $\overline{مس}$ (القاهرة ٠٨)

---

١٦ فى الشكل المقابل :



الدائرة م ∩ الدائرة ن = {أ ، ب} ، $\overleftrightarrow{أب}$ ∩ $\overleftrightarrow{من}$ = {حـ}

، ء ∈ $\overleftrightarrow{من}$ ، $\overline{مس} \perp \overline{أء}$ ، $\overline{مص} \perp \overline{ب ء}$

أثبت أن : م س = م ص (القليوبية ١٩ ، الشرقية ١١)

١٧ 📖 **فى الشكل المقابل :**

دائرتان متحدتا المركز م ، طولا نصفى قطريهما ٤ سم ، ٢ سم ، رسم المثلث أ ب حـ بحيث تقع رؤوسه على الدائرة الكبرى وتمس أضلاعه الدائرة الصغرى فى س ، ص ، ع

أثبت أن : المثلث أ ب حـ متساوى الأضلاع وأوجد مساحته.


(الفيوم ١٩) «١٢√٣ سم²»

---

١٨ **فى الشكل المقابل :**

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى ب ، حـ

، أ ∈ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$

أثبت أن : ب ء = حـ هـ


(الدقهلية ١٧)

---

١٩ **فى الشكل المقابل :**

$\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة م ، $\overline{\text{أ حـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ وتران فيها

، م س = م ص ، $\overline{\text{م س}}$ ⊥ $\overline{\text{أ حـ}}$ ، $\overline{\text{م ص}}$ ⊥ $\overline{\text{ء ب}}$

أثبت أن :

١ Δ هـ أ ب متساوى الساقين. **٢** هـ حـ = هـ ء


(بنى سويف ١٢)

---

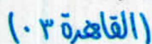
٢٠ **فى الشكل المقابل :**

$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{حـ ء}}$ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة م

، النقطتان س ، ص منتصفا $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{حـ ء}}$ على الترتيب

، رسم $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ فقطع الدائرة فى هـ ، و ، رسم $\overline{\text{م ل}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$

برهن أن : س هـ = ص و


(القاهرة ٠٣)

---

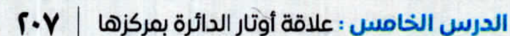
٢١ **فى الشكل المقابل :**

$\overline{\text{ع حـ}}$ ، $\overline{\text{ع ء}}$ وتران فى الدائرة م ، أ ∈ $\overline{\text{ع حـ}}$

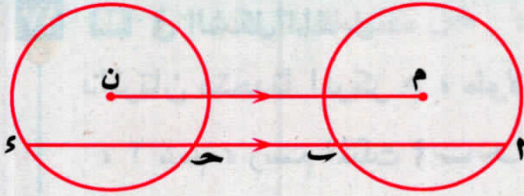
بحيث $\overleftrightarrow{\text{أ م}}$ ⊥ $\overline{\text{ع حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ م}}$ ∩ $\overleftarrow{\text{ع ء}}$ = {س}

، ب ∈ $\overline{\text{ع ء}}$ بحيث $\overleftarrow{\text{ب م}}$ ⊥ $\overline{\text{ع ء}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب م}}$ ∩ $\overleftarrow{\text{ع حـ}}$ = {ص}

فإذا كان : م أ = م ب **فأثبت أن :** حـ ص = ء س



٢٢ ف الشكل المقابل :



م ، ن دائرتان متطابقتان ، رسم $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{من}$

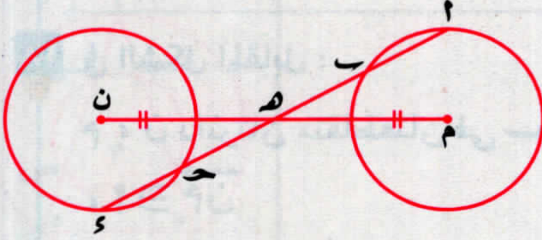
فقطع الدائرة م فى أ ، ب وقطع الدائرة ن فى حـ ، ء

أثبت أن : أحـ = ب ء

(المنوفية ١٨)

---

٢٣ فى الشكل المقابل :



م ، ن دائرتان متطابقتان ومتباعدتان

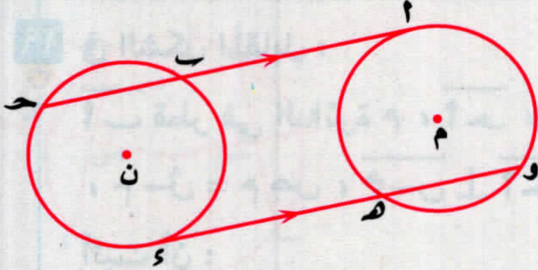
، هـ منتصف $\overline{من}$ ، رسم $\overleftrightarrow{أهـ}$ يقطع الدائرة م

فى أ ، ب ويقطع الدائرة ن فى حـ ، ء

أثبت أن : ١ أب = حـ ء ٢ هـ منتصف $\overline{أء}$

---

٢٤ فى الشكل المقابل :



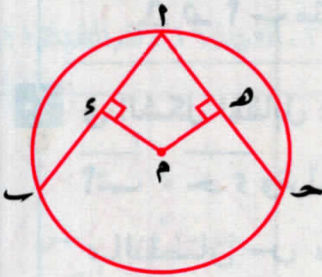
م ، ن دائرتان متطابقتان ، $\overline{أحـ}$ تمس الدائرة م عند أ

، $\overline{ءو}$ تمس الدائرة ن عند ء ، $\overline{أحـ}$ // $\overline{وء}$

أثبت أن : ١ ب حـ = و هـ ٢ أب = هـ ء

---

٢٥ فى الشكل المقابل :



م دائرة ، $\overline{مء}$ ⊥ $\overline{أب}$ ، $\overline{مهـ}$ ⊥ $\overline{أحـ}$

، أ (٢ ، ٢) ، ء (١ ، ٠)

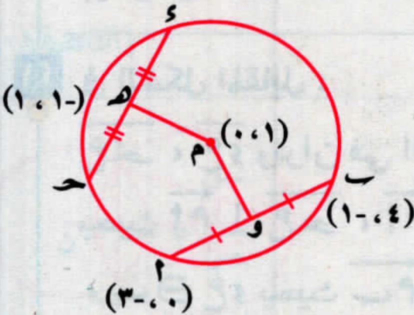
، هـ (٣ ، ٤)

برهن أن : م هـ = م ء

(كفر الشيخ ١٣)

---

٢٦ فى الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ ، $\overline{حـ ء}$ وتران فى الدائرة م

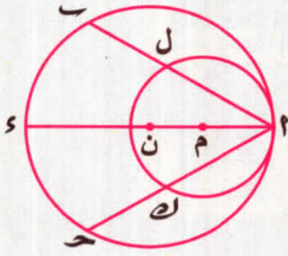
، و ، هـ منتصفا $\overline{أب}$ ، $\overline{حـ ء}$ على الترتيب فإذا كانت :

أ (٠ ، -٣) ، ب (٤ ، -١) ، هـ (-١ ، ١) ، م (١ ، ٠)

فأثبت أن : أب = حـ ء



للمتفوقين



١ **فى الشكل المقابل :**

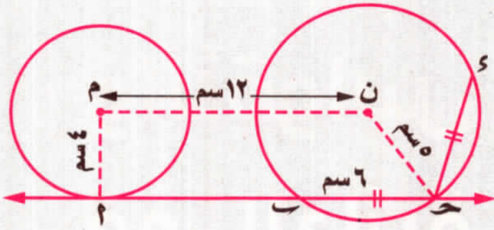
دائرتان م ، ن متماستان من الداخل فى أ

، رسم $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أحـ}}$ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة الكبرى ن فقطعا الدائرة الصغرى م فى ل ، ك على الترتيب.

أثبت أن : أ ل = أ ك (الدقهلية ٠٩)

---

٢ **فى الشكل المقابل :**



م ، ن دائرتان طولا نصفى قطريهما ٤ سم ، ٥ سم

، $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$ يمس الدائرة م عند أ ويقطع الدائرة ن

فى ب ، حـ حيث ب حـ = ٦ سم ، م ن = ١٢ سم

١ أثبت أن : الشكل م أ حـ ن شبه منحرف ثم احسب مساحته. «٥٤ سم^{٢}»

٢ إذا كان : حـ ء = حـ ب أوجد : بعد النقطة ن عن $\overline{\text{حـ ء}}$ (الشرقية ٠٦) «٤ سم»

الوحدة الخامسة

الزوايا والأقواس فى الدائرة

الدرس الأول :

الزاوية المركزية وقياس الأقواس.

الدرس الثانى :

العلاقة بين الزاويتين المحيطية والمركزية المشتركتين فى القوس - تمارين مشهورة.

الدرس الثالث :

الزوايا المحيطية المرسومة على نفس القوس.

الدرس الرابع :

الشكل الرباعى الدائرى وخواصه.

الدرس الخامس :

حالات إثبات الشكل الرباعى الدائرى.

الدرس السادس :

العلاقة بين مماسات الدائرة.

الدرس السابع :

الزاوية المماسية.

أهداف الوحدة: بعد دراسة هذه الوحدة يجب أن يكون التلميذ قادرًا على أن :

- يتعرف الزاوية المركزية والزاوية المحيطية.
- يحسب قياس قوس من دائرة ويحسب طوله.
- يتعرف العلاقة بين قياس الزاوية المركزية وقياس الزاوية المحيطية المشتركتين فى القوس.
- يتعرف العلاقة بين قياس الزاوية المحيطية وقياس القوس المقابل لها.
- يتعرف العلاقة بين قياسات الزوايا المحيطية التى تحصر نفس القوس.
- يتعرف الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة.
- يتعرف الشكل الرباعى الدائرى وخواصه.
- يحدد متى يكون الشكل الرباعى دائريًا.
- يتعرف العلاقة بين القطعتين المماستين المرسومتين من نقطة خارج الدائرة.
- يتعرف الزاوية المماسية والعلاقة بينها وبين الزاوية المحيطية المشتركة معها فى القوس.
- يثبت أن شعاعًا مرسومًا من أحد رءوس مثلث يمس الدائرة المارة برءوس هذا المثلث.

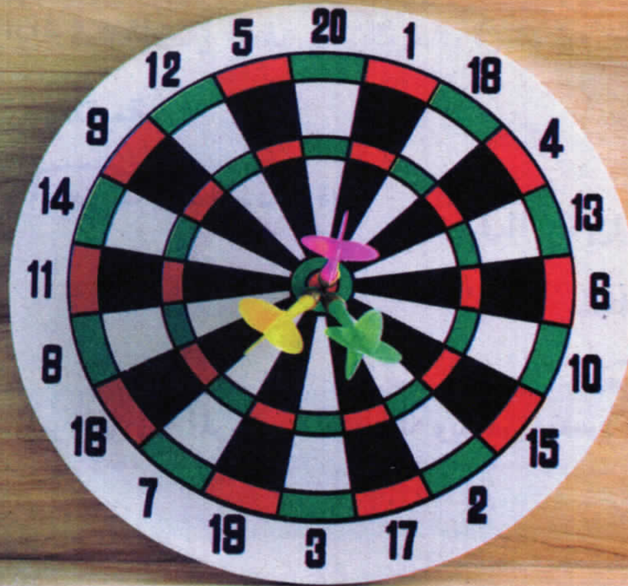
يمكنك

حل الامتحانات التفاعلية على الدروس من خلال مسح QR code الخاص بكل امتحان





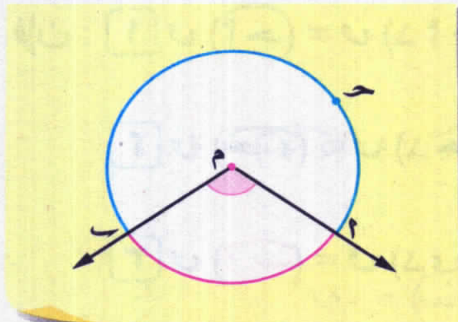
الدرس 1 الزاوية المركزية وقياس الأقواس



الزاوية المركزية

الزاوية المركزية فى دائرة هى الزاوية التى رأسها مركز الدائرة ، ويحمل كل ضلع من ضلعيها نصف قطر فى الدائرة.

ففى الشكل المقابل :



∠ أ م ب زاوية مركزية لأن رأسها م مركز الدائرة

ويحمل كل من ضلعيها $\overrightarrow{\text{م أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{م ب}}$ نصف قطر

فى الدائرة هما $\overline{\text{م أ}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$

لاحظ أن :

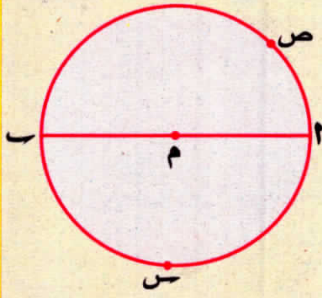
ضلعا ∠ أ م ب يقسمان الدائرة م إلى قوسين هما :

القوس الأصغر أ ب ، ويُرمز له بالرمز $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$	**القوس الأكبر** أ ب ، ويرمز له بالرمز $\overset{\frown}{\text{أ حـ ب}}$ أو $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ الأكبر.

علمًا بأن : $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ يعنى القوس الأصغر أ ب إلا إذا نص صراحة على غير ذلك.

! ملاحظـة

إذا كان : $\overline{أب}$ قطرًا فى الدائرة م فإن :



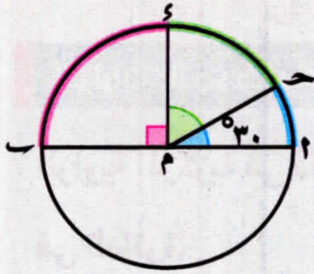
∠ أ م ب هى زاوية **مركزية مستقيمة**.

ويسمى كل من $\overset{\frown}{أسب}$ ، $\overset{\frown}{أصب}$ «**نصف دائرة**».

قياس القوس

قياس قوس فى دائرة هو قياس الزاوية المركزية المقابلة له ويُقاس بنفس وحدات قياس الزاوية (درجات ، دقائق ، ثوانى ...)

فمثلًا : فى الشكل المقابل :



إذا كان : $\overline{أب}$ قطرًا فى الدائرة م ، حـ ، ء نقطتان على الدائرة م

بحيث : ق (∠ أ م حـ) = ٣٠° ، ق (∠ أ م ء) = ٩٠°

فإن : [١] ق ($\overset{\frown}{أحـ}$) = ق (∠ أ م حـ) = ٣٠°

[٢] ق ($\overset{\frown}{حـء}$) = ق (∠ حـ م ء) = ٩٠° − ٣٠° = ٦٠°

[٣] ق ($\overset{\frown}{ءب}$) = ق (∠ ء م ب) = ٩٠°

[٤] ق ($\overset{\frown}{ءب}$ الأكبر) = ق (∠ ء م ب المنعكسة) = ٣٦٠° − ٩٠° = ٢٧٠°

[٥] ق ($\overset{\frown}{أب}$) = ق (∠ أ م ب) = ١٨٠° (لاحظ أن : $\overset{\frown}{أب}$ يمثل نصف دائرة)

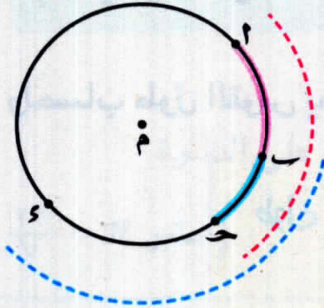
أى أن :

قياس نصف الدائرة = ١٨٠°

ويكون : قياس الدائرة = ١٨٠° × ٢ = ٣٦٠°

! ملاحظـة

القوسان المتجاوران هما قوسان من دائرة يشتركان فى نقطة واحدة فقط.



ففى الشكل المقابل :

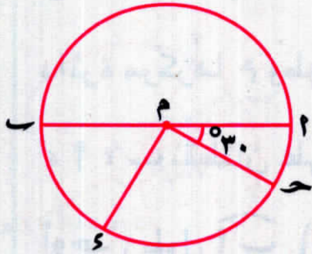
- $\overset{\frown}{أب}$ ، $\overset{\frown}{بحـ}$ قوسان متجاوران فى الدائرة م

لأنهما يشتركان فى نقطة ب فقط

ويكون : ق ($\overset{\frown}{أب}$) + ق ($\overset{\frown}{بحـ}$) = ق ($\overset{\frown}{أبحـ}$)

- $\overset{\frown}{أحـ}$ ، $\overset{\frown}{بء}$ قوسان غير متجاورين لأنهما يشتركان فى أكثر من نقطة (يشتركان فى $\overset{\frown}{بحـ}$)

مثال ١



فى الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م ، ق (∠ أ م حـ) = ٣٠°

فإذا كان : ق ($\overset{\frown}{حـ ء}$) : ق ($\overset{\frown}{ء ب}$) = ٣ : ٢

فأوجد : ق ($\overset{\frown}{أ ء}$)

الحـل

المعطيات	$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م ، ق (∠ أ م حـ) = ٣٠° ، ق ($\overset{\frown}{حـ ء}$) : ق ($\overset{\frown}{ء ب}$) = ٣ : ٢
المطلوب	إيجاد : ق ($\overset{\frown}{أ ء}$)
البرهان	∵ $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م ∴ ق ($\overset{\frown}{أحـب}$) = ١٨٠°
	، ∵ ق ($\overset{\frown}{أحـ}$) = ق (∠ أ م حـ) = ٣٠° ∴ ق ($\overset{\frown}{حـءب}$) = ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠°
	، ∵ ق ($\overset{\frown}{حـ ء}$) : ق ($\overset{\frown}{ء ب}$) = ٣ : ٢
	وبفرض أن : ق ($\overset{\frown}{حـ ء}$) = ٣ س ، ق ($\overset{\frown}{ء ب}$) = ٢ س
	∴ ٣ س + ٢ س = ١٥٠° ∴ ٥ س = ١٥٠°
	∴ س = ٣٠° ∴ ق ($\overset{\frown}{حـ ء}$) = ٣ × ٣٠° = ٩٠°
	∴ ق ($\overset{\frown}{أ ء}$) = ٣٠° + ٩٠° = ١٢٠° (وهو المطلوب)

طول القوس

طول قوس فى دائرة هو جزء من محيط دائرته يتناسب مع قياسه ، ويُقاس بوحدات قياس الأطوال (سنتيمتر ، متر ، ...)

ولحساب طول القوس يمكن استخدام القاعدة التالية :

طول القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{\text{قياس الدائرة}}$ × محيط الدائرة = $\frac{\text{قياس القوس}}{{}^\circ٣٦٠}$ × ٢ π نق

حيث نق طول نصف قطر دائرته ، π النسبة التقريبية

مثال ٢

فى الشكل المقابل :

دائرة مركزها م وطول نصف قطرها ٢١ سم

، أ ، ب نقطتان على الدائرة م بحيث ق (∠ أ م ب) = ١٢٠°

أوجد : طول $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ (اعتبر π = $\frac{٢٢}{٧}$)

م
٢١ سم
١٢٠°
أ
ب

الحل

∵ ق (∠ أ م ب) = ١٢٠° ∴ ق ($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = ١٢٠°

، ∵ طول $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ = $\frac{\text{ق}(\overset{\frown}{\text{أ ب}})}{{}^\circ٣٦٠}$ × ٢ π نق ∴ طول $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ = $\frac{{}^\circ١٢٠}{{}^\circ٣٦٠}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٢١ = ٤٤ سم

مثال ٣

أوجد قياس القوس الذى يمثل $\frac{١}{٣}$ قياس الدائرة.

وإذا كان طول نصف قطر الدائرة ١٥ سم **فأوجد :** طول هذا القوس. (اعتبر π = ٣,١٤)

الحل

قياس القوس = $\frac{١}{٣}$ قياس الدائرة = $\frac{١}{٣}$ × ٣٦٠° = ١٢٠°

، طول القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{{}^\circ٣٦٠}$ × ٢ π نق = $\frac{{}^\circ١٢٠}{{}^\circ٣٦٠}$ × ٢ × ٣,١٤ × ١٥ = ٣١,٤ سم

! ملاحظة

طول نصف الدائرة = $\frac{1}{2}$ محيط الدائرة = π نق وحدة طولية.

حاول بنفسك ١

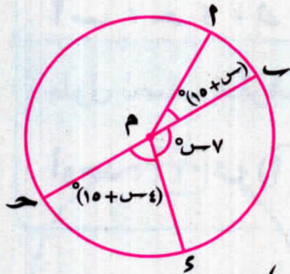
١ دائرة مركزها م وطول نصف قطرها ١٤ سم فإذا كانت : أ ، ب نقطتين على الدائرة

بحيث ق (∠ أ م ب) = ٤٥° أوجد : طول $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ (اعتبر π = $\frac{٢٢}{٧}$)

٢ أوجد قياس القوس الذى يمثل $\frac{٢}{٥}$ قياس الدائرة

وإذا كان طول قطر الدائرة ٧٠ سم فأوجد طول هذا القوس. (اعتبر π = $\frac{٢٢}{٧}$)

مثال ٤



فى الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{\text{ب حـ}}$ قطرًا فى دائرة م طول نصف قطرها ٧ سم

فأوجد : ١ ق ($\overset{\frown}{\text{أ ء}}$) ٢ طول $\overset{\frown}{\text{أ ء}}$ (اعتبر π = $\frac{٢٢}{٧}$)

الحل

المعطيات	$\overline{\text{ب حـ}}$ قطر فى الدائرة م ، نق = ٧ سم ، ق (∠ أ م ب) = (س + ١٥)° ، ق (∠ ب م ء) = ٧ س° ، ق (∠ ء م حـ) = (٤ س + ١٥)°
المطلوب	إيجاد : ١ ق ($\overset{\frown}{\text{أ ء}}$) ٢ طول $\overset{\frown}{\text{أ ء}}$
البرهان	∵ $\overline{\text{ب حـ}}$ قطر فى الدائرة م ∴ ق ($\overset{\frown}{\text{ب ء حـ}}$) = ١٨٠° ∴ ق ($\overset{\frown}{\text{ب ء}}$) + ق ($\overset{\frown}{\text{ء حـ}}$) = ١٨٠° ، ∵ ق ($\overset{\frown}{\text{ب ء}}$) = ق (∠ ب م ء) = ٧ س° ، ق ($\overset{\frown}{\text{ء حـ}}$) = ق (∠ ء م حـ) = (٤ س + ١٥)°

$\therefore$ ٧ س° + (٤ س° + ١٥°) = ١٨٠° $\therefore$ ١١ س° + ١٥° = ١٨٠°

$\therefore$ ١١ س° = ١٨٠° − ١٥° = ١٦٥° $\therefore$ س = $\frac{١٦٥°}{١١}$ = ١٥°

$\therefore$ ق ($\overset{\frown}{ب ء}$) = ٧ × ١٥° = ١٠٥° ، ق ($\overset{\frown}{أ ب}$) = ١٥° + ١٥° = ٣٠°

$\therefore$ ق ($\overset{\frown}{أ ء}$) = ١٠٥° + ٣٠° = ١٣٥° **(المطلوب أولًا)**

، طول $\overset{\frown}{أ ء}$ = $\frac{١٣٥°}{٣٦٠°}$ × ٢ π نق

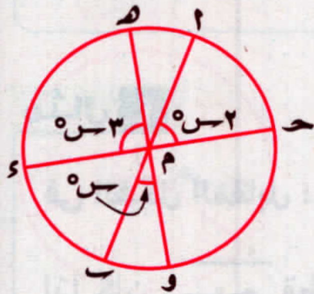
= $\frac{٣}{٨}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ = ١٦,٥ سم **(المطلوب ثانيًا)**

حاول بنفسك ٢

في الشكل المقابل :

$\overline{أ ب}$ ، $\overline{حـ ء}$ ، $\overline{هـ و}$ ثلاثة أقطار في دائرة م

طول نصف قطرها ٣,٥ سم



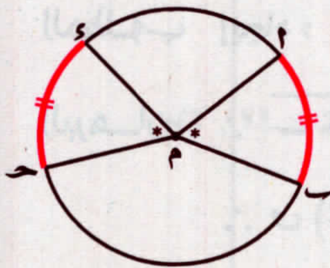
أوجد : [١] ق ($\overset{\frown}{أ ء}$)   [٢] طول $\overset{\frown}{و ء}$

نتائج هامة

نتيجة ١

في الدائرة الواحدة (أو في الدوائر المتطابقة) الأقواس المتساوية في القياس متساوية في الطول ، والعكس صحيح.

ففي الشكل المقابل :



إذا كانت م دائرة فيها : ق ($\overset{\frown}{أ ب}$) = ق ($\overset{\frown}{حـ ء}$)

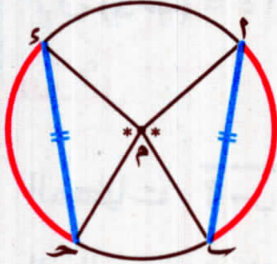
فإن : طول $\overset{\frown}{أ ب}$ = طول $\overset{\frown}{حـ ء}$

والعكس إذا كان : طول $\overset{\frown}{أ ب}$ = طول $\overset{\frown}{حـ ء}$

فإن : ق ($\overset{\frown}{أ ب}$) = ق ($\overset{\frown}{حـ ء}$)

نتيجة ٢

فى الدائرة الواحدة (أو فى الدوائر المتطابقة) الأقواس المتساوية فى القياس أوتارها متساوية فى الطول ، والعكس صحيح.



ففى الشكل المقابل :

إذا كانت م دائرة فيها : ق (أ ب) = ق (حـ ء)

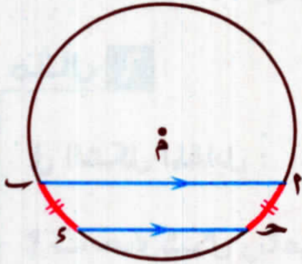
فإن : أ ب = حـ ء

والعكس إذا كان : أ ب = حـ ء

فإن : ق (أ ب) = ق (حـ ء)

نتيجة ٣

الوتران المتوازيان فى الدائرة يحصران قوسين متساويين فى القياس.



ففى الشكل المقابل :

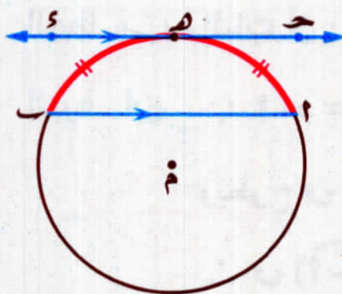
إذا كان : أ ب ، حـ ء وترين فى الدائرة م

، أ ب // حـ ء

فإن : ق (أ حـ) = ق (ب ء)

نتيجة ٤

القوسان المحصوران بين وتر ومماس يوازيه فى الدائرة متساويان فى القياس.



ففى الشكل المقابل :

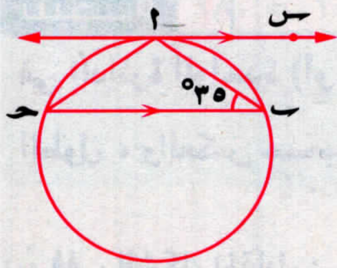
إذا كان : أ ب وترًا فى الدائرة م

، حـ ء يمس الدائرة م فى هـ

، حـ ء // أ ب

فإن : ق (هـ أ) = ق (هـ ب)

مثال ٥



في الشكل المقابل :

أس↔ مماس للدائرة عند أ ، الوتر ‾ب ح‾ // أس↔

، ق (∠ب) = ٣٥° أوجد : ق (∠ب أ ح)

الحل

المعطيات أس↔ مماس للدائرة عند أ ، ‾ب ح‾ // أس↔ ، ق (∠ب) = ٣٥°

المطلوب إيجاد : ق (∠ب أ ح)

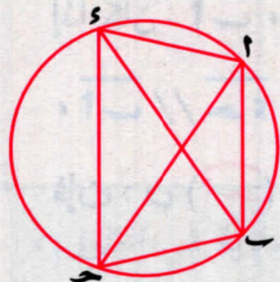
البرهان ∵ أس↔ // ‾ب ح‾ ∴ ق (⌒أ ب) = ق (⌒أ ح)

∴ أ ب = أ ح

في Δ أ ب ح : ∵ أ ب = أ ح ∴ ق (∠ح) = ق (∠ب) = ٣٥°

∴ ق (∠ب أ ح) = ١٨٠° - (٣٥° + ٣٥°) = ١١٠° (وهو المطلوب)

مثال ٦



في الشكل المقابل :

أ ب ح ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة

فإذا كان : أ ح = ب ء فأثبت أن : أ ء = ب ح

الحل

المعطيات أ ب ح ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة فيه : أ ح = ب ء

المطلوب إثبات أن : أ ء = ب ح

البرهان ∵ أ ح = ب ء (معطى) ∴ ق (⌒أ ح) = ق (⌒ب ء)

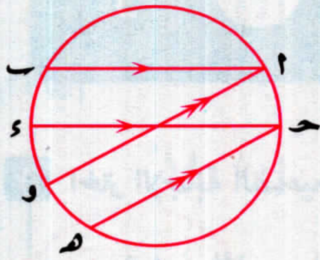
وبطرح ق (⌒أ ب) من الطرفين :

∴ ق (⌒أ ح) - ق (⌒أ ب) = ق (⌒ب ء) - ق (⌒أ ب)

∴ ق (⌒ب ح) = ق (⌒أ ء) ∴ ب ح = أ ء (وهو المطلوب)

مثال ٧

في الشكل المقابل :



$\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{حـ ء}}$ وتران متوازيان ، $\overline{\text{أو}}$ ، $\overline{\text{حـ هـ}}$ وتران متوازيان

أثبت أن : ق $(\overset{\frown}{\text{ب ء}})$ = ق $(\overset{\frown}{\text{هـ و}})$

الحل

المعطيات $\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{حـ ء}}$ ، $\overline{\text{أو}}$ // $\overline{\text{حـ هـ}}$

المطلوب إثبات أن : ق $(\overset{\frown}{\text{ب ء}})$ = ق $(\overset{\frown}{\text{هـ و}})$

البرهان ∵ $\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{حـ ء}}$ ∴ ق $(\overset{\frown}{\text{أ حـ}})$ = ق $(\overset{\frown}{\text{ب ء}})$ (١)

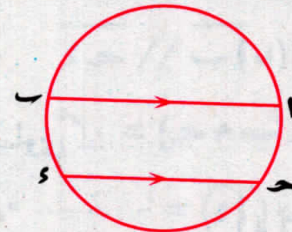
، ∵ $\overline{\text{أو}}$ // $\overline{\text{حـ هـ}}$ ∴ ق $(\overset{\frown}{\text{أ حـ}})$ = ق $(\overset{\frown}{\text{هـ و}})$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ ق $(\overset{\frown}{\text{ب ء}})$ = ق $(\overset{\frown}{\text{هـ و}})$ (وهو المطلوب)

حاول بنفسك ٣

في كل مما يأتي أوجد ق $(\overset{\frown}{\text{أ حـ}})$:

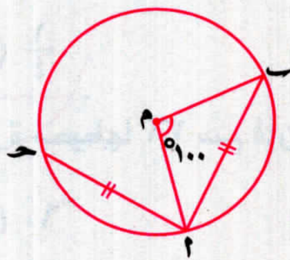
١



ق $(\overset{\frown}{\text{أب}})$ = $160°$ ، ق $(\overset{\frown}{\text{حـ ء}})$ = $100°$

فإن : ق $(\overset{\frown}{\text{أ حـ}})$ = ...°

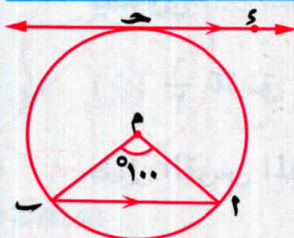
٢



ق $(\overset{\frown}{\text{أ حـ}})$ = ...°

٣ $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ مماس للدائرة م عند حـ

فإن : ق $(\overset{\frown}{\text{أ حـ}})$ = ...°





على الزاوية المركزية وقياس الأقواس



اختبار تفاعلى

● تذكر ● فهم ● تطبيق ● حل مشكلات | أسئلة كتاب الوزارة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ قياس القوس الذى يمثل نصف قياس الدائرة يساوى .... (المنيا ٢٢ ، الجيزة ٢١)

(أ) ١٨٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ٢٤٠°

٢ قياس القوس الذى يمثل $\frac{١}{٦}$ محيط الدائرة يساوى .... (القاهرة ١٥)

(أ) ٦٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ٣٠٠°

٣ طول نصف الدائرة يساوى .... (قنا ٢١)

(أ) π نق (ب) ١٨٠° (جـ) $\frac{١}{٢}$ π نق (د) ٢ π نق

٤ طول القوس الذى يمثل $\frac{١}{٤}$ محيط الدائرة يساوى .... (الدقهلية ١٧ ، القليوبية ١٦)

(أ) ٢ π نق (ب) π نق (جـ) $\frac{١}{٢}$ π نق (د) ٤ π نق

٥ الزاوية المركزية التى قياسها ٩٠° تقابل قوسًا طوله = ... محيط الدائرة. (أسيوط ١١)

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٦}$ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{١}{٢}$

٦ دائرة محيطها ٣٦ سم فإن قياس قوس منها طوله ٦ سم يساوى .... (المنوفية ٠٩)

(أ) ٦٠° (ب) ٣٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

٧ طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ١٢٠° فى دائرة طول نصف قطرها نق يساوى .... (السويس ٠٩)

(أ) $\frac{١}{٣}$ π نق (ب) π نق (جـ) $\frac{٢}{٣}$ π نق (د) ٣ π نق

٨ طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ٣٠° فى دائرة محيطها ٣٦ سم يساوى .... سم (سوهاج ٠٩)

(أ) ١٨ (ب) ٩ (جـ) ٣ (د) ٤,٥

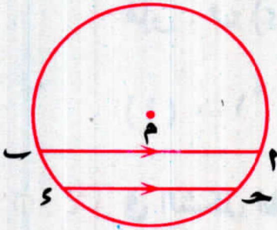
٩ قوس من دائرة طوله $\frac{1}{3}$ π نق فإنه يقابل زاوية مركزية قياسها .... (الدقهلية ٢١)

(أ) °٣٠ (ب) °٦٠ (جـ) °١٢٠ (د) °٢٤٠

١٠ أ ب حـ ء مربع مرسوم داخل دائرة فإن : ق (⌒أ ب) = ... (قنا ٢٣)

(أ) °٦٠ (ب) °٩٠ (جـ) °١٢٠ (د) °١٨٠

١١ فى الشكل المقابل :



دائرة مركزها م فيها : $\overline{أب}$ // $\overline{حـ ء}$

فإن : .... (ج. سيناء ٢١)

(أ) ق (⌒أ حـ) = ق (⌒ب ء) (ب) أ ب = حـ ء

(جـ) $\overline{أ حـ}$ // $\overline{ب ء}$ (د) ق (⌒أ حـ) > ق (⌒ب ء)

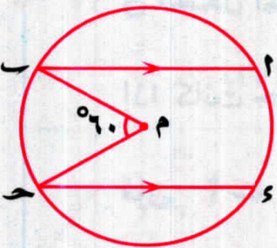
١٢ إذا كانت أ ، ب نقطتين تنتميان للدائرة م بحيث طول ⌒أ ب = π نق

فإن : $\overline{أب}$ .... فى الدائرة م

(أ) نصف قطر (ب) وتر غير مار بالمركز

(جـ) قطر (د) محور تماثل للدائرة

١٣ فى الشكل المقابل :



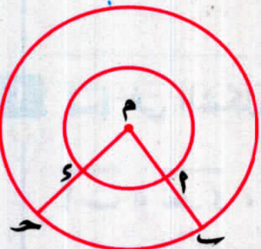
م دائرة ، $\overline{أب}$ // $\overline{حـ ء}$

، ق (∠ ب م حـ) = °٦٠

فإن : ق (⌒أ ء) = ... (أسوان ١٨)

(أ) °٣٠ (ب) °٤٠ (جـ) °٦٠ (د) °١٢٠

١٤ فى الشكل المقابل :



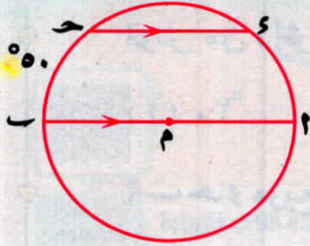
دائرتان متحدتا المركز م

، ق (⌒ب حـ) = °٨٠

فإن : ق (⌒أ ء) = ... (سوهاج ٢٥)

(أ) °٢٠ (ب) °٤٠ (جـ) °٦٠ (د) °٨٠

15 في الشكل المقابل :



م دائرة ، ق (ب حـ) = ٥٠°

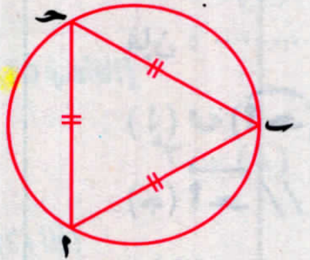
، ءحـ // أب

فإن : ق (ء حـ) = ...

(الشرقية ٢١)

(أ) ١٠٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ٨٠°

16 في الشكل المقابل :



Δ أب حـ متساوى الأضلاع

فإذا كان : طول أب = ٨ سم

فإن محيط الدائرة المارة برؤوس المثلث = ... سم

(بورسعيد ٢٣)

(أ) ٢٤ (ب) ٤٨ (جـ) ١٦ (د) ٤٠

17 في الشكل المقابل :



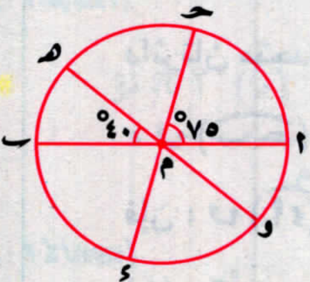
إذا كانت حـ منتصف أب

فإن : أب .... ٢ أحـ

(الجيزة ١٧)

(أ) > (ب) < (جـ) ≤ (د) =

٢ في الشكل المقابل :



أب ، حـ ء ، هـ و أقطار في الدائرة م أكمل :

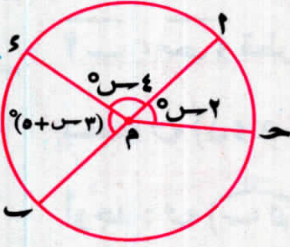
1 ق (أ حـ) = ...° 2 ق (أ حـ هـ) = ...°

3 ق (أ حـ ء) = ...° 4 ق (أ و هـ) = ...°

● تذكر ● فهم ● تطبيق ● حل مشكلات

٣ فى الشكل المقابل :

$\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة م ، ادرس الشكل ثم أكمل :



١ س = ...°	٢ ق ($\overset{\frown}{أ حـ}$) = ...°
٣ ق ($\overset{\frown}{أ ء}$) = ...°	٤ ق ($\overset{\frown}{ب حـ}$) = ...°
٥ ق ($\overset{\frown}{حـ أ ء}$) = ...°	٦ ق ($\overset{\frown}{حـ ب ء}$) = ...°
٧ ق ($\overset{\frown}{أ حـ ء}$) = ...°	٨ ق ($\overset{\frown}{أ ء حـ}$) = ...°

---

٤ أوجد قياس القوس الذى يمثل $\frac{١}{٣}$ قياس الدائرة

ثم احسب طول هذا القوس إذا كان طول نصف قطر الدائرة ٢١ سم.

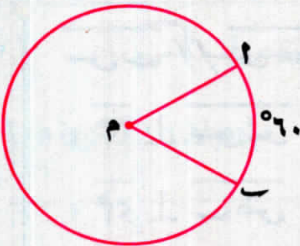
(اعتبر π = $\frac{٢٢}{٧}$) مع توضيح خطوات الحل. (المنوفية ١٦) «١٢٠° ، ٤٤ سم»

---

٥ فى الشكل المقابل :

دائرة م طول نصف قطرها ٢١ سم

، ق ($\overset{\frown}{أ ب}$) = ٦٠°

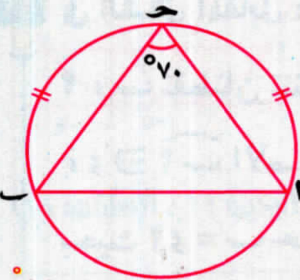


أوجد : ١ ق (∠ أ م ب) ٢ طول $\overset{\frown}{أ ب}$ (اعتبر π = $\frac{٢٢}{٧}$)

(القاهرة ٢٥) «٦٠° ، ٢٢ سم»

---

٦ فى الشكل المقابل :



إذا كان : ق ($\overset{\frown}{أ حـ}$) = ق ($\overset{\frown}{ب حـ}$)

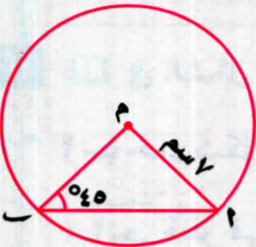
، ق (∠ أ حـ ب) = ٧٠°

أوجد : ق (∠ أ ب حـ)

«٥٥°»

---

٧ فى الشكل المقابل :



أ ، ب نقطتان تنتميان للدائرة م

بحيث ق (∠ م ب أ) = ٤٥° ، أ م = ٧ سم

أوجد : طول $\overset{\frown}{أ ب}$ (اعتبر π = $\frac{٢٢}{٧}$)

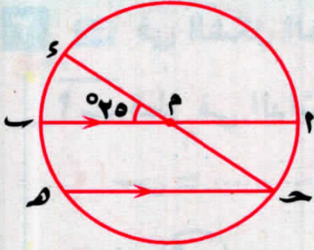
«١١ سم»

٨ في الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ ، $\overline{حء}$ قطران في الدائرة م

بحيث ق (∠ ء م ب) = ٢٥° ، $\overline{حهـ}$ // $\overline{أب}$

أوجد : ق ($\overset{\frown}{بهـ}$)



(القليوبية ٢٤) «٢٥°»

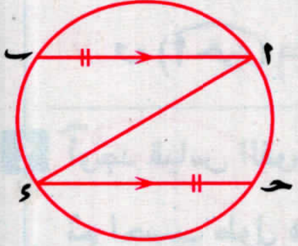
---

٩ في الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ ، $\overline{حء}$ وتران في الدائرة

، أب = حء ، $\overline{أب}$ // $\overline{حء}$

أثبت أن : $\overline{أء}$ قطر في الدائرة.



(بني سويف ٢٣)

---

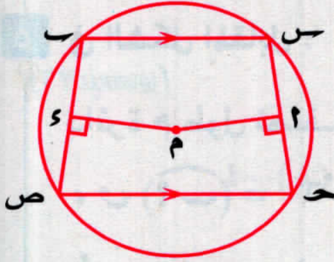
١٠ في الشكل المقابل :

$\overline{سب}$ // $\overline{حص}$

، $\overline{مأ}$ ⊥ $\overline{سح}$

، $\overline{مء}$ ⊥ $\overline{بص}$

أثبت أن : م أ = م ء



(الجيزة ١٧)

---

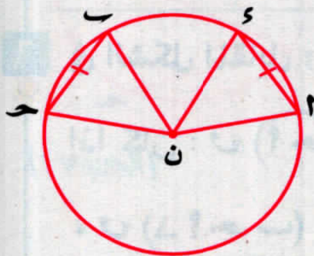
١١ في الشكل المقابل :

أ ، ب نقطتان تنتميان إلى الدائرة ن

، ء ∈ $\overset{\frown}{أب}$ الأصغر ، حـ ∈ $\overset{\frown}{أب}$ الأكبر

بحيث أء = ب حـ

أثبت أن : ق (∠ أ ن ب) = ق (∠ حـ ن ء)



(سوهاج ٠٥)

---

١٢ في الشكل المقابل :

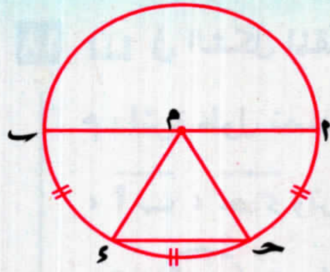
أ ب حـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة م

، $\overline{أحـ}$ قطر في الدائرة ، حـ ب = حـ ء

أثبت أن : ق ($\overset{\frown}{أب}$) = ق ($\overset{\frown}{أء}$)



١٣ في الشكل المقابل :



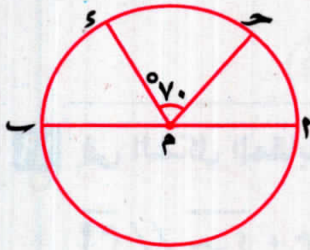
$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة التى مركزها م

، ق $(\overset\frown{أحـ})$ = ق $(\overset\frown{حـ ء})$ = ق $(\overset\frown{ءب})$

أثبت أن : Δ م حـ ء متساوى الأضلاع.

---

١٤ في الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م ، ق (∠ حـ م ء) = ٧٠°

، ق $(\overset\frown{أحـ})$: ق $(\overset\frown{ءب})$ = ٥ : ٦

أوجد : ق $(\overset\frown{أحـ ء})$

(الغربية ٢٣ ، أسيوط ١٢) « ١٢٠° »

---

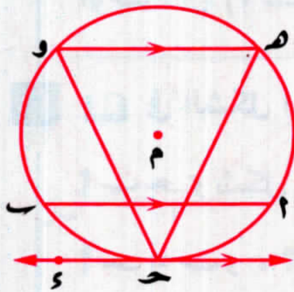
١٥ أ ب حـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة ، فإذا كان : $\overline{أب}$ // $\overline{ءحـ}$ ، هـ منتصف $\overset\frown{أب}$

فأثبت أن : حـ هـ = ء هـ

(دمياط ١٦ ، الجيزة ٠٥)

---

١٦ في الشكل المقابل :



م دائرة ، $\overleftrightarrow{حـ ء}$ مماس للدائرة عند حـ

، $\overline{أب}$ ، $\overline{هـ و}$ وتران فى الدائرة حيث :

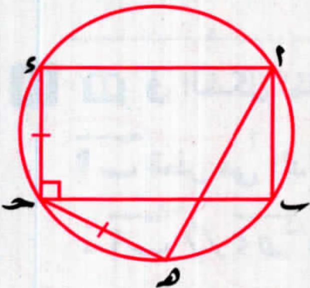
$\overline{أب}$ // $\overline{هـ و}$ // $\overleftrightarrow{حـ ء}$

أثبت أن : حـ هـ = حـ و

(أسيوط ١٩ ، البحيرة ١٤ ، الإسكندرية ١١)

---

١٧ في الشكل المقابل :

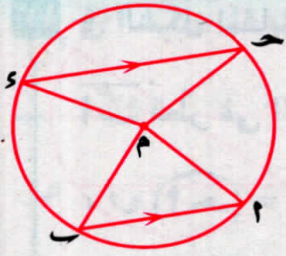


أ ب حـ ء مستطيل مرسوم داخل دائرة

، رسم الوتر $\overline{حـ هـ}$ بحيث حـ هـ = حـ ء

أثبت أن : أ هـ = ب حـ

(المنيا ٢٤ ، أسوان ١٩ ، بورسعيد ١٨ ، المنوفية ١٦ ، سوهاج ١٥)



١٨ فى الشكل المقابل :

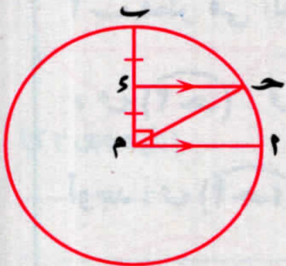
م دائرة طول نصف قطرها ١٥ سم

، $\overline{أب}$ ، $\overline{حـ ء}$ وتران متوازيان فى الدائرة

، ق $(\overset{\frown}{أ حـ})$ = ٨٠° ، طول $\overset{\frown}{أ حـ}$ = طول $\overset{\frown}{أ ب}$

أوجد : [١] ق (∠ م أ ب) [٢] ق $(\overset{\frown}{حـ ء})$ [٣] طول $\overset{\frown}{حـ ء}$

(الوادى الجديد ١٨) «٥٠° ، ١٢٠° ، ٣١,٤ سم»



١٩ فى الشكل المقابل :

$\overline{أم}$ // $\overline{حـ ء}$ ، م ء = ء ب

، ق (∠ أ م ب) = ٩٠°

أوجد : ق $(\overset{\frown}{أ حـ})$

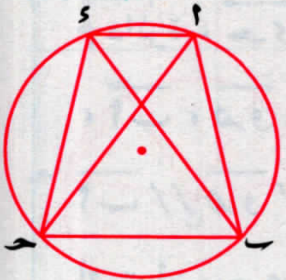
(الأقصر ١٩) «٣٠°»

---

٢٠ إذا كانت : أ ، ب نقطتين تنتميان للدائرة م وكان : ق (∠ أ م ب) = $\frac{1}{4}$ ق (∠ أ م ب المنعكسة)

أوجد : ق $(\overset{\frown}{أ ب})$

«٧٢°»



٢١ فى الشكل المقابل :

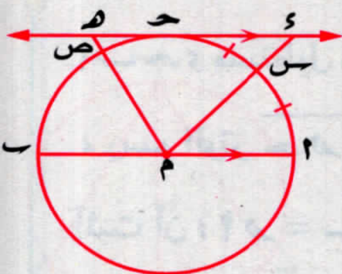
أ ب حـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة فيه :

أ حـ = ب ء ، أ ب = (٣ س − ٥) سم

، حـ ء = (س + ٣) سم

أوجد بالبرهان : طول $\overline{أ ب}$

(الشرقية ٢٣) «٧ سم»



٢٢ فى الشكل المقابل :

$\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة م ، $\overleftrightarrow{ء هـ}$ مماس للدائرة عند حـ

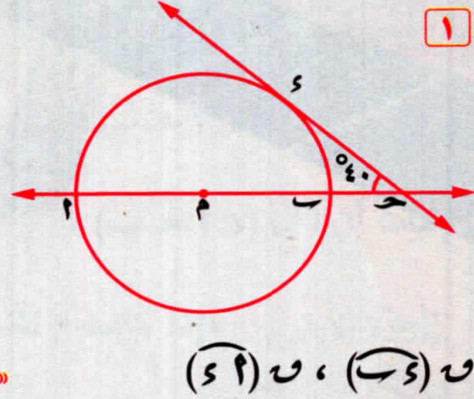
، $\overline{أ ب}$ // $\overline{ء هـ}$ ، س منتصف $\overset{\frown}{أ حـ}$

، ق $(\overset{\frown}{ب ص})$ = ٢ ق $(\overset{\frown}{حـ ص})$

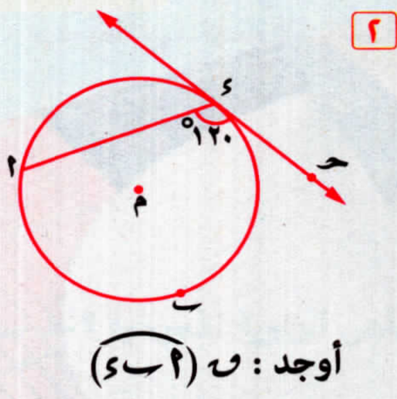
أوجد : قياسات زوايا Δ م ء هـ

(دمياط ١٣) «٤٥° ، ٧٥° ، ٦٠°»

٢٣ في كل من الشكلين الآتيين : $\overleftrightarrow{حـ ء}$ مماس للدائرة عند ء :



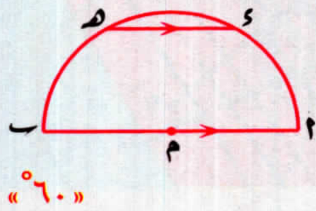
أوجد : ق ($\overset{\frown}{ء ب}$) ، ق ($\overset{\frown}{أ ء}$) «٥٠° ، ١٣٠°»



أوجد : ق ($\overset{\frown}{أ ب ء}$) «٢٤٠°»

---

٢٤ في الشكل المقابل :

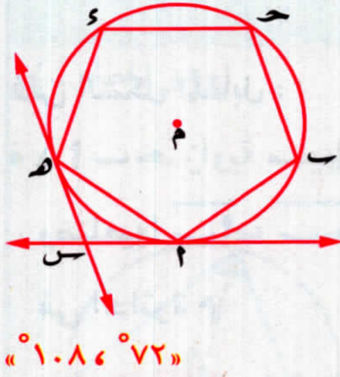


$\overset{\frown}{أ ب}$ نصف دائرة ، $\overline{ء هـ}$ // $\overline{أ ب}$ ، ء هـ = $\frac{1}{2}$ أ ب

أوجد : ق ($\overset{\frown}{أ ء}$) «٦٠°»

للمتفوقين

١ في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء هـ خماسي منتظم مرسوم داخل الدائرة م

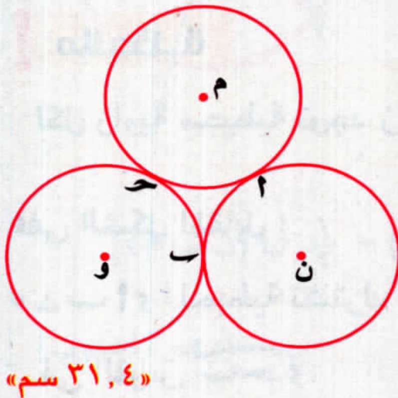
، $\overleftrightarrow{أ س}$ مماس للدائرة عند أ ، $\overleftrightarrow{هـ س}$ مماس للدائرة عند هـ

حيث $\overleftrightarrow{أ س}$ ∩ $\overleftrightarrow{هـ س}$ = {س}

أوجد : ١ ق ($\overset{\frown}{أ هـ}$) ٢ ق (∠ أ س هـ) «٧٢° ، ١٠٨°»

---

٢ في الشكل المقابل :



م ، ن ، و ثلاث دوائر متطابقة ومتماسة في أ ، ب ، حـ

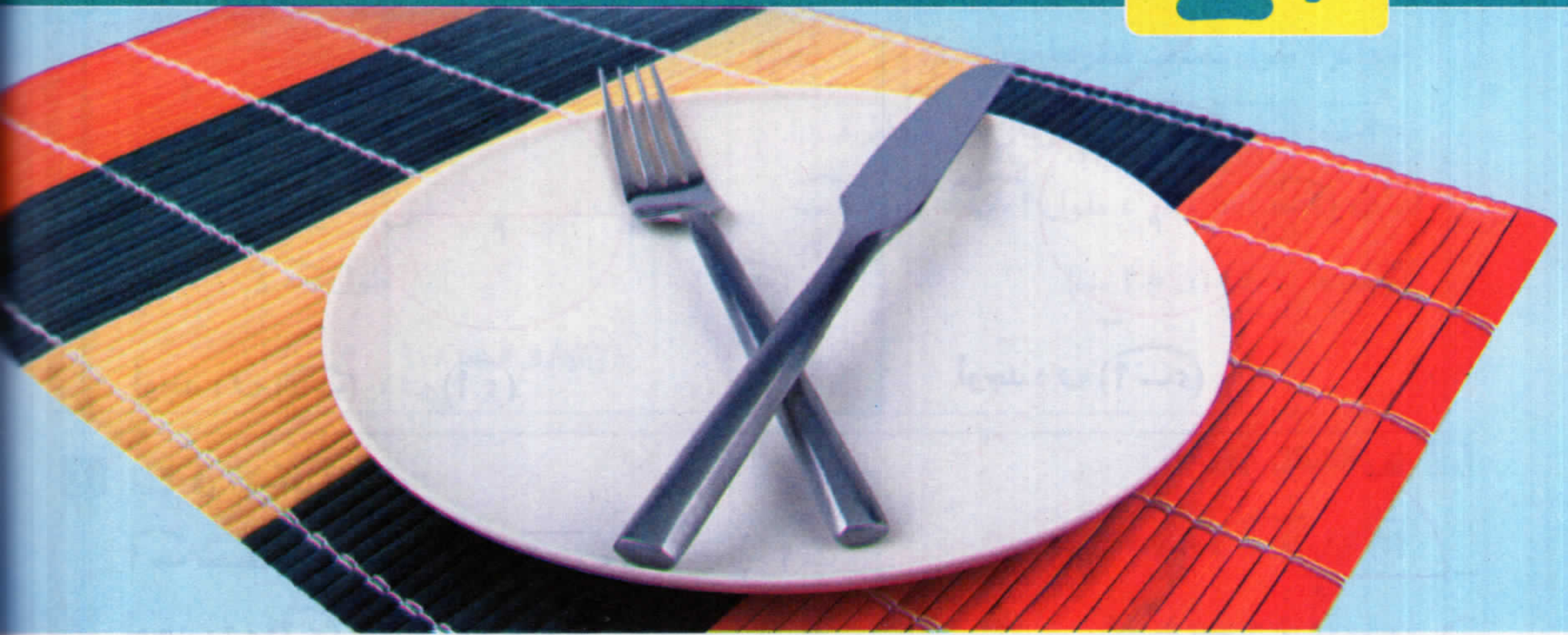
، طول نصف قطر كل منها ١٠ سم

١ أثبت أن : طول $\overset{\frown}{أ ب}$ = طول $\overset{\frown}{ب حـ}$ = طول $\overset{\frown}{أ حـ}$

٢ أوجد : محيط الشكل أ ب حـ «٣١,٤ سم»

الدرس 2

العلاقة بين الزاويتين المحيطية والمركزية المشتركتين فى القوس - تمارين مشهورة



الزاوية المحيطية

الزاوية المحيطية فى دائرة هى الزاوية التى رأسها على الدائرة ويحمل كل ضلع من ضلعيها وترًا فى هذه الدائرة.

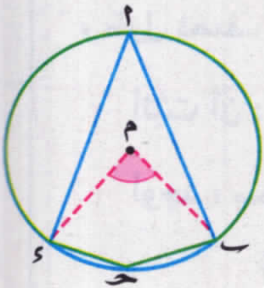
ففى الشكل المقابل :

- ∠ أ ب ج زاوية محيطية لأن رأسها ب ينتمى إلى الدائرة م وضلعيها $\overrightarrow{بأ}$ ، $\overrightarrow{بج}$ يحملان الوترين $\overline{بأ}$ ، $\overline{بج}$ فى الدائرة م
- ∠ أ ب ج المحيطية يقابلها $\overset{\frown}{أج}$

! ملاحظة

لكل زاوية محيطية توجد زاوية مركزية واحدة فقط تشترك معها فى القوس.

ففى الشكل المقابل :



- ∠ ب أ ء المحيطية تشترك مع ∠ ب م ء المركزية فى القوس $\overset{\frown}{بجء}$
- بينما ∠ ب ج ء المحيطية تشترك مع ∠ ب م ء المنعكسة فى القوس $\overset{\frown}{بأء}$

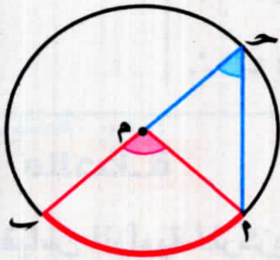
نظرية ١

قياس الزاوية المحيطية يساوى نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس.

المعطيات فى الدائرة م : ∠ ٢ حـ ب محيطية ، ∠ ٢ م ب مركزية

المطلوب إثبات أن : ق (∠ ٢ حـ ب) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ ٢ م ب)

البرهان **الحالة الأولى** «إذا كانت م تنتمى إلى أحد ضلعى الزاوية المحيطية ٢ حـ ب»



∵ ∠ ٢ م ب خارجة عن Δ ٢ م حـ

∴ ق (∠ ٢ م ب) = ق (∠ ٢) + ق (∠ حـ) (١)

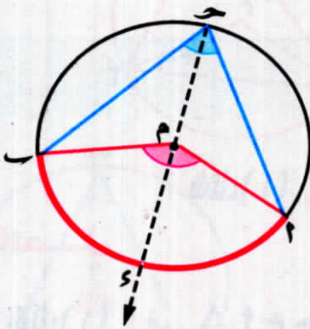
، ∵ م ٢ = م حـ (طولا نصفى قطرين)

∴ ق (∠ ٢) = ق (∠ حـ) (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : ق (∠ ٢ م ب) = ٢ ق (∠ ٢ حـ ب)

∴ ق (∠ ٢ حـ ب) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ ٢ م ب) (وهو المطلوب)

الحالة الثانية «إذا كانت م نقطة داخل الزاوية المحيطية ٢ حـ ب»



العمل نرسم $\overleftrightarrow{\text{حـ م}}$ ليقطع الدائرة فى ء

من الحالة الأولى :

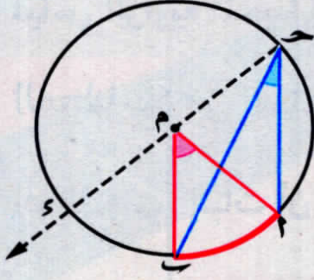
ق (∠ ٢ حـ ء) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ ٢ م ء)

، ق (∠ ب حـ ء) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ ب م ء)

وبالجمع : ∴ ق (∠ ٢ حـ ء) + ق (∠ ب حـ ء) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ ٢ م ء) + $\frac{1}{2}$ ق (∠ ب م ء)

∴ ق (∠ ٢ حـ ب) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ ٢ م ب) (وهو المطلوب)

الحالة الثالثة «إذا كانت م تقع خارج الزاوية المحيطية أ ح ب»



العمـــل نرسم $\overrightarrow{\text{ح م}}$ ليقطع الدائرة فى ء

من الحالة الأولى :

ق (∠ أ ح ء) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ أ م ء)

، ق (∠ ب ح ء) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ ب م ء)

وبالطرح : ∴ ق (∠ أ ح ء) − ق (∠ ب ح ء) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ أ م ء) − $\frac{1}{2}$ ق (∠ ب م ء)

∴ ق (∠ أ ح ب) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ أ م ب) (وهو المطلوب)

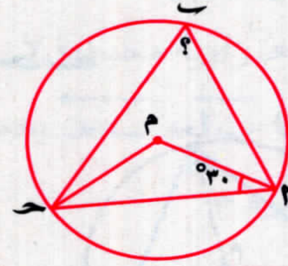
! ملاحظـة

قياس الزاوية المركزية يساوى ضعف قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى القوس.

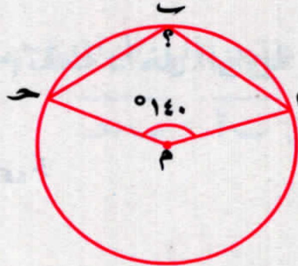
مثال ١

فى كل من الأشكال الآتية :

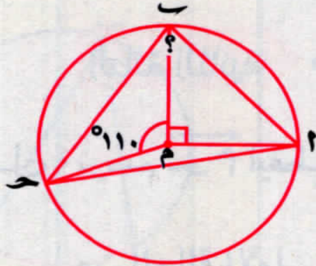
أوجد قياس الزاوية المشار إليها بعلامة (؟) علمًا بأن م هى مركز الدائرة :



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

الحـــل

شكل (١) فى Δ أ م ح : ∵ م أ = م ح (طولا نصفى قطرين)

∴ ق (∠ م ح أ) = ق (∠ م أ ح) = ٣٠°

∴ ق (∠ أ م ح) = ١٨٠° − (٣٠° + ٣٠°) = ١٢٠°

، ∵ ∠ أ ب ح المحيطية تشترك مع ∠ أ م ح المركزية فى $\overset{\frown}{\text{أ ح}}$

∴ ق (∠ أ ب ح) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ أ م ح) = ٦٠° (وهو المطلوب)

شكل(٢) ∵ ق (∠ ٢ م حـ) = ١٤٠°

∴ ق (∠ ٢ م حـ المنعكسة) = ٣٦٠° − ١٤٠° = ٢٢٠°

، ∵ ∠ ٢ ب حـ المحيطية تشترك مع ∠ ٢ م حـ المركزية المنعكسة فى ⌒٢ حـ الأكبر

∴ ق (∠ ٢ ب حـ) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ ٢ م حـ المنعكسة) = ١١٠° (وهو المطلوب)

شكل(٣) ∵ ق (∠ ٢ م ب) = ٩٠° ، ق (∠ ب م حـ) = ١١٠°

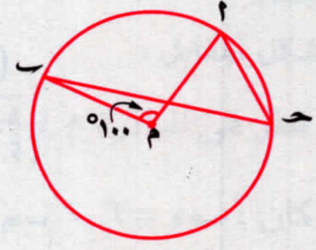
∴ ق (∠ ٢ م حـ) = ٣٦٠° − (٩٠° + ١١٠°) = ١٦٠°

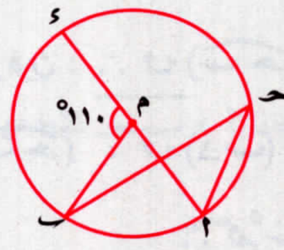
، ∵ ∠ ٢ ب حـ المحيطية تشترك مع ∠ ٢ م حـ المركزية فى ⌒٢ حـ

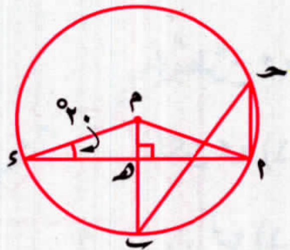
∴ ق (∠ ٢ ب حـ) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ ٢ م حـ) = ٨٠° (وهو المطلوب)

حاول بنفسك ١

فى كل مما يأتى أوجد ق (∠ ٢ حـ ب) علمًا بأن م مركز الدائرة :

١


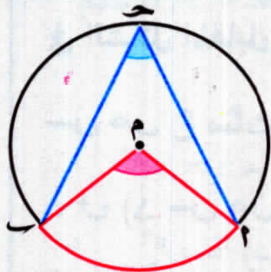
٢


٣


نتيجة ١

قياس الزاوية المحيطية يساوى نصف قياس القوس المقابل لها.

ففى الشكل المقابل :



∵ ق (∠ حـ) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ ٢ م ب) (محيطية ومركزية مشتركتان فى ⌒٢ ب)

، ق (∠ ٢ م ب) = ق (⌒٢ ب) ∴ ق (∠ حـ) = $\frac{1}{2}$ ق (⌒٢ ب)

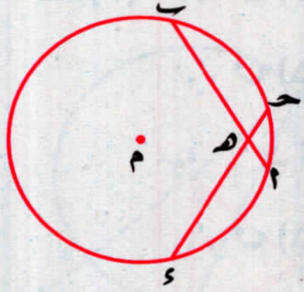
ملاحظة

قياس القوس يساوى ضعف قياس الزاوية المحيطية المحصور بين ضلعيها.

ففى الشكل السابق : ق (⌒٢ ب) = ٢ ق (∠ حـ)

مثال ٢

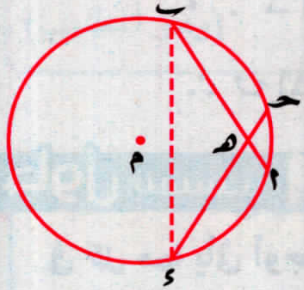
في الشكل المقابل :



$\overline{أب} \cap \overline{حـ ء} = \{هـ\}$ ، أب = حـ ء

أثبت أن : هـ أ = هـ حـ

الحل



المعطيات $\overline{أب} \cap \overline{حـ ء} = \{هـ\}$ ، أب = حـ ء

المطلوب إثبات أن : هـ أ = هـ حـ

العمل نرسم $\overline{ب ء}$

البرهان ∵ أب = حـ ء (١)

∴ ق ($\frown$ أب) = ق ($\frown$ حـ ء)

وبطرح ق ($\frown$ أحـ) من الطرفين : ∴ ق ($\frown$ ب حـ) = ق ($\frown$ أ ء)

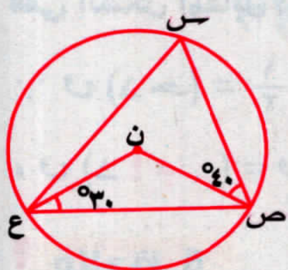
لكن ق (∠ ء) = $\frac{1}{2}$ ق ($\frown$ ب حـ) ، ق (∠ ب) = $\frac{1}{2}$ ق ($\frown$ أ ء)

∴ ق (∠ ء) = ق (∠ ب) ∴ هـ ب = هـ ء (٢)

، وبطرح (٢) من (١) : ∴ هـ أ = هـ حـ (وهو المطلوب)

حاول بنفسك ٢

في الشكل المقابل :



س ص ع مثلث مرسوم داخل دائرة ن

، ق (∠ س ص ن) = ٤٠° ، ق (∠ ن ع ص) = ٣٠°

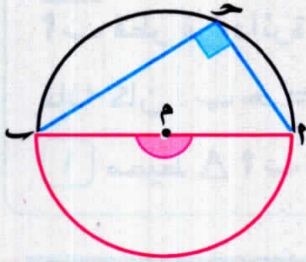
أوجد كلًا مما يأتي :

١ ق (∠ ن) ٢ ق (∠ س)

٣ ق ($\frown$ س ع) ٤ ق ($\frown$ س ص)

نتيجة ٢

الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة قائمة.



ففى الشكل المقابل :

∵ ق (∠ حـ) = $\frac{1}{2}$ ق (⌒أب) (نتيجة (١))

، ق (⌒أب) = ١٨٠° ∴ ق (∠ حـ) = ٩٠°

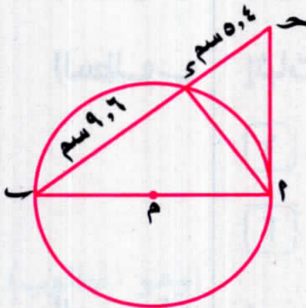
ملاحظات

١ الزاوية المحيطية القائمة تكون مرسومة فى نصف دائرة.

٢ الزاوية المحيطية التى يقابلها قوس أصغر من نصف دائرة تكون حادة.

٣ الزاوية المحيطية التى يقابلها قوس أكبر من نصف دائرة تكون منفرجة.

مثال ٣



فى الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م ، $\overleftrightarrow{أحـ}$ تمسها عند أ ، $\overline{بحـ}$ تقطعها فى ء

فإذا كان : ب ء = ٩,٦ سم ، ء حـ = ٥,٤ سم

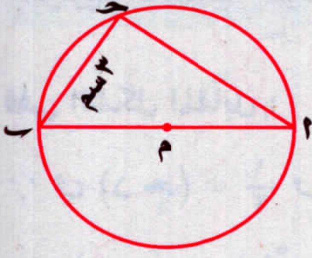
فأوجد : طول نصف قطر الدائرة م

الحل

المعطيات	$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م ، $\overleftrightarrow{أحـ}$ تمسها عند أ ، ب ء = ٩,٦ سم ، ء حـ = ٥,٤ سم
المطلوب	إيجاد : طول نصف قطر الدائرة م
البرهان	∵ $\overleftrightarrow{أحـ}$ تمس الدائرة عند أ ، $\overline{أب}$ قطر فيها ∴ ق (∠ ب أ حـ) = ٩٠°
	، ∵ $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة ∴ ق (∠ أ ء ب) = ٩٠°
	∴ △ أ ب حـ قائم الزاوية فى أ ، $\overline{أء} \perp \overline{بحـ}$
	∴ (أب)^2 = ب ء × ب حـ = ٩,٦ × (٩,٦ + ٥,٤) = ١٤٤
	∴ أب = ١٢ سم ∴ طول نصف قطر الدائرة م يساوى ٦ سم (وهو المطلوب)

حاول بنفسك ٣

فى الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ قطر فى دائرة م طول نصف قطرها ٢,٥ سم

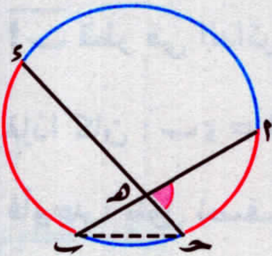
فإذا كان : ب حـ = ٣ سم فأوجد :

(١) محيط Δ أ ب حـ (٢) مساحة Δ أ ب حـ

تمارين مشهورة على نظرية (١) ونتائجها

تمرين مشهور ١

إذا تقاطع وتران فى نقطة داخل دائرة ، فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوى نصف مجموع قياسى القوسين المقابلين لها.



المعطيات $\overline{أب}$ ، $\overline{حـ ء}$ وتران فى دائرة متقاطعان فى نقطة هـ

المطلوب إثبات أن :

(١) ق (∠ أ هـ حـ) = $\frac{1}{2}$ [ق ($\overset\frown{أحـ}$) + ق ($\overset\frown{ب ء}$)]

(٢) ق (∠ حـ هـ ب) = $\frac{1}{2}$ [ق ($\overset\frown{ب حـ}$) + ق ($\overset\frown{أ ء}$)]

العمل نرسم $\overline{ب حـ}$ (أ، $\overline{أ ء}$)

البرهان ∵ ∠ أ هـ حـ خارجة عن Δ هـ ب حـ

∴ ق (∠ أ هـ حـ) = ق (∠ ب) + ق (∠ حـ)

، ∵ ق (∠ ب) = $\frac{1}{2}$ ق ($\overset\frown{أحـ}$) ، ق (∠ حـ) = $\frac{1}{2}$ ق ($\overset\frown{ب ء}$)

∴ ق (∠ أ هـ حـ) = $\frac{1}{2}$ ق ($\overset\frown{أحـ}$) + $\frac{1}{2}$ ق ($\overset\frown{ب ء}$)

= $\frac{1}{2}$ [ق ($\overset\frown{أحـ}$) + ق ($\overset\frown{ب ء}$)] (المطلوب أولاً)

وبالمثل برسم $\overline{أحـ}$ (أ، $\overline{ب ء}$) يمكن إثبات أن :

ق (∠ حـ هـ ب) = $\frac{1}{2}$ [ق ($\overset\frown{ب حـ}$) + ق ($\overset\frown{أ ء}$)] (المطلوب ثانيًا)

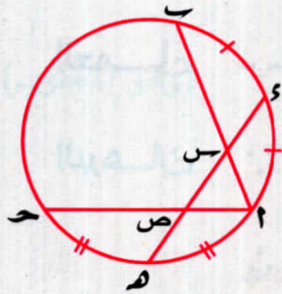
مثال ٤

أب⌒ ، أحـ⌒ وتران فى دائرة ، ء منتصف أب⌒ ، هـ منتصف أحـ⌒

، رسم ءهـ فقطع أب فى س ، أحـ فى ص

أثبت أن : Δ أ س ص متساوى الساقين.

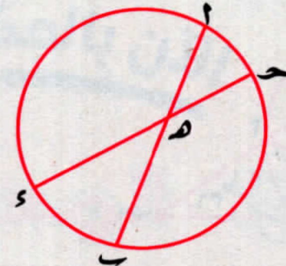
الحل



المعطيات	ء منتصف أب⌒ ، هـ منتصف أحـ⌒
المطلوب	إثبات أن : Δ أ س ص متساوى الساقين.
البرهان	∵ ق (∠ أ س هـ) = $\frac{1}{2}$ [ق (أهـ⌒) + ق (بء⌒)]
	، ق (∠ أ ص ء) = $\frac{1}{2}$ [ق (حـهـ⌒) + ق (أء⌒)]
	، ∵ ء منتصف أب⌒ ، هـ منتصف أحـ⌒
	∴ ق (أهـ⌒) = ق (حـهـ⌒) ، ق (بء⌒) = ق (أء⌒)
	∴ ق (∠ أ س هـ) = ق (∠ أ ص ء)
	∴ أ س = أ ص
	∴ Δ أ س ص متساوى الساقين. (وهو المطلوب)

حاول بنفسك ٤

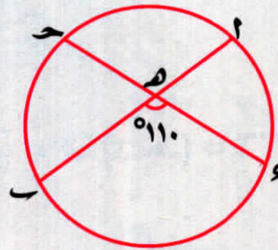
١



إذا كان : ق (أحـ⌒) + ق (بء⌒) = ٨٠°

فأوجد : ق (∠ أ هـ حـ)

٢



إذا كان : ق (∠ ء هـ ب) = ١١٠°

، ق (بحـ⌒) = ٧٠°

فأوجد : ق (أء⌒)

تمرين مشهور ٢

إذا تقاطع شعاعان حاملان لوترين فى دائرة خارجها ، فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوى نصف قياس القوس الأكبر مطروحًا منه نصف قياس القوس الأصغر اللذين يحصرهما ضلعا هذه الزاوية.

المعطيات	$\overleftarrow{حب} \cap \overleftarrow{هء} = \{أ\}$
المطلوب	إثبات أن : ق (∠ أ) = $\frac{1}{2}$ [ق (حه⌒) − ق (بء⌒)]
العمل	نرسم $\overline{ءح}$ (أ، $\overline{به}$)
البرهان	∵ ∠ حءه خارجة عن Δ أءح
	∴ ق (∠ حءه) = ق (∠ أ) + ق (∠ ح)
	∴ ق (∠ أ) = ق (∠ حءه) − ق (∠ ح)
	، ∵ ق (∠ حءه) = $\frac{1}{2}$ ق (حه⌒) ، ق (∠ ح) = $\frac{1}{2}$ ق (بء⌒)
	∴ ق (∠ أ) = $\frac{1}{2}$ ق (حه⌒) − $\frac{1}{2}$ ق (بء⌒)
	= $\frac{1}{2}$ [ق (حه⌒) − ق (بء⌒)] (وهو المطلوب)

مثال ٥

فى الشكل المقابل :

$\overleftarrow{هأ} \cap \overleftarrow{بء} = \{ح\}$ ، ق (∠ ح) = ٣٦° ، ق (∠ أبء) = ٢٢°

أوجد : ق (به⌒)

الحل

المعطيات	$\overleftarrow{هأ} \cap \overleftarrow{بء} = \{ح\}$ ، ق (∠ ح) = ٣٦° ، ق (∠ أبء) = ٢٢°
المطلوب	إيجاد : ق (به⌒)

البرهان ∵ $ق$(∠ أ ب ء) = ٢٢° ∴ $ق$($\overset\frown{أء}$) = ٢ $ق$(∠ أ ب ء) = ٤٤°

، ∵ $\overleftrightarrow{هـ أ}$ ∩ $\overleftrightarrow{ب ء}$ = {حـ} ∴ $ق$(∠ حـ) = $\frac{1}{2}$[$ق$($\overset\frown{ب هـ}$) − $ق$($\overset\frown{أء}$)]

∴ ٣٦° = $\frac{1}{2}$ [$ق$($\overset\frown{ب هـ}$) − ٤٤°]

∴ ٧٢° = $ق$($\overset\frown{ب هـ}$) − ٤٤° ∴ $ق$($\overset\frown{ب هـ}$) = ١١٦° **(وهو المطلوب)**

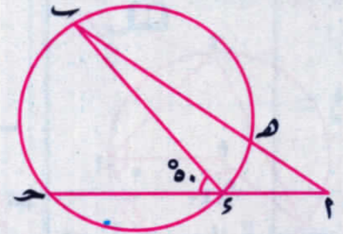
برهان آخر ∵ ∠ هـ أ ب خارجة عن Δ أ حـ ب

∴ $ق$(∠ هـ أ ب) = $ق$(∠ حـ) + $ق$(∠ ب) = ٣٦° + ٢٢° = ٥٨°

∴ $ق$($\overset\frown{هـ ب}$) = ٢ $ق$(∠ هـ أ ب) = ٢ × ٥٨° = ١١٦° **(وهو المطلوب)**

حاول بنفسك ٥

١

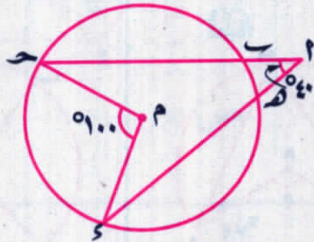


إذا كان : $ق$(∠ ب ء حـ) = ٥٠°

، $ق$($\overset\frown{ء هـ}$) = ٣٠°

فأوجد : $ق$(∠ أ)

٢



إذا كان : $ق$(∠ أ) = ٤٠°

، $ق$(∠ ء م حـ) = ١٠٠°

فأوجد : $ق$($\overset\frown{ب هـ}$)



تمارين 7
على العلاقة بين الزاويتين المحيطية والمركزية المشتركتين فى القوس - تمارين مشهورة



اختبار تفاعلى

● تذكر ● فهم ● تطبيق ● حل مشكلات | أسئلة كتاب الوزارة

أولاً مسائل على نظرية (١) ونتائجها

١ فى كل مما يأتى أوجد قياسات الزوايا والأقواس المشار إليها بالعلامة (؟) علمًا بأن م مركز الدائرة :

١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٧ ، ١٨ ، ١٩ ، ٢٠

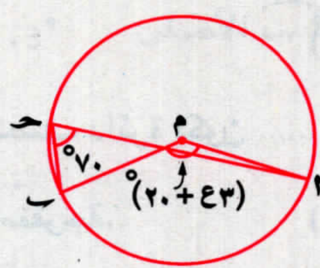
٢ في كل من الأشكال الآتية ، م دائرة ، أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس :

١



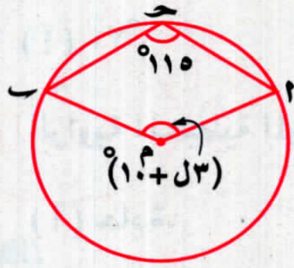
ص = ...

٢



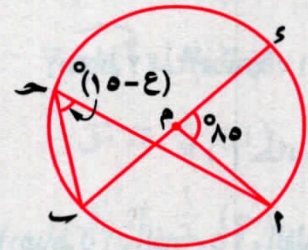
ع = ...

٣



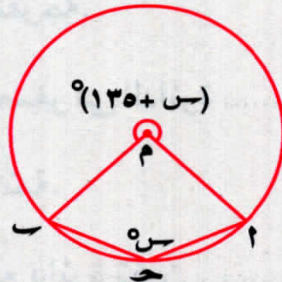
ل = ...

٤



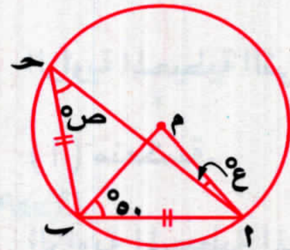
ع = ...

٥



س = ...

٦



ص = ... ، ع = ...

٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ قياس الزاوية المحيطية يساوى .... قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس.

(الإسكندرية ٢٣ ، القاهرة ١٩ ، الجيزة ١٧ ، أسوان ١٥)

(أ) نصف (ب) ضعف (جـ) ربع (د) ثلث

٢ النسبة بين قياس الزاوية المركزية وقياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى نفس القوس تساوى ....

(كفر الشيخ ٢٥)

(أ) ١ : ٢ (ب) ٦ : ٣ (جـ) ١ : ١ (د) ١ : ٣

٣ إذا كان قياس زاوية مركزية ١٠٠° فإن قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى نفس القوس يساوى ....

(الجيزة ١١)

(أ) ٢٠٠° (ب) ١٠٠° (جـ) ٥٠° (د) ٢٥°

٤ قياس القوس المقابل لزاوية محيطية قياسها ٤٠° يساوى ....

(أ) ٢٠° (ب) ٤٠° (جـ) ٨٠° (د) ٩٠°

٥ الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة تكون .... (الغربية ٢٥ ، السويس ٢٤ ، الوادى الجديد ٢٣)

(أ) حادة. (ب) منفرجة. (جـ) قائمة. (د) مستقيمة.

٦ الزاوية المحيطية التى تقابل قوسًا أكبر من نصف دائرة .... (البحيرة ٢٣)

(أ) حادة. (ب) منفرجة. (جـ) قائمة. (د) مستقيمة.

٧ الزاوية المحيطية التى تقابل قوسًا أصغر فى الدائرة .... (دمياط ٢٣ ، الإسكندرية ١٧ ، قنا ١٦)

(أ) منعكسة. (ب) قائمة. (جـ) منفرجة. (د) حادة.

٨ الزاوية المحيطية المرسومة فى ربع دائرة تكون .... (دمياط ٢٥ ، الفيوم ٢٥ ، القليوبية ٢٣)

(أ) حادة. (ب) قائمة. (جـ) منفرجة. (د) مستقيمة.

٩ أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع مرسوم داخل دائرة فإن : ق $(\overset{\frown}{أب})$ = ... (الفيوم ١٨)

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

١٠ طول القوس المقابل لزاوية محيطية قائمة فى دائرة محيطها ٤٤ سم

يساوى .... سم (الدقهلية ١٢)

(أ) ٢٢ (ب) ١١ (جـ) $\frac{٢٢}{٧}$ (د) $\frac{٤٤}{٧}$

١١ قياس الزاوية المحيطية المرسومة فى $\frac{١}{٣}$ دائرة يساوى .... (القاهرة ٠٩)

(أ) ٢٤٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ٦٠° (د) ٣٠°

١٢ قياس الزاوية المحيطية التى تحصر قوسًا يمثل $\frac{١}{٣}$ دائرة يساوى ....

(أ) ٢٤٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ٦٠° (د) ٣٠°

١٣ قوس من دائرة طوله $\frac{١}{٢}$ π نق سم فإنه يقابل زاوية محيطية قياسها يساوى ....° (الغربية ٢٥)

(أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (جـ) ١٢٠ (د) ٩٠

١٤ في الشكل المقابل :



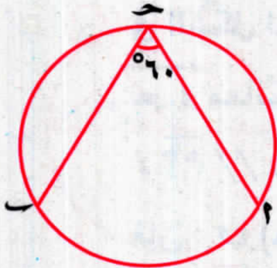
ق (∠ أ حـ ب) المحيطية المقابلة $\overset{\frown}{أ ب}$ الأصغر

يمكن أن يساوى ....°

(أ) ١٠٠ (ب) ٩٥

(جـ) ٩٠ (د) ٧٠ (القاهرة ٢٥)

١٥ في الشكل المقابل :



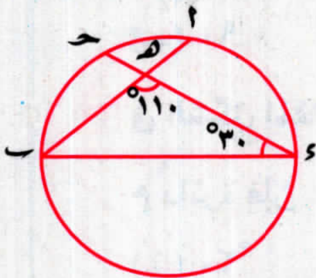
ق (∠ أ حـ ب) = ٦٠°

فإن طول $\overset{\frown}{أ ب}$ = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}$ π نق (ب) $\frac{١}{٣}$ π نق

(جـ) $\frac{١}{٦}$ π نق (د) ٢ π نق (الإسماعيلية ٢٣)

١٦ في الشكل المقابل :



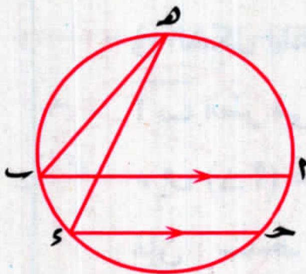
$\overline{أ ب}$ ∩ $\overline{حـ ء}$ = {هـ} ، ق (∠ ء) = ٣٠°

، ق (∠ ء هـ ب) = ١١٠°

فإن : ق ($\overset{\frown}{أ ء}$) = ...

(أ) ٨٠° (ب) ٧٠° (جـ) ٤٠° (د) ٦٠° (القليوبية ٢٥)

١٧ في الشكل المقابل :



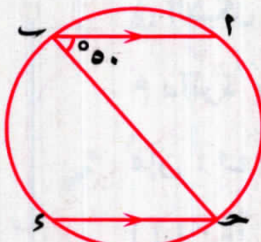
$\overline{أ ب}$ ، $\overline{حـ ء}$ وتران متوازيان

، ق ($\overset{\frown}{أ حـ}$) = ٣٠°

فإن : ق (∠ ب هـ ء) = ...

(أ) ١٥° (ب) ١٠° (جـ) ٣٠° (د) ٦٠° (الجيزة ٢٣)

١٨ في الشكل المقابل :



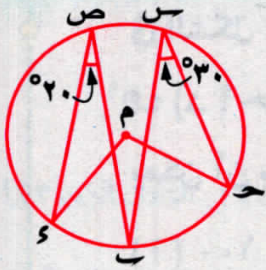
$\overline{ب أ}$ // $\overline{حـ ء}$

، ق (∠ ب) = ٥٠°

فإن : ق ($\overset{\frown}{أ حـ}$) + ق ($\overset{\frown}{ب ء}$) = ...

(أ) ٥٠° (ب) ٢٠٠° (جـ) ١٥٠° (د) ١٨٠° (أسوان ٢٣)

١٩ في الشكل المقابل :



دائرة مركزها م ، ق (∠ س) = ٣٠° ، ق (∠ ص) = ٢٠°

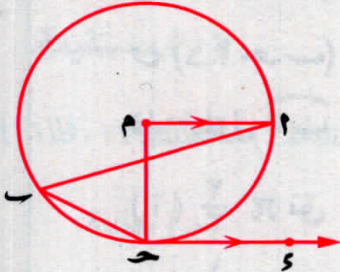
فإن : ق (∠ حـ م ء) = ...°

(أ) ٤٠ (ب) ٥٠

(جـ) ٦٠ (د) ١٠٠

(الدقهلية ٢٥)

٢٠ في الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{حـ ء}$ مماسًا للدائرة م عند حـ

، $\overline{أ م}$ // $\overleftrightarrow{حـ ء}$

فإن : ق (∠ أ ب حـ) = ...°

(أ) ٦٠ (ب) ٤٥

(جـ) ٩٠ (د) ٣٠

(الشرقية ٢٥)

٢١ في الشكل المقابل :

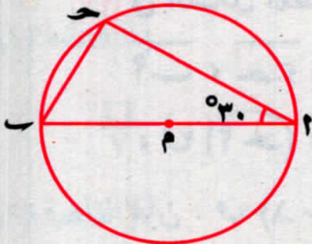


م دائرة فإن : ق (∠ حـ أ م) = ...

(أ) ٢٠° (ب) ٣٠°

(جـ) ٤٠° (د) ٥٠°

٢٢ في الشكل المقابل :



$\overline{أ ب}$ قطر في الدائرة م التي طول نصف قطرها ٤ سم

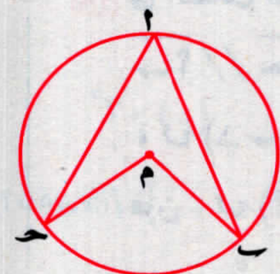
، ق (∠ أ) = ٣٠°

فإن : ب حـ = ... سم

(مطروح ١١)

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

٢٣ في الشكل المقابل :



م دائرة ، إذا كان : ق (∠ م) − ق (∠ أ) = ٥٠°

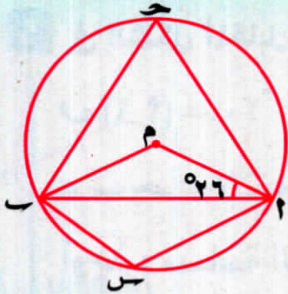
فإن : ق (∠ أ) = ...

(المنيا ١٧ ، بورسعيد ١٣)

(أ) ٤٠° (ب) ٥٠°

(جـ) ١٠٠° (د) ١٣٠°

٤ في الشكل المقابل :



ا ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة م ،

م ا ، م ب نصفا قطرين فيها ، ق (∠ م ا ب) = ٢٦° ، س ∈ ا ب

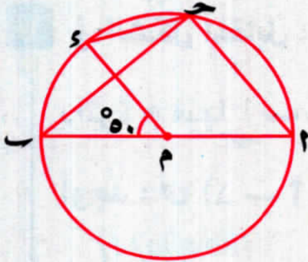
أوجد بالبرهان : [١] ق (∠ ا م ب) [٢] ق (∠ ا حـ ب)

[٣] ق (∠ ا س ب) [٤] ق (ا س ب)

«١٢٨° ، ٦٤° ، ١١٦° ، ١٢٨°»

---

٥ في الشكل المقابل :



ا ب قطر في الدائرة م

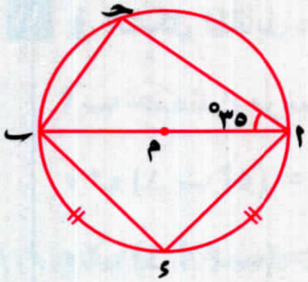
، ق (∠ ب م ء) = ٥٠°

أوجد : ق (∠ ا حـ ء)

(دمياط ١٤) «١١٥°»

---

٦ في الشكل المقابل :



ا ب قطر في الدائرة م

، طول (ا ء) = طول (ب ء)

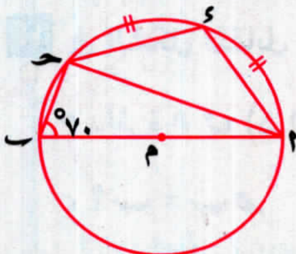
، ق (∠ حـ ا ب) = ٣٥°

أوجد بالبرهان : ق (∠ حـ ب ء)

(المنيا ١١) «١٠٠°»

---

٧ في الشكل المقابل :



ا ب قطر في الدائرة م

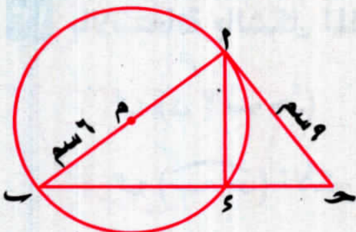
، طول (ا ء) = طول (ء حـ) ، ق (∠ ا ب حـ) = ٧٠°

أوجد كلًا من : ق (∠ ء حـ ا) ، ق (∠ حـ ا ب)

(الإسماعيلية ٠٥) «٣٥° ، ٢٠°»

---

٨ في الشكل المقابل :



ا ب قطر في دائرة مركزها م ، ا حـ تمس الدائرة عند ا

، فإذا كان : ا حـ = ٩ سم ، ب م = ٦ سم

أوجد : طول كل من ب حـ ، ا ء

(سوهاج ١٧ ، كفر الشيخ ٠٤) «١٥ سم ، ٧,٢ سم»

٩ في الشكل المقابل :

$ق(\angle أ) = ٣٠°$

، ب حـ = ٧ سم

أوجد : مساحة الدائرة م $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$



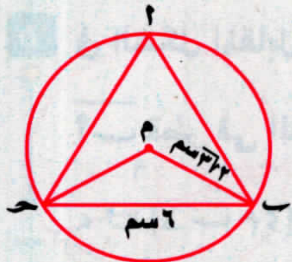
(قنا ٢٣ ، الغربية ٠٩) «١٥٤ سم²»

---

١٠ في الشكل المقابل :

دائرة م فيها : ب حـ = ٦ سم ، ب م = $٢\sqrt{٣}$ سم

أوجد : ق(∠ ب أ حـ) (إرشاد : ارسم $\overline{مء} \perp \overline{ب حـ}$)



(الوادى الجديد ١٣) «٦٠°»

---

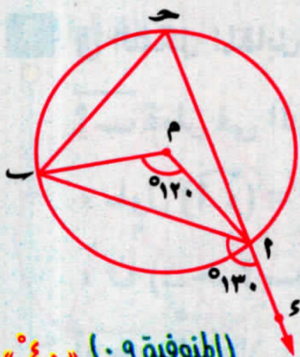
١١ في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة م ، ء ∈ $\overleftarrow{حـ أ}$

، ق(∠ ب أ ء) = ١٣٠°

، ق(∠ أ م ب) = ١٢٠°

أوجد : ق(∠ م ب حـ)



(المنوفية ٠٩) «٤٠°»

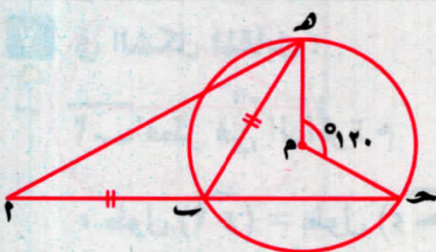
---

١٢ في الشكل المقابل :

م دائرة ، ق(∠ هـ م حـ) = ١٢٠°

، أ ب = ب هـ

أوجد بالبرهان : ق(∠ أ)



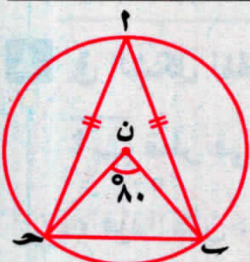
(ج. سيناء ١٦) «٣٠°»

---

١٣ بالاستعانة بالشكل المقابل أوجد :

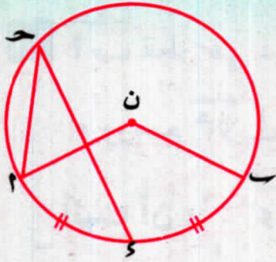
[١] ق(∠ أ ب حـ)

[٢] ق($\overset{\frown}{ب حـ}$) الأكبر.



(القاهرة ١٩ ، الوادى الجديد ٠٦) «٧٠° ، ٢٨٠°»

١٤ في الشكل المقابل :



ء منتصف $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$

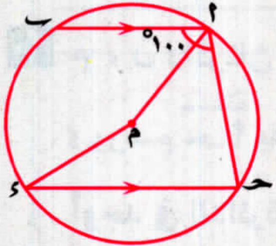
أثبت أن :

ق (∠ أ حـ ء) = $\frac{1}{4}$ ق (∠ أ ن ب)

(بنى سويف ٠٤)

---

١٥ في الشكل المقابل :



$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{حـ ء}}$ وتران في الدائرة م

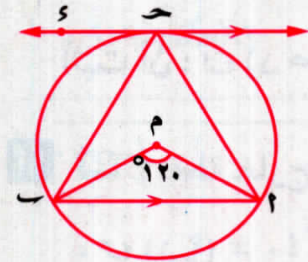
، ق (∠ ب أ حـ) = ١٠٠° ، $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{حـ ء}}$

أوجد : ق (∠ أ م ء)

(الدقهلية ١٨) «١٦٠°»

---

١٦ في الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ مماس للدائرة عند حـ

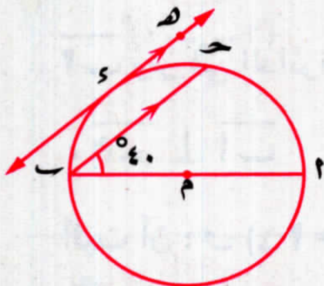
، $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ ، ق (∠ أ م ب) = ١٢٠°

أثبت أن : المثلث حـ أ ب متساوى الأضلاع.

(القليوبية ٢٤ ، الأقصر ٢٣ ، الجيزة ١٩ ، الإسكندرية ١٩ ، ج. سيناء ١٨ ، الإسكندرية ١٦)

---

١٧ في الشكل المقابل :



$\overline{\text{أ ب}}$ قطر في الدائرة م ، ق (∠ ب) = ٤٠°

، $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$ مماس للدائرة عند ء

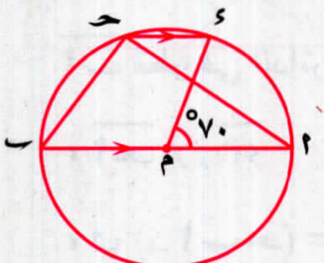
، $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

أوجد : ق ($\overset{\frown}{\text{حـ ء}}$)

(السويس ٢٥ ، المنوفية ١٧) «٥٠°»

---

١٨ في الشكل المقابل :



$\overline{\text{أ ب}}$ قطر في الدائرة م

، $\overline{\text{ء حـ}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$

، ق (∠ أ م ء) = ٧٠°

أوجد بالبرهان : ق (∠ أ حـ ء) ، ق (∠ أ ب حـ)

(المنيا ١٧) «٣٥° ، ٥٥°»

١٩ $\overline{أب}$ قطر فى دائرة م ، $\overline{أحـ}$ وتر فيها حيث ق (∠ ب أ حـ) = ٣٠° ، رسمت $\overline{بحـ}$

، ورسم $\overleftrightarrow{مء}$ ⊥ $\overline{أحـ}$ يقطعه فى ء

أثبت أن : ١ $\overline{ءم}$ // $\overline{بحـ}$

٢ طول $\overline{بحـ}$ = طول نصف قطر الدائرة. (المنوفية ١٧)

---

٢٠ م ، ن دائرتان متماستان من الخارج فى أ ، رُسم $\overleftrightarrow{بأ}$ يقطع الدائرة م فى ب ويقطع الدائرة ن فى ء ورسم $\overleftrightarrow{حـأ}$ يقطع الدائرة م فى حـ ويقطع الدائرة ن فى هـ ، فإذا كان ق (∠ ب م حـ) = ١٤٠°

أوجد فى الدائرة ن : ق ($\widehat{هـء}$) (الدقهلية ١٦) «١٤٠°»

---

٢١ $\overline{بحـ}$ قطر فى دائرة م ، $\overline{بص}$ وتر فيها ، هـ ∈ $\overleftarrow{بص}$ حيث ص منتصف $\overline{بهـ}$

أثبت أن : ق (∠ ص م حـ) = ٢ ق (∠ ب هـ حـ) (الدقهلية ١٨)

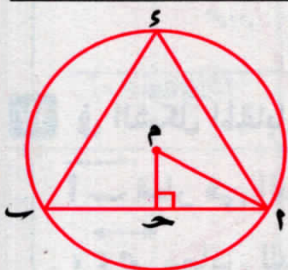
---

٢٢ أ نقطة خارج الدائرة م ، $\overleftarrow{أب}$ مماس للدائرة عند ب ، $\overline{أم}$ قطع الدائرة م فى حـ ، ء على الترتيب

، ق (∠ أ) = ٤٠° أوجد بالبرهان : ق (∠ ب ء حـ) «٢٥°»

---

٢٣ فى الشكل المقابل :



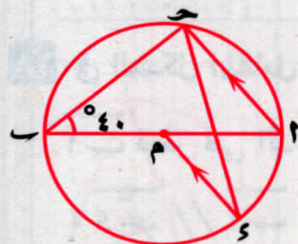
$\overline{أب}$ وتر فى الدائرة م

، $\overline{مجـ}$ ⊥ $\overline{أب}$

أثبت أن : ق (∠ أ م حـ) = ق (∠ أ ء ب) (المنيا ١٩ ، بورسعيد ١٤ ، البحيرة ١٣)

---

٢٤ فى الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م

، $\overline{أحـ}$ // $\overline{مء}$

، ق (∠ أ ب حـ) = ٤٠°

أوجد : ق (∠ أ حـ ء) (الشرقية ٢٥) «٢٥°»

٢٥ في الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ وتر فى الدائرة م ، $\overline{حم}$ // $\overline{أب}$

، $\overline{بح} \cap \overline{أم} = \{هـ\}$

أثبت أن : ب هـ > أ هـ

(القليوبية ١٩ ، المنوفية ١٨ ، الغربية ١٨ ، الغربية ١٧ ، بنى سويف ١٦)

---

٢٦ في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة م

، ق ($\overset\frown{أب}$) : ق ($\overset\frown{بح}$) : ق ($\overset\frown{أح}$) = ٤ : ٥ : ٣

أوجد : ق (∠ أ حـ ب)

(الإسكندرية ١٦) «٦٠°»

---

٢٧ في الشكل المقابل :

م دائرة ، ق (∠ ب أ حـ) = (س + ١٠)°

، ق ($\overset\frown{بح}$) = (٣ س − ٢٠)°

، ق (∠ م) = ص°

أوجد قيمتى : س ، ص

«٤٠° ، ١٠٠°»

---

٢٨ في الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ قطر فى نصف دائرة م

، حـ ء = حـ ب = نق

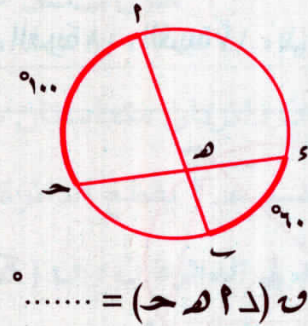
أوجد : ق (∠ أ ء م)

«١٠٥°»

ثانيًا مسائل على التمارين المشهورة

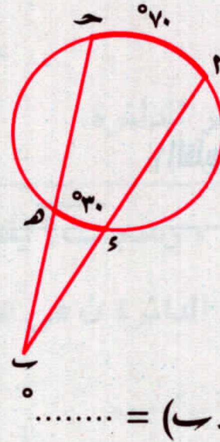
١ ادرس كلًا من الأشكال الآتية ثم أكمل :

١



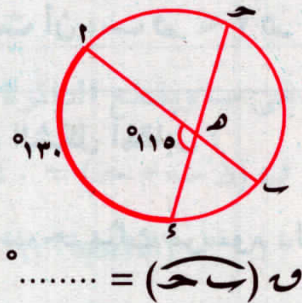
ق (∠ أ هـ حـ) = ... °

٢



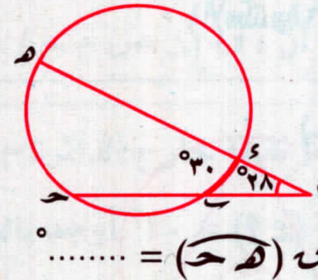
ق (∠ ب) = ... °

٣



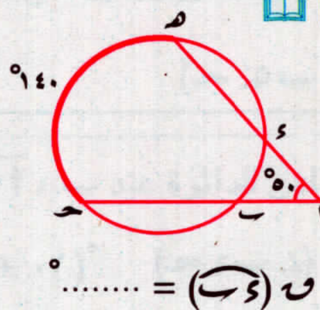
ق (⌒ب حـ) = ... °

٤



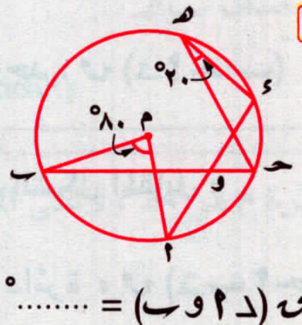
ق (⌒هـ حـ) = ... °

٥



ق (⌒ء ب) = ... °

٦



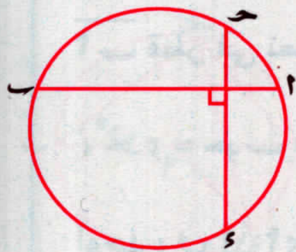
ق (∠ أ و ب) = ... °

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا تقاطع وتران فى نقطة داخل الدائرة فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوى .... مجموع قياسى القوسين المقابلين لهما. (القاهرة ٢٣)

(أ) ضعف (ب) نصف (جـ) ثلث (د) ربع

٢ فى الشكل المقابل :



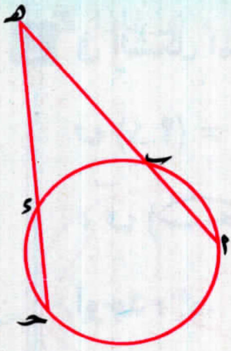
ق (⌒أ حـ) + ق (⌒ب ء) = ...

(أ) ٤٥° (ب) ٩٠°

(جـ) ١٨٠° (د) ٢٧٠°

(بورسعيد ٢٣ ، القاهرة ١٦ ، المنوفية ١٥)

٣ فى الشكل المقابل :



إذا كان : ق (⌒أ حـ) − ق (⌒ب ء) = ٧٠°

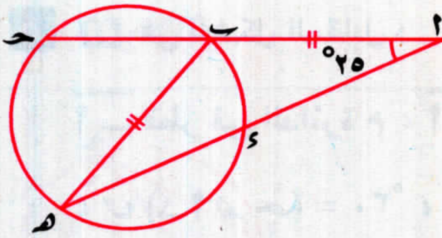
فإن : ق (∠ د هـ) = …………

(أ) ٣٥° (ب) ٧٠°

(جـ) ١١٠° (د) ١٤٠°

(الأقصر ١١)

٤ فى الشكل المقابل :



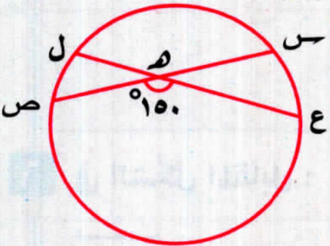
أب = ب هـ

، ق (∠ هـ أ حـ) = ٢٥°

فإن : ق (⌒حـ هـ) = …………

(أ) ٢٥° (ب) ٥٠° (جـ) ١٠٠° (د) ١٨٠°

٥ فى الشكل المقابل :

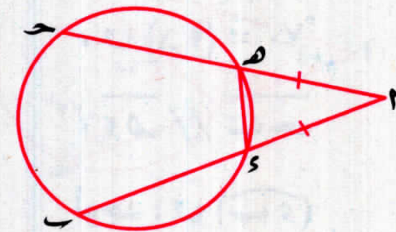


إذا كان : ق (∠ ع هـ ص) = ١٥٠°

فإن : ق (⌒س ع) + ق (⌒ل ص) = …………

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٠٠°

٦ فى الشكل المقابل :



إذا كان : ق (⌒ب حـ) = ١١٢°

، ق (⌒ء هـ) = ٤٤° ، أء = أهـ

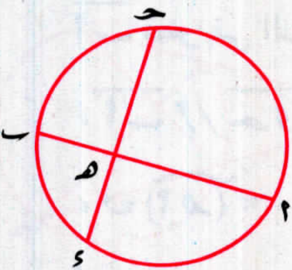
فإن : ق (∠ أ ء هـ) = …………

(أ) ٧٥° (ب) ٧٣° (جـ) ٧٠° (د) ٧٦°

(كفر الشيخ ٠٨)

---

٣ فى الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ ، $\overline{حـ ء}$ وتران فى الدائرة ، $\overline{أب}$ ∩ $\overline{حـ ء}$ = {هـ}

فإذا كان : ق (⌒ب ء) = ٦٠° ، ق (⌒أ ء) = ١٠٠°

، ق (⌒أ حـ) = ١٢٠°

فاحسب : ١ ق (⌒حـ ب) ٢ ق (∠ حـ هـ ب)

(الإسكندرية ٠٥) «٨٠° ، ٩٠°»

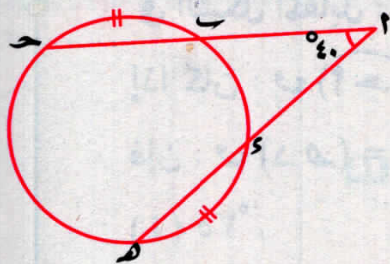
٤ في الشكل المقابل :

$ق(\angle ا) = ٤٠°$ ، $ق(\overset{\frown}{ب ء}) = ٦٠°$

، $ق(\overset{\frown}{ب حـ}) = ق(\overset{\frown}{ء هـ})$

أوجد : [١] $ق(\overset{\frown}{هـ حـ})$

[٢] $ق(\overset{\frown}{ب حـ})$



(بوسعيد ١٧ ، ش. سيناء ١٧) «١٤٠° ، ٨٠°»

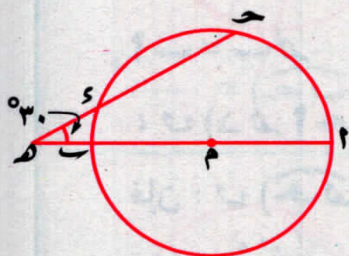
---

٥ في الشكل المقابل :

$\overline{اب}$ قطر في الدائرة م ، $\overleftrightarrow{اب} \cap \overleftrightarrow{حـ ء} = \{هـ\}$

، $ق(\angle ا هـ حـ) = ٣٠°$ ، $ق(\overset{\frown}{ا حـ}) = ٨٠°$

أوجد : $ق(\overset{\frown}{حـ ء})$



(أسوان ٢٣ ، الإسكندرية ١٨ ، الشرقية ١٧ ، أسوان ١٧) «٨٠°»

---

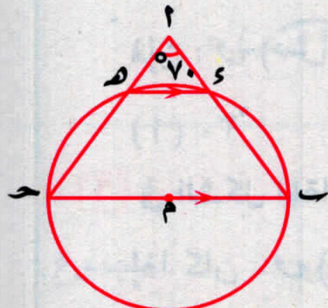
٦ في الشكل المقابل :

$\overline{ب حـ}$ قطر في الدائرة م

، $ق(\angle ا) = ٧٠°$

، $\overline{ء هـ} \parallel \overline{ب حـ}$

أوجد : $ق(\overset{\frown}{ب ء})$



(الدقهلية ١٧ ، الشرقية ١٣) «٧٠°»

---

٧ في الشكل المقابل :

$\overline{اب}$ قطر في الدائرة م

، $\overline{اب} \parallel \overline{حـ ء}$ ، $ق(\overset{\frown}{حـ ء}) = ٨٠°$

، $ق(\overset{\frown}{ا هـ}) = ١٠٠°$

أوجد بالبرهان : $ق(\angle ء هـ ب)$ ، $ق(\angle ا و هـ)$



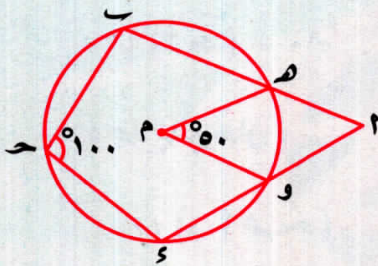
(المنيا ١٧) «٢٥° ، ٧٥°»

٨ ؟ نقطة خارج الدائرة م ، رسم $\overleftrightarrow{\text{؟ح}}$ يقطع الدائرة فى ب ، ح ، $\overleftrightarrow{\text{؟ه}}$ يقطعها فى ء ، ه فإذا كان :

ق (∠ ح م ه) = ١٠٠° ، ق (∠ ب م ء) = ٤٠° أوجد : ق (∠ ؟) «٣٠°»

---

٩ فى الشكل المقابل :



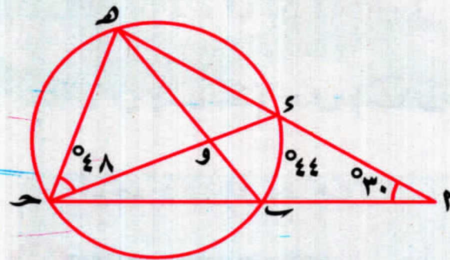
دائرة م ، ق (∠ م) = ٥٠°

، ق (∠ ح) = ١٠٠°

أوجد : ق (∠ ؟) (الأقصر ١٩) «٥٥°»

---

١٠ فى الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{\text{حب}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{هء}}$ = {؟} ، $\overline{\text{به}}$ ∩ $\overline{\text{حء}}$ = {و}

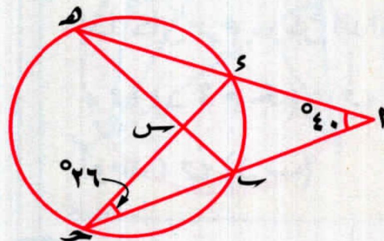
فإذا كان : ق (∠ ؟) = ٣٠° ، ق ($\overset{\frown}{\text{بء}}$) = ٤٤°

، ق (∠ ء ح ه) = ٤٨°

أوجد : [١] ق ($\overset{\frown}{\text{حه}}$) [٢] ق ($\overset{\frown}{\text{بح}}$) «١٠٤° ، ١١٦°»

---

١١ فى الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{\text{حب}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{هء}}$ = {؟} ، ق (∠ ؟) = ٤٠°

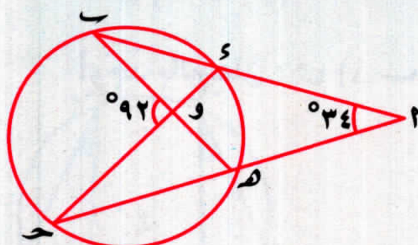
، $\overline{\text{ءح}}$ ∩ $\overline{\text{به}}$ = {س} ، ق (∠ ح) = ٢٦°

أوجد : [١] ق ($\overset{\frown}{\text{حه}}$)

[٢] ق (∠ ه س ح) (البحر الأحمر ١٩ ، الغربية ١٧ ، الإسماعيلية ١٦) «١٣٢° ، ٩٢°»

---

١٢ فى الشكل المقابل :

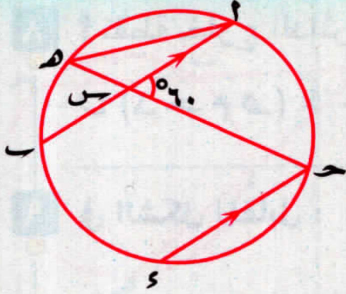


ق (∠ ؟) = ٣٤°

، ق (∠ ب و ح) = ٩٢°

أوجد : ق (∠ ح ء ب) «٦٣°»

١٣ في الشكل المقابل :



أب // حـء ، ق (∠ أ س حـ) = ٦٠°

، ق (⌒أحـ) = ٨٠°

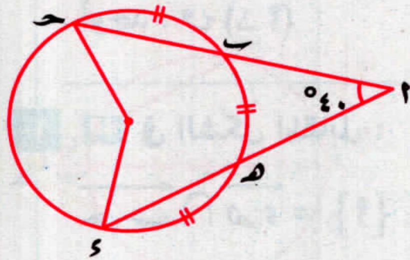
أوجد بالبرهان :

[١] ق (∠ أ هـ حـ) [٢] ق (⌒ب ء) [٣] ق (⌒ب هـ)

«٤٠° ، ٨٠° ، ٤٠°»

---

١٤ في الشكل المقابل :



م دائرة ، ق (∠ أ) = ٤٠°

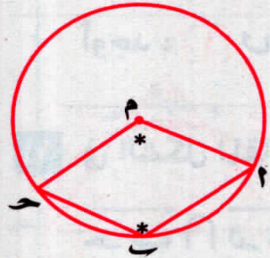
، ق (⌒ب حـ) = ق (⌒ب هـ) = ق (⌒هـ ء)

أوجد : ق (∠ حـ م ء)

«١٥٠°»

للمتفوقين

١ في الشكل المقابل :



إذا كان : م مركز الدائرة

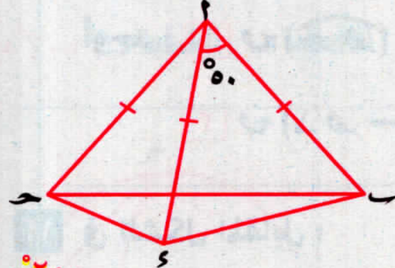
، ق (∠ أ م حـ) = ق (∠ ب)

أوجد : ق (∠ ب)

(المنوفية ٠٦) «١٢٠°»

---

٢ في الشكل المقابل :



أب = أء = أحـ

، ق (∠ ب أ ء) = ٥٠°

أوجد بالبرهان : ق (∠ ب حـ ء)

«٢٥°»

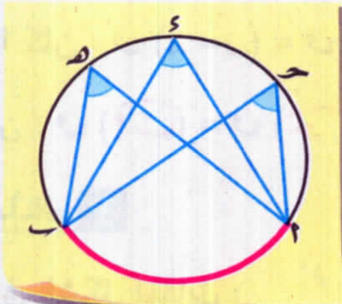
الدرس 3

الزوايا المحيطية المرسومة على نفس القوس



نظرية ٢

الزوايا المحيطية التى تحصر نفس القوس فى الدائرة الواحدة متساوية فى القياس.



المعطيات ∠ حـ ، ∠ ء ، ∠ هـ زوايا محيطية مشتركة فى $\overset{\frown}{أب}$

المطلوب إثبات أن : ق (∠ حـ) = ق (∠ ء) = ق (∠ هـ)

البرهان ∵ ق (∠ حـ) = $\frac{1}{2}$ ق ($\overset{\frown}{أب}$)

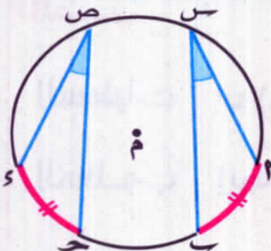
، ق (∠ ء) = $\frac{1}{2}$ ق ($\overset{\frown}{أب}$)

، ق (∠ هـ) = $\frac{1}{2}$ ق ($\overset{\frown}{أب}$)

∴ ق (∠ حـ) = ق (∠ ء) = ق (∠ هـ) (وهو المطلوب)

نتيجة

الزوايا المحيطية التى تحصر أقواسًا متساوية فى القياس فى الدائرة الواحدة (أو فى عدة دوائر) تكون متساوية فى القياس.



أى أنه : فى الدائرة م إذا كان : ق ($\overset{\frown}{أب}$) = ق ($\overset{\frown}{حـ ء}$)

فإن : ق (∠ س) = ق (∠ ص)

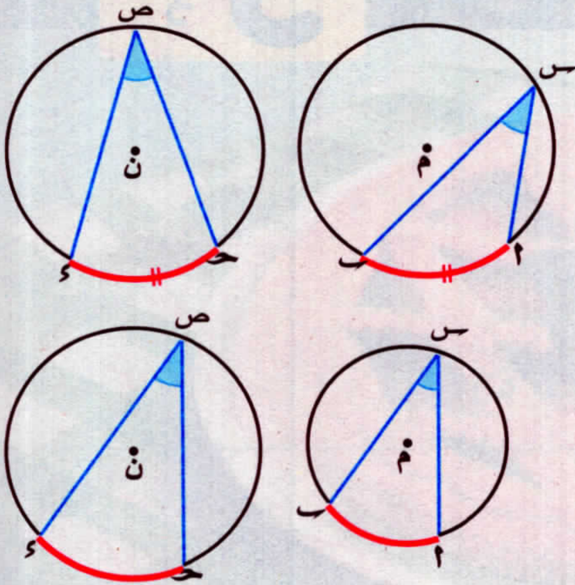
فى هذه الحالة يكون طول $\overset{\frown}{أب}$ = طول $\overset{\frown}{حـ ء}$

• وكذلك : إذا كانت م ، ن دائرتين متطابقتين

وكان : ق (⌒أب) = ق (⌒حـ ء)

فإن : ق (∠ س) = ق (∠ ص)

فى هذه الحالة يكون طول ⌒أب = طول ⌒حـ ء



• وبالمثل فى أى دائرتين م ، ن

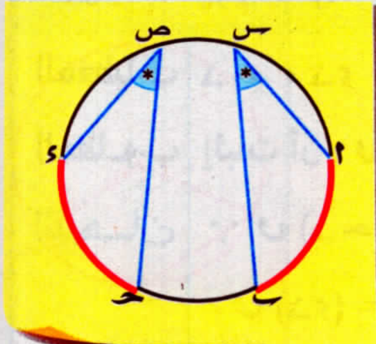
إذا كان : ق (⌒أب) = ق (⌒حـ ء)

فإن : ق (∠ س) = ق (∠ ص)

فى هذه الحالة يكون طول ⌒أب ≠ طول ⌒حـ ء

عكس النتيجة السابقة صحيح أى أن

الزوايا المحيطية المتساوية فى القياس فى الدائرة الواحدة (أو فى عدة دوائر) تحصر بين ضلعيها أقواسًا متساوية فى القياس.

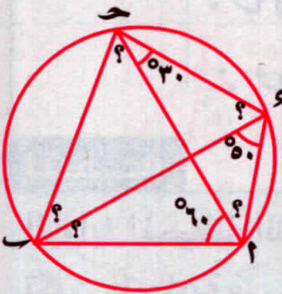


ففى الشكل المقابل :

إذا كان : ق (∠ س) = ق (∠ ص)

فإن : ق (⌒أب) = ق (⌒حـ ء)

مثال ١



فى الشكل المقابل :

ق (∠ ب أ حـ) = ٦٠° ، ق (∠ أ ء ب) = ٥٠°

، ق (∠ أ حـ ء) = ٣٠°

أوجد : قياسات الزوايا المشار إليها بالعلامة (؟)

الحل

المعطيات	ق (∠ ب أ حـ) = ٦٠° ، ق (∠ أ ء ب) = ٥٠° ، ق (∠ أ حـ ء) = ٣٠°
المطلوب	إيجاد : قياسات الزوايا المشار إليها بالعلامة (؟)

البرهــان | ق (∠ ٢ حـ ب) = ق (∠ ٢ ء ب) = ٥٠° (محيطيتان مشتركتان فى $\overset{\frown}{٢ب}$)

، ق (∠ ٢ ب ء) = ق (∠ ٢ حـ ء) = ٣٠° (محيطيتان مشتركتان فى $\overset{\frown}{٢ء}$)

، ق (∠ ب ء حـ) = ق (∠ ب ٢ حـ) = ٦٠° (محيطيتان مشتركتان فى $\overset{\frown}{ب حـ}$)

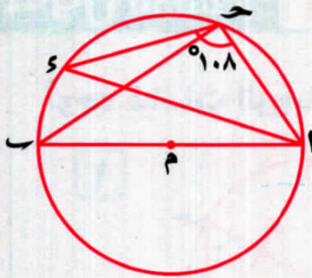
، ∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلث ٢ حـ ء = ١٨٠°

∴ ق (∠ ء ٢ حـ) = ١٨٠° − (٣٠° + ٥٠° + ٦٠°) = ٤٠°

∴ ق (∠ ء ب حـ) = ق (∠ ء ٢ حـ) = ٤٠° (محيطيتان مشتركتان فى $\overset{\frown}{ء حـ}$)

(وهو المطلوب)

مثال ٢



فى الشكل المقابل :

$\overline{٢ب}$ قطر فى الدائرة م ، ق (∠ ٢ حـ ء) = ١٠٨°

أوجد : ق (∠ ب ٢ ء)

الحـــل

المعطيات | $\overline{٢ب}$ قطر فى الدائرة م ، ق (∠ ٢ حـ ء) = ١٠٨°

المطلــوب | إيجاد : ق (∠ ب ٢ ء)

البرهــان | ∵ $\overline{٢ب}$ قطر فى الدائرة م ∴ ق (∠ ٢ حـ ب) = ٩٠°

∴ ق (∠ ب حـ ء) = ق (∠ ٢ حـ ء) − ق (∠ ٢ حـ ب)

= ١٠٨° − ٩٠° = ١٨°

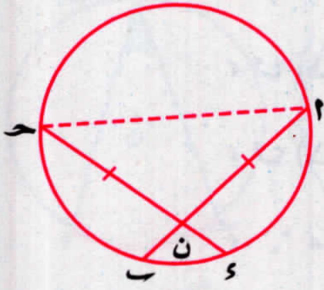
∴ ق (∠ ب ٢ ء) = ق (∠ ب حـ ء) = ١٨° (محيطيتان تحصران $\overset{\frown}{ب ء}$) (وهو المطلوب)

مثال ٣

$\overline{٢ب}$ ، $\overline{حـ ء}$ وتران فى دائرة متقاطعان فى نقطة ن فإذا كان : ٢ ن = ن حـ

فأثبت أن : ٢ب = حـ ء

الحل



المعطيات: أ ن = ن حـ

المطلوب: إثبات أن : أ ب = حـ ء

العمل: نرسم $\overline{أحـ}$

البرهان: فى Δ ن أ حـ : ∵ ن أ = ن حـ (معطى)

∴ ق (∠ حـ) = ق (∠ أ) ∴ ق ($\overset{\frown}{أ ء}$) = ق ($\overset{\frown}{ب حـ}$)

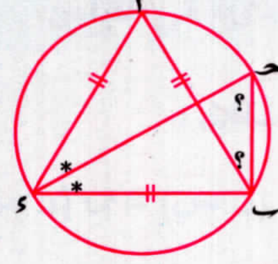
وبإضافة ق ($\overset{\frown}{ء ب}$) للطرفين : ∴ ق ($\overset{\frown}{أ ب}$) = ق ($\overset{\frown}{حـ ء}$)

∴ أ ب = حـ ء (وهو المطلوب)

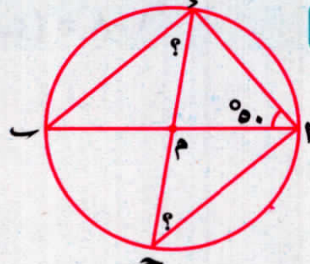
حاول بنفسك 1

أوجد قياسات الزوايا المشار إليها بالعلامة (؟) علمًا بأن م مركز الدائرة :

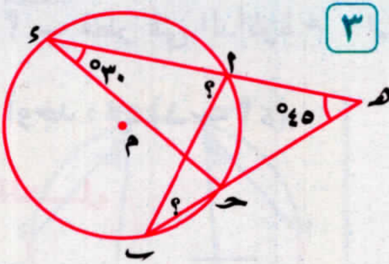
1



2



3



عكس نظرية 2

إذا تساوى قياسا زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة منها فإنه تمر برأسيهما دائرة واحدة تكون هذه القاعدة وترًا فيها.

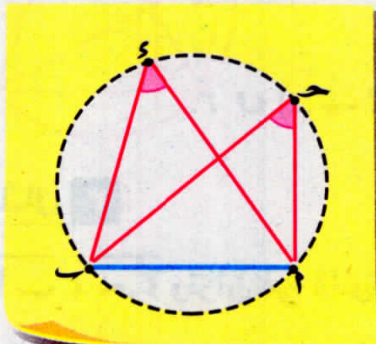
ففى الشكل المقابل :

إذا كانت : ∠ حـ ، ∠ ء مرسومتين على القاعدة $\overline{أب}$

وفى جهة واحدة منها ، ق (∠ حـ) = ق (∠ ء)

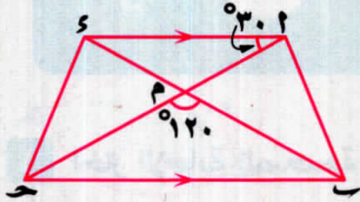
، فإن النقط أ ، ب ، ء ، حـ تمر بها دائرة وحيدة

وتكون $\overline{أب}$ وترًا فيها.



مثال ٤

في الشكل المقابل :



١ ب حـ ء شكل رباعي فيه : $\overline{١ء} // \overline{ب حـ}$

، ق (∠ ء ١ حـ) = ٣٠° ، ق (∠ ب م حـ) = ١٢٠°

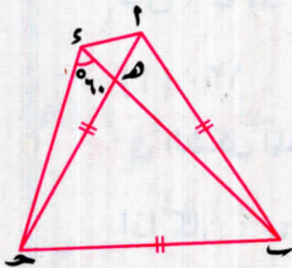
أثبت أن : النقط ١ ، ب ، حـ ، ء تمر بها دائرة واحدة.

الحل

المعطيات	١ ب حـ ء شكل رباعي ، $\overline{١ء} // \overline{ب حـ}$ ، ق (∠ ء ١ حـ) = ٣٠° ، ق (∠ ب م حـ) = ١٢٠°
المطلوب	إثبات أن : النقط ١ ، ب ، حـ ، ء تمر بها دائرة واحدة.
البرهان	∵ $\overline{١ء} // \overline{ب حـ}$ ، $\overleftrightarrow{١حـ}$ قاطع لهما ∴ ق (∠ ١ حـ ب) = ق (∠ ء ١ حـ) = ٣٠° (بالتبادل) في △ ب م حـ : ق (∠ ء ب حـ) = ١٨٠° - (١٢٠° + ٣٠°) = ٣٠° ∴ ق (∠ ء ١ حـ) = ق (∠ ء ب حـ) وهما مرسومتان على $\overline{ءحـ}$ وفي جهة واحدة منها ∴ النقط ١ ، ب ، حـ ، ء تمر بها دائرة واحدة. (وهو المطلوب)

حاول بنفسك ٢

في الشكل المقابل :



١ ب حـ ء شكل رباعي تقاطع قطراه في هـ

، ١ ب = ب حـ = حـ ١ ، ق (∠ ب ء حـ) = ٦٠°

أثبت أن : النقط ١ ، ب ، حـ ، ء تمر بها دائرة واحدة.



تمارين 8 على الزوايا المحيطية المرسومة على نفس القوس

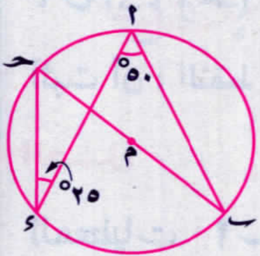


اختبار تفاعلى

● تذكر ● فهم ● تطبيق ● حل مشكلات | أسئلة كتاب الوزارة

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

1 في الشكل المقابل :



أولًا : ق (∠ حـ) = ...

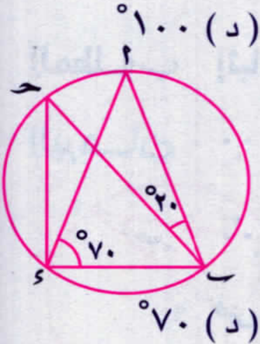
(أ) $\frac{1}{2}$ ١٢°　(ب) ٢٥°

(جـ) ٥٠°　(د) ١٠٠°

ثانيًا : ق (∠ ب) = ...

(أ) ٢٥°　(ب) ٥٠°　(جـ) ٧٥°　(د) ١٠٠°

2 في الشكل المقابل :



إذا كان : أب = أء فإن :

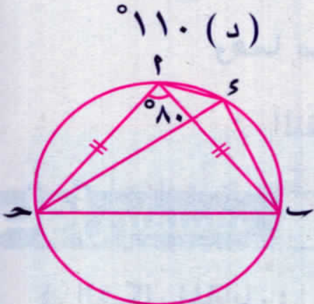
أولًا : ق (∠ حـ) = ...

(أ) ٢٠°　(ب) ٤٠°　(جـ) ٥٠°　(د) ٧٠°

ثانيًا : ق (∠ ب ء حـ) = ...

(أ) ٨٠°　(ب) ٩٠°　(جـ) ١٠٠°　(د) ١١٠°

3 في الشكل المقابل :

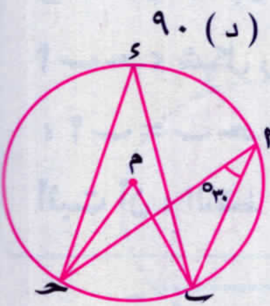


أب = أحـ ، ق (∠ ب أ حـ) = ٨٠°

فإن : ق (∠ أ ء ب) = ...° (الشرقية ٢٥)

(أ) ١٣٠　(ب) ٨٠　(جـ) ١٢٠　(د) ٩٠

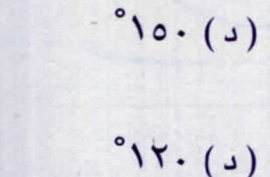
4 في الشكل المقابل :



إذا كان : ق (∠ ب أ حـ) = ٣٠° فإن : (الدقهلية ٠٦)

أولًا : ق (∠ ب ء حـ) = ...

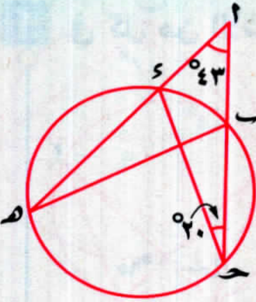
(أ) ١٥°　(ب) ٣٠°　(جـ) ٦٠°　(د) ١٥٠°



ثانيًا : ق (∠ ب م حـ) = ...

(أ) ٣٠°　(ب) ٩٠°　(جـ) ٦٠°　(د) ١٢٠°

٥ في الشكل المقابل :



أولًا : ق (∠ب هـ ء) = …………

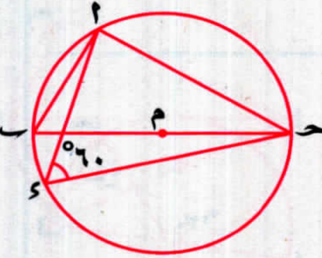
(أ) ١٠° (ب) ٢٠°

(جـ) ٢٣° (د) ٤٠°

ثانيًا : ق (∠ ا ب هـ) = …………°

(أ) ٦٣° (ب) ٩٠° (جـ) ١٠٠° (د) ١١٧°

٦ في الشكل المقابل :



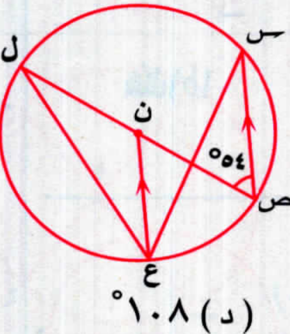
$\overline{\text{ب حـ}}$ قطر في الدائرة م ، ق (∠ء) = ٦٠°

، ا ب = ٥ سم

فإن مساحة الدائرة م = ………… π سم^2 (الشرقية ٢٤)

(أ) ٢٥ (ب) ١٢ (جـ) ١٠٠ (د) ٤٩

٧ في الشكل المقابل :



دائرة ن ، $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ن ع}}$

فإذا كان : ق (∠س ص ل) = ٥٤° فإن :

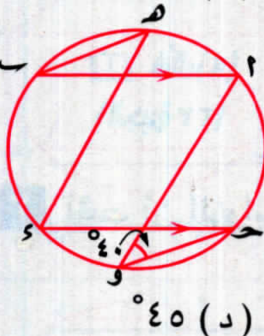
أولًا : ق (∠س ع ل) = …………

(أ) ٢٧° (ب) ٥٤° (جـ) ١٠٠° (د) ١٠٨°

ثانيًا : ق (∠ص س ع) = …………

(أ) ٢٧° (ب) ٥٤° (جـ) ١٠٠° (د) ١٠٨°

٨ في الشكل المقابل :



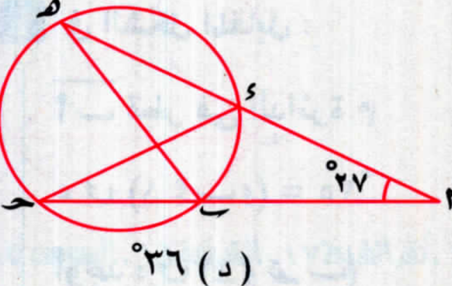
$\overline{\text{ا ب}}$ // $\overline{\text{حـ ء}}$

، ق (∠ ا و حـ) = ٤٠°

فإن : ق (∠ء هـ ب) = ………… (الشرقية ١٧)

(أ) ٥٠° (ب) ٤٠° (جـ) ٣٠° (د) ٤٥°

٩ في الشكل المقابل :



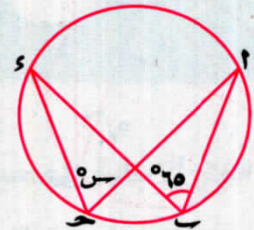
$\overleftarrow{\text{ا ء}}$ يقطع الدائرة في ء ، هـ ، $\overleftarrow{\text{ا ب}}$ يقطعها في ب ، حـ

فإذا كان : ق (∠ ا) = ٢٧° ، ا ب = ب هـ

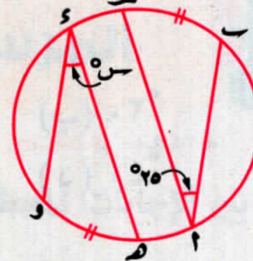
فإن : ق (∠حـ ء هـ) = …………

(أ) ١٣,٥° (ب) ٥٤° (جـ) ٢٧° (د) ٣٦°

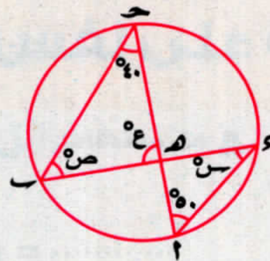
٢ في كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس علمًا بأن م مركز الدائرة :



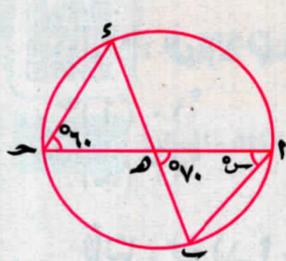
شكل (١)



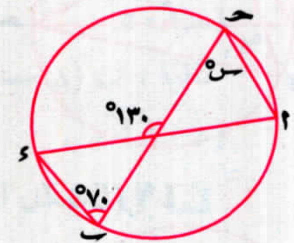
شكل (٢)



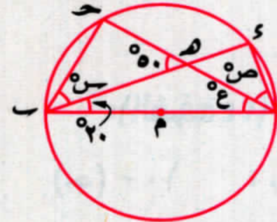
شكل (٣)



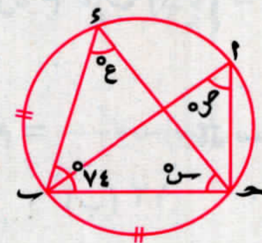
شكل (٤)



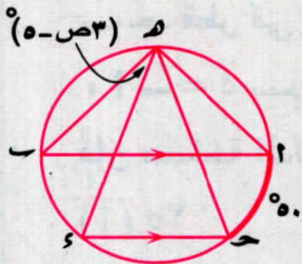
شكل (٥)



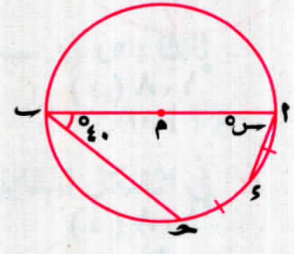
شكل (٦)



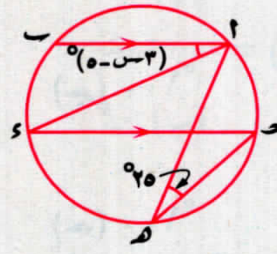
شكل (٧)



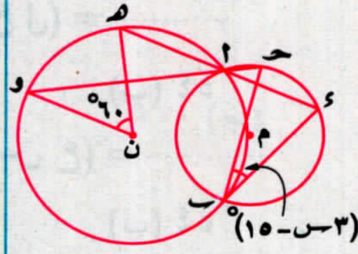
شكل (٨)
(القليوبية ١٩)



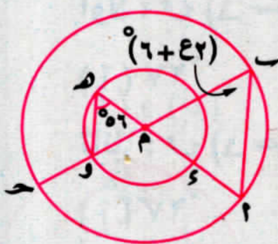
شكل (٩)
(الجيزة ٢٣)



شكل (١٠)
(الغربية ٢٣)



شكل (١١)

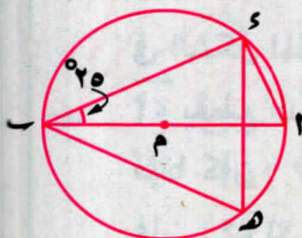


شكل (١٢)

٣ أثبت أن الزوايا المحيطية التي تحصر نفس القوس في الدائرة متساوية في القياس.

(مطروح ١٩ ، كفر الشيخ ١٦)

٤ في الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ قطر في الدائرة م

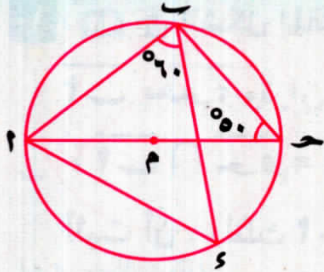
، ق (∠ أ ب ء) = ٢٥°

أوجد : ق (∠ ء هـ ب)

(السويس ١١) «٦٥°»

● تذكر ● فهم ○ تطبيق ● حل مشكلات

٥ في الشكل المقابل :



$\overline{\text{أحـ}}$ قطر في الدائرة م

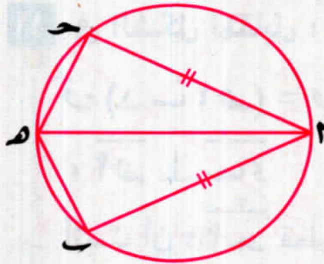
، ق (∠ حـ) = ٥٠° ، ق (∠ أ ب ء) = ٦٠°

أوجد بالبرهان كلًّا من : ق (∠ حـ ب ء) ، ق (∠ ب أ ء)

(الإسماعيلية ١٩ ، كفر الشيخ ١٣) «٣٠° ، ٧٠°»

---

٦ في الشكل المقابل :



أب = أحـ

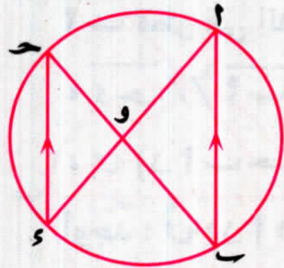
، هـ ∈ $\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$

أثبت أن : ق (∠ أ هـ ب) = ق (∠ أ هـ حـ)

(المنيا ١٩ ، السويس ١٨ ، ش. سيناء ١٧)

---

٧ في الشكل المقابل :



$\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{حـ ء}}$ وتران متوازيان في الدائرة

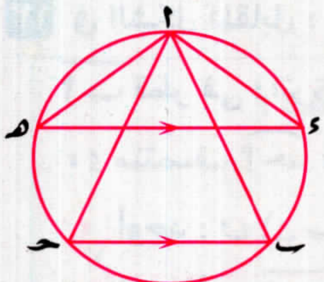
، $\overline{\text{أء}}$ ∩ $\overline{\text{حـ ب}}$ = {و}

أثبت أن : أو = و ب

(كفر الشيخ ٠٨)

---

٨ في الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة

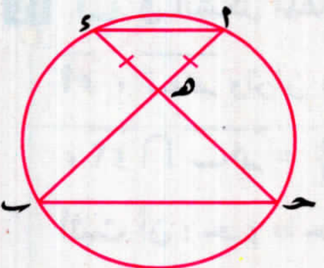
، $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

أثبت أن : ق (∠ ء أ حـ) = ق (∠ ب أ هـ)

(المنوفية ٢٣ ، مطروح ١٩ ، الإسماعيلية ١٨ ، الفيوم ١٧ ، الغربية ١٦)

---

٩ في الشكل المقابل :



$\overline{\text{أب}}$ ∩ $\overline{\text{حـ ء}}$ = {هـ}

، هـ أ = هـ ء

أثبت أن : هـ ب = هـ حـ

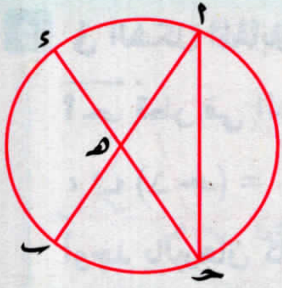
(أسوان ٢٤ ، الإسكندرية ٢٣ ، الإسماعيلية ١٩ ، كفر الشيخ ١٧ ، الشرقية ١٦ ، السويس ١٥)

١٠ في الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ ، $\overline{حـ ء}$ وتران متساويان في الطول في الدائرة

، $\overline{أب} \cap \overline{حـ ء} = \{هـ\}$

أثبت أن : المثلث أ حـ هـ متساوي الساقين.



(الأقصر ٢٣ ، البحيرة ١٩ ، المنوفية ١٨ ، القليوبية ١١)

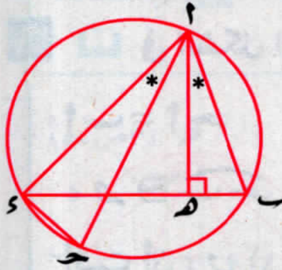
---

١١ في الشكل المقابل :

ق (∠ ب أ هـ) = ق (∠ ء أ حـ)

، $\overline{أهـ} \perp \overline{ب ء}$

أثبت أن : $\overline{أحـ}$ قطر في الدائرة.



(القليوبية ٢٣)

---

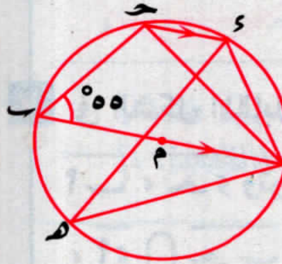
١٢ في الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ قطر في الدائرة م

، $\overline{ء حـ} // \overline{أب}$

، ق (∠ أ ب حـ) = °٥٥

أوجد : ق (∠ أ هـ ء)



«°٣٥»

---

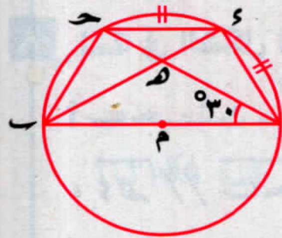
١٣ في الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ قطر في دائرة م ، حـ ∈ الدائرة ، ق (∠ حـ أ ب) = °٣٠

، ء منتصف $\overset{\frown}{أحـ}$ ، $\overline{ء ب} \cap \overline{أحـ} = \{هـ\}$

١ أوجد : ق (∠ ب ء حـ) ، ق $(\overset{\frown}{أ ء})$

٢ أثبت أن : $\overline{أب} // \overline{حـ ء}$



(الوادي الجديد ٢٣ ، دمياط ١٨ ، القاهرة ١٧) «°٣٠ ، °٦٠»

---

١٤ في الشكل المقابل :

$\overline{أ ء}$ ، $\overline{ب هـ}$ وتران متساويان في الطول في الدائرة

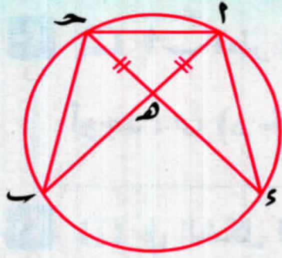
، $\overleftrightarrow{أ ء} \cap \overleftrightarrow{ب هـ} = \{حـ\}$

أثبت أن : حـ ء = حـ هـ



(الدقهلية ١٨ ، دمياط ١٧ ، بني سويف ١٤ ، القليوبية ١٣)

١٥ في الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ ، $\overline{ءحـ}$ وتران في دائرة متقاطعان في هـ

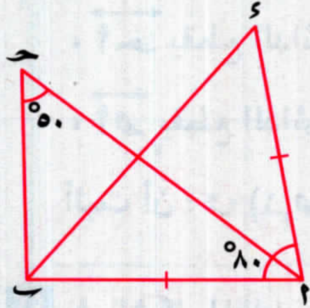
فإذا كان : أ هـ = حـ هـ

أثبت أن : ق (∠ أ حـ ب) = ق (∠ حـ أ ء)

(البحر الأحمر ١١)

---

١٦ في الشكل المقابل :



أب = أء ، ق (∠ ب أ ء) = ٨٠°

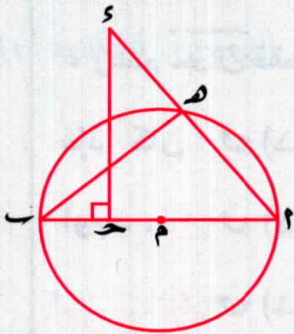
، ق (∠ حـ) = ٥٠°

أثبت أن : النقط أ ، ب ، حـ ، ء تمر بها دائرة واحدة.

(السويس ١٦ ، ج. سيناء ١٥ ، بورسعيد ١٤)

---

١٧ في الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ قطر في الدائرة م

، $\overline{أهـ}$ وتر فيها

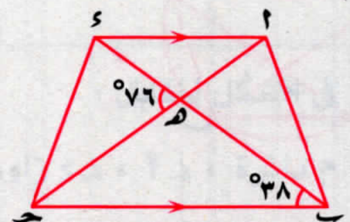
، رسم $\overleftrightarrow{حـ ء}$ ⊥ $\overline{أب}$ فقطع $\overleftrightarrow{أهـ}$ في ء

أثبت أن : النقط ء ، هـ ، حـ ، ب تمر بها دائرة واحدة.

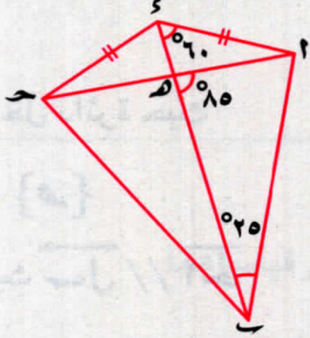
---

١٨ في كل من الأشكال الآتية أثبت أن النقط أ ، ب ، حـ ، ء تمر بها دائرة واحدة :

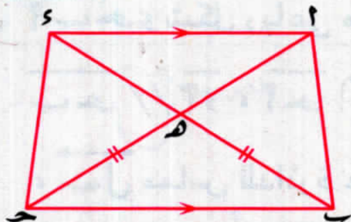
١



٢



٣



---

١٩ أ ب حـ مثلث متساوي الساقين فيه : أب = أحـ ، ء منتصف $\overline{ب حـ}$

، رسم $\overleftrightarrow{ب هـ}$ ⊥ $\overline{أحـ}$ حيث $\overleftrightarrow{ب هـ}$ ∩ $\overline{أحـ}$ = {هـ}

أثبت أن : النقط أ ، ب ، ء ، هـ تمر بها دائرة واحدة.

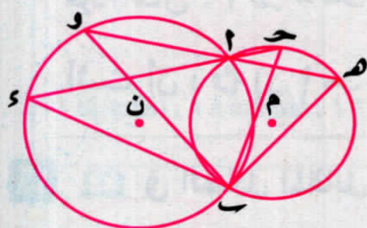
(الدقهلية ١٢)

٢٠ أب قطر فى الدائرة م ، حـ ∈ الدائرة بحيث ق (∠ أ ب حـ) = ٤٠° ، ء ∈ ⌒بحـ

أوجد : ق (∠ حـ ء ب) «١٣٠°»

---

٢١ فى الشكل المقابل :



م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب

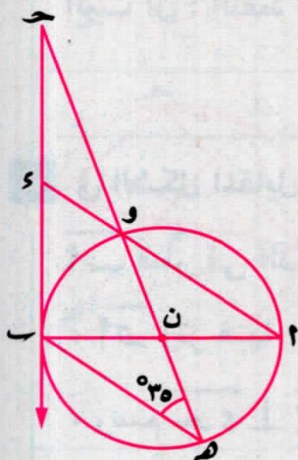
، $\overleftrightarrow{أحـ}$ يقطع الدائرة م فى حـ ويقطع الدائرة ن فى ء

، $\overleftrightarrow{أهـ}$ يقطع الدائرة م فى هـ ويقطع الدائرة ن فى و

أثبت أن : ق (∠ هـ ب حـ) = ق (∠ و ب ء) (المنوفية ٢٣ ، قنا ١٧ ، البحيرة ١٣)

---

٢٢ فى الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ قطر فى دائرة مركزها ن ، $\overleftarrow{حـب}$ مماس للدائرة عند ب

، رسم $\overleftarrow{حـن}$ فقطع الدائرة فى و ، هـ ورسم $\overleftarrow{أو}$ فقطع $\overleftarrow{حـب}$ فى ء

فإذا كان : ق (∠ ب هـ حـ) = ٣٥°

أوجد : ١ ق (∠ ب ن حـ)

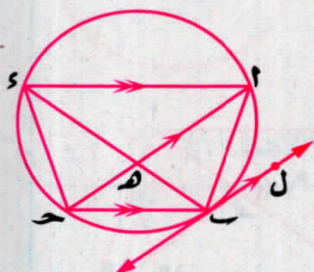
٢ ق (∠ ب حـ ن)

٣ ق (∠ ب ء أ)

«٧٠° ، ٢٠° ، ٥٥°»

---

٢٣ فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة حيث

$\overline{بحـ}$ // $\overline{أء}$ ، $\overline{أحـ}$ ∩ $\overline{بء}$ = {هـ}

، $\overleftrightarrow{بل}$ مماس للدائرة عند ب حيث $\overleftrightarrow{بل}$ // $\overline{أحـ}$

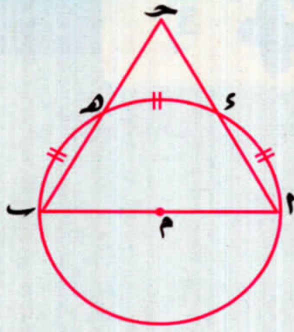
أثبت أن : ١ $\overrightarrow{ءب}$ ينصف ∠ أ ء حـ ٢ Δ ء ب حـ متساوى الساقين.

---

٢٤ أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع مرسوم داخل الدائرة م ، رسم القطر $\overline{حـء}$

أثبت أن : ق (∠ أ ب ء) = ق (∠ حـ ب م) = ق (∠ أ حـ ء) (بنى سويف ٠٨)

٢٥ في الشكل المقابل :



$\overline{\text{أب}}$ قطر في الدائرة م ، ء ، هـ تنتميان إلى $\overset{\frown}{\text{أب}}$

بحيث ق ($\overset{\frown}{\text{أء}}$) = ق ($\overset{\frown}{\text{ءهـ}}$) = ق ($\overset{\frown}{\text{هـب}}$)

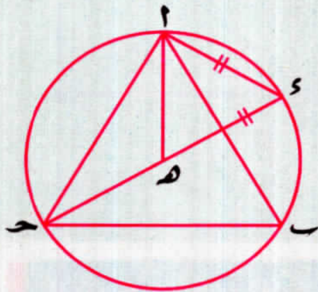
فإذا كان : $\overleftrightarrow{\text{أء}} \cap \overleftrightarrow{\text{بهـ}}$ = {حـ}

أثبت أن : حـ أ = حـ ب ثم أوجد : ق ($\overset{\frown}{\text{ءهـب}}$)

« ١٢٠° »

---

٢٦ في الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث متساوي الأضلاع مرسوم داخل دائرة

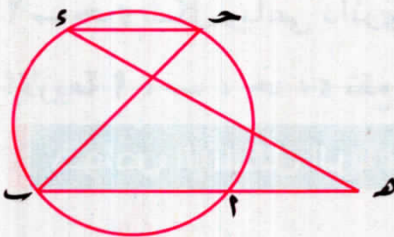
، ء ∈ $\overset{\frown}{\text{أب}}$ ، هـ ∈ $\overline{\text{ءحـ}}$ بحيث أ ء = ء هـ

أثبت أن : المثلث أ ء هـ متساوي الأضلاع.

(الفيوم ٢٥ ، كفر الشيخ ١٨ ، مطروح ١٦ ، الفيوم ١٥ ، الإسكندرية ١١)

للمتفوقين

١ في الشكل المقابل :



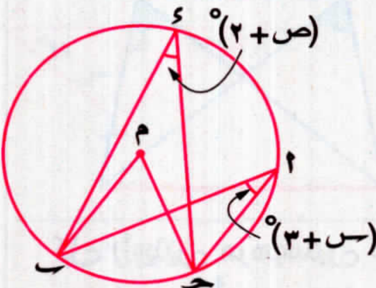
هـ نقطة خارج الدائرة

أثبت أن : ق (∠ هـ) < ق (∠ ب حـ ء)

(القليوبية ١٢)

---

٢ في الشكل المقابل :



م دائرة ، ∠ أ ، ∠ ء زاويتان محيطيتان قياساهما

(س + ٣)° ، (ص + ٢)° على الترتيب

فإذا كان : $ص^2 - س^2 = ٥٣$

فأوجد : ق (∠ حـ م ب)

« ٥٨° »

الدرس 4

الشكل الرباعى الدائرى وخواصه

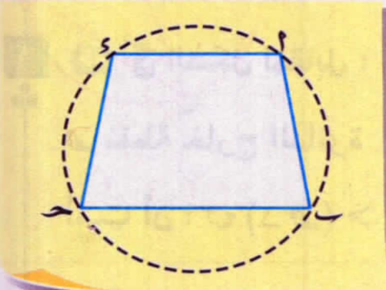


الشكل الرباعى الدائرى

الشكل الرباعى الدائرى هو شكل رباعى تنتمى رءوسه الأربعة إلى دائرة واحدة أى أنه يمكن رسم دائرة واحدة تمر برءوسه الأربعة.

فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى لأن رءوسه الأربعة أ ، ب ، حـ ، ء تقع على دائرة واحدة.

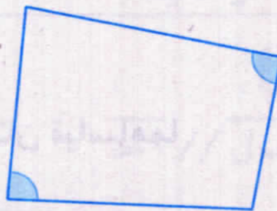


خواص الشكل الرباعى الدائرى

١

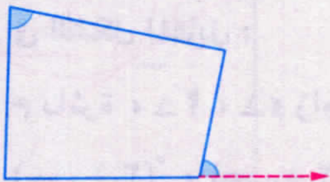
كل زاويتين مرسومتين على ضلع من أضلاعه كقاعدة وفى جهة واحدة منه تكونان متساويتين فى القياس

٢



كل زاويتين متقابلتين متكاملتان

٣

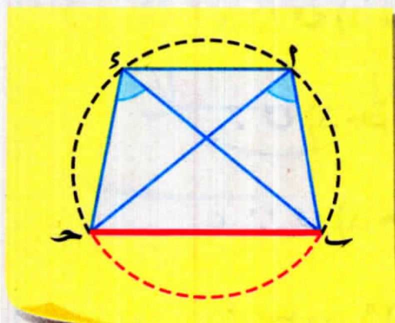


قياس الزاوية الخارجة عند أى رأس من رؤوسه يساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها

فيما يلى ندرس كل خاصية بالتفصيل مع التوضيح بالأمثلة :

فى الشكل الرباعى الدائرى كل زاويتين مرسومتين على ضلع من أضلاعه كقاعدة وفى جهة واحدة من هذا الضلع تكونان متساويتين فى القياس.

«لأنهما زاويتان محيطيتان مشتركتان فى نفس القوس»



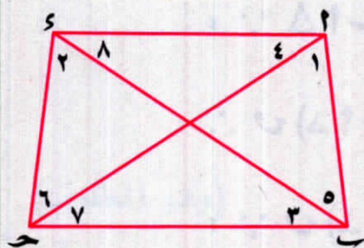
فمثلًا : فى الشكل المقابل :

إذا كان أ ب حـ ء رباعيًا دائريًا

فإن : ق (∠ ب أ حـ) = ق (∠ ب ء حـ)

لأنهما مرسومتان على $\overline{\text{ب حـ}}$ وفى جهة واحدة منه.

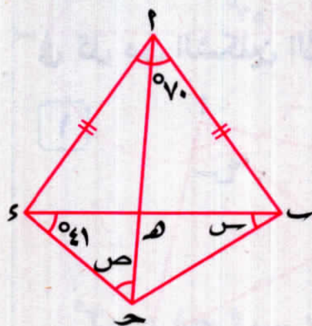
وبصفة عامة :



إذا كان الشكل أ ب حـ ء رباعيًا دائريًا فإن :

- ق (∠ ١) = ق (∠ ٢) ، ق (∠ ٣) = ق (∠ ٤)
  ، ق (∠ ٥) = ق (∠ ٦) ، ق (∠ ٧) = ق (∠ ٨)
- القطع المستقيمة $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{حـ ء}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$
  جميعها أوتار فى هذه الدائرة.

مثال ١



فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى فيه :

أ ب = أ ء ، ق (∠ ب أ ء) = °٧٠ ، ق (∠ ب ء حـ) = °٤١

أوجد قيمة كل من : س ، ص

الحـل

المعطيات | أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى ، أ ب = أ ء
، ق (∠ ب أ ء) = °٧٠ ، ق (∠ ب ء حـ) = °٤١

المطلـوب إيجاد قيمة كل من : س ، ص

البرهـان ∵ أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى.

∴ ق (∠ ب أ حـ) = ق (∠ ب ء حـ) = ٤١° (مرسومتان على $\overline{\text{ب حـ}}$)

، ∵ ق (∠ ب أ ء) = ٧٠°

∴ ق (∠ حـ أ ء) = ٧٠° − ٤١° = ٢٩°

، ∵ ق (∠ حـ ب ء) = ق (∠ حـ أ ء) (مرسومتان على $\overline{\text{حـ ء}}$)

∴ س = ٢٩°

، ∵ △ أ ب ء فيه : أ ب = أ ء

∴ ق (∠ أ ب ء) = ق (∠ أ ء ب) = $\frac{١٨٠° - ٧٠°}{٢}$ = ٥٥°

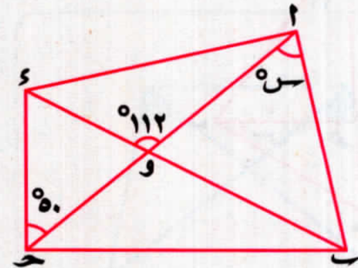
، ∵ ق (∠ أ حـ ء) = ق (∠ أ ب ء) (مرسومتان على $\overline{\text{أ ء}}$)

∴ ص = ٥٥° (وهو المطلوب)

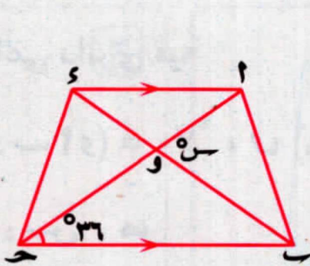
حاول بنفسك ١

فى كل من الشكلين الآتيين إذا كان أ ب حـ ء شكلًا رباعيًا دائريًا فأوجد قيمة س :

١

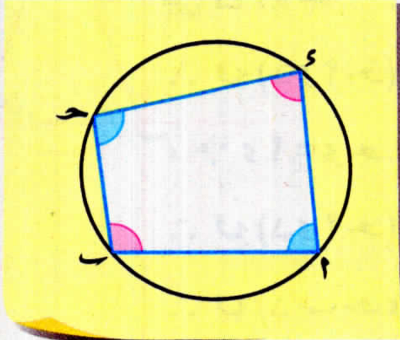


٢



نظرية ٣

إذا كان الشكل الرباعى دائريًا فإن كل زاويتين متقابلتين فيه متكاملتان.



المعطيات أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى.

المطلوب إثبات أن :

١ ق (∠ أ) + ق (∠ حـ) = ١٨٠°

٢ ق (∠ ب) + ق (∠ ء) = ١٨٠°

البرهان ∵ ق (∠ أ) = $\frac{1}{2}$ ق ($\overset{\frown}{ب حـ ء}$)

، ق (∠ حـ) = $\frac{1}{2}$ ق ($\overset{\frown}{ب أ ء}$)

∴ ق (∠ أ) + ق (∠ حـ) = $\frac{1}{2}$ [ق ($\overset{\frown}{ب حـ ء}$) + ق ($\overset{\frown}{ب أ ء}$)]

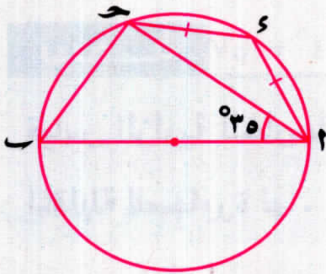
= $\frac{1}{2}$ قياس الدائرة

= $\frac{1}{2}$ × ٣٦٠° = ١٨٠°

بالمثل : ق (∠ ب) + ق (∠ ء) = ١٨٠° (وهو المطلوب)

مثال ٢

في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة ، $\overline{أ ب}$ قطر فيها

، أ ء = ء حـ ، فإذا كان : ق (∠ ب أ حـ) = ٣٥°

فأوجد : ١ ق (∠ ء) ٢ ق (∠ ب حـ ء)

الحـل

المعطيات أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى ، $\overline{أ ب}$ قطر ، أ ء = ء حـ ، ق (∠ ب أ حـ) = ٣٥°

المطلوب إيجاد : ١ ق (∠ ء) ٢ ق (∠ ب حـ ء)

البرهان ∵ $\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة. ∴ ق (∠ أ حـ ب) = ٩٠°

∴ ق (∠ أ ب حـ) = ٩٠° − ٣٥° = ٥٥°

، ∵ الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى (معطى) ∴ $ق(\angle ب) + ق(\angle ء) = 180^\circ$

∴ $ق(\angle ء) = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$ (المطلوب أولًا)

فى Δ أ ء حـ : ∵ $ق(\angle ء) = 125^\circ$

∴ $ق(\angle ء أ حـ) + ق(\angle ء حـ أ) = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$

، ∵ ء أ = ء حـ (معطى)

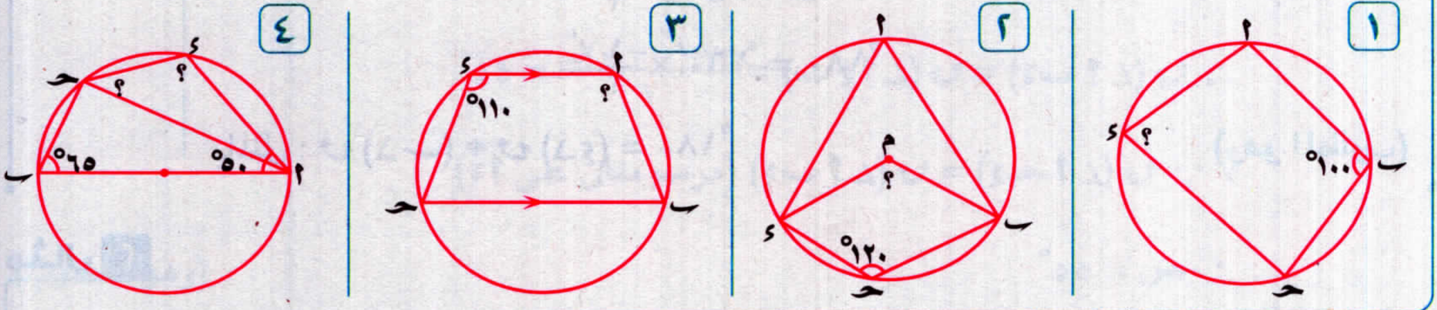
∴ $ق(\angle ء أ حـ) = ق(\angle ء حـ أ) = \frac{55^\circ}{2} = 27,5^\circ$

∴ $ق(\angle ب حـ ء) = ق(\angle ب حـ أ) + ق(\angle أ حـ ء)$

$= 90^\circ + 27,5^\circ = 117,5^\circ$ (المطلوب ثانيًا)

حاول بنفسك ٢

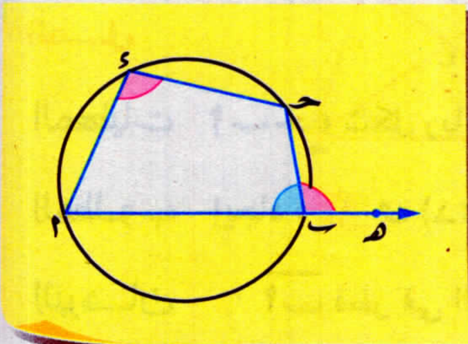
فى كل من الأشكال التالية أوجد قياس الزاوية المشار إليها بالعلامة (؟) :



نتيجة

قياس الزاوية الخارجة عند أى رأس من رءوس الشكل الرباعى الدائرى يساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها.

ففى الشكل المقابل :



إذا كان : أ ب حـ ء شكلًا رباعيًا دائريًا

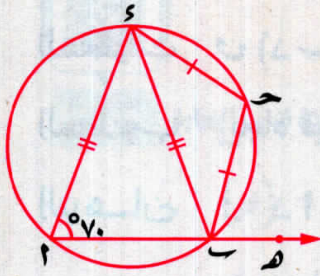
، $\angle$ حـ ب هـ زاوية خارجة عنه

، فإن : $ق(\angle أ ب حـ) + ق(\angle ء) = 180^\circ$

، ولكن $ق(\angle أ ب حـ) + ق(\angle حـ ب هـ) = 180^\circ$

∴ $ق(\angle حـ ب هـ) = ق(\angle ء)$

مثال ٣



فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة فيه : ق (∠ أ) = ٧٠°

، هـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، فإذا كان : حـ ء = حـ ب ، ء ب = ء أ

أوجد : ق (∠ هـ ب حـ)

الحل

المعطيات	حـ ء = حـ ب ، ء ب = ء أ ، ق (∠ أ) = ٧٠°
المطلوب	إيجاد : ق (∠ هـ ب حـ)
البرهان	فى Δ ء ب أ : ∵ ء ب = ء أ ∴ ق (∠ ء ب أ) = ق (∠ أ) = ٧٠°
	∴ ق (∠ ب ء أ) = ١٨٠° − (٧٠° + ٧٠°) = ٤٠°
	، ∵ أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى. ∴ ق (∠ حـ) + ق (∠ أ) = ١٨٠°
	∴ ق (∠ حـ) = ١٨٠° − ٧٠° = ١١٠°
	، فى Δ حـ ب ء : ∵ حـ ب = حـ ء ، ق (∠ حـ) = ١١٠°
	∴ ق (∠ حـ ء ب) = ق (∠ حـ ب ء) = $\frac{١٨٠° - ١١٠°}{٢}$ = ٣٥°
	∴ ق (∠ حـ ء أ) = ق (∠ حـ ء ب) + ق (∠ ب ء أ) = ٣٥° + ٤٠° = ٧٥°
	، ∵ ∠ هـ ب حـ خارجة عن الشكل الرباعى الدائرى أ ب حـ ء
	∴ ق (∠ هـ ب حـ) = ق (∠ حـ ء أ) = ٧٥° (وهو المطلوب)

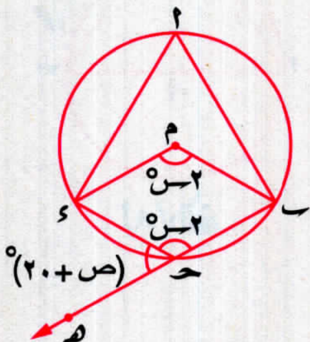
مثال ٤

فى الشكل المقابل :

هـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ ، ق (∠ ب م ء) = ق (∠ ب حـ ء) = ٢ س°

، ق (∠ ء حـ هـ) = (ص + ٢٠)°

أوجد قيمة كل من : س ، ص



الحل

المعطيات ق (∠ ب م ء) = ق (∠ ب حـ ء) = ٢ س° ، ق (∠ ء حـ هـ) = (ص + ٢٠)°

المطلوب إيجاد قيمة كل من : س ، ص

البرهان ∵ ∠ أ محيطية ، ∠ ب م ء مركزية مشتركتان فى $\overset{\frown}{ب ء}$

∴ ق (∠ أ) = $\frac{١}{٢}$ ق (∠ ب م ء) = س

، ∵ الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى ∴ ق (∠ أ) + ق (∠ ب حـ ء) = ١٨٠°

∴ س + ٢ س = ١٨٠° ∴ ٣ س = ١٨٠°

∴ س = ٦٠°

، ∵ ∠ ء حـ هـ خارجة عن الشكل الرباعى الدائرى أ ب حـ ء

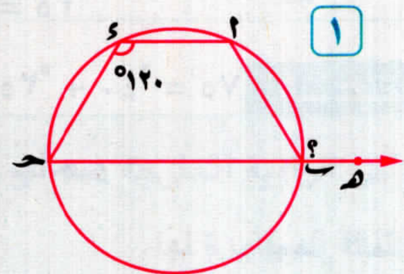
∴ ق (∠ ء حـ هـ) = ق (∠ أ) ∴ ص + ٢٠° = ٦٠°

∴ ص = ٤٠° (وهو المطلوب)

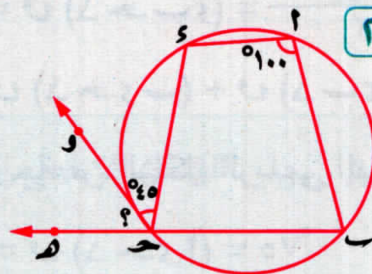
حاول بنفسك ٣

فى كل مما يأتى أوجد قياس الزاوية المشار إليها بالعلامة (؟) :

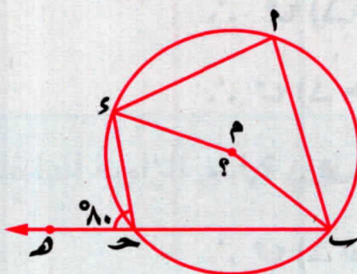
١



٢



٣





على الشكل الرباعى الدائرى وخواصه

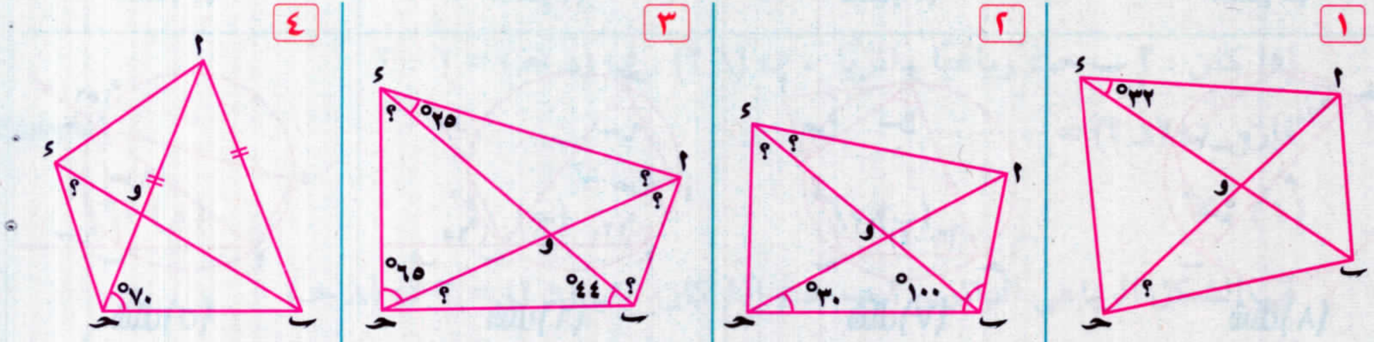


اختبار تفاعلى

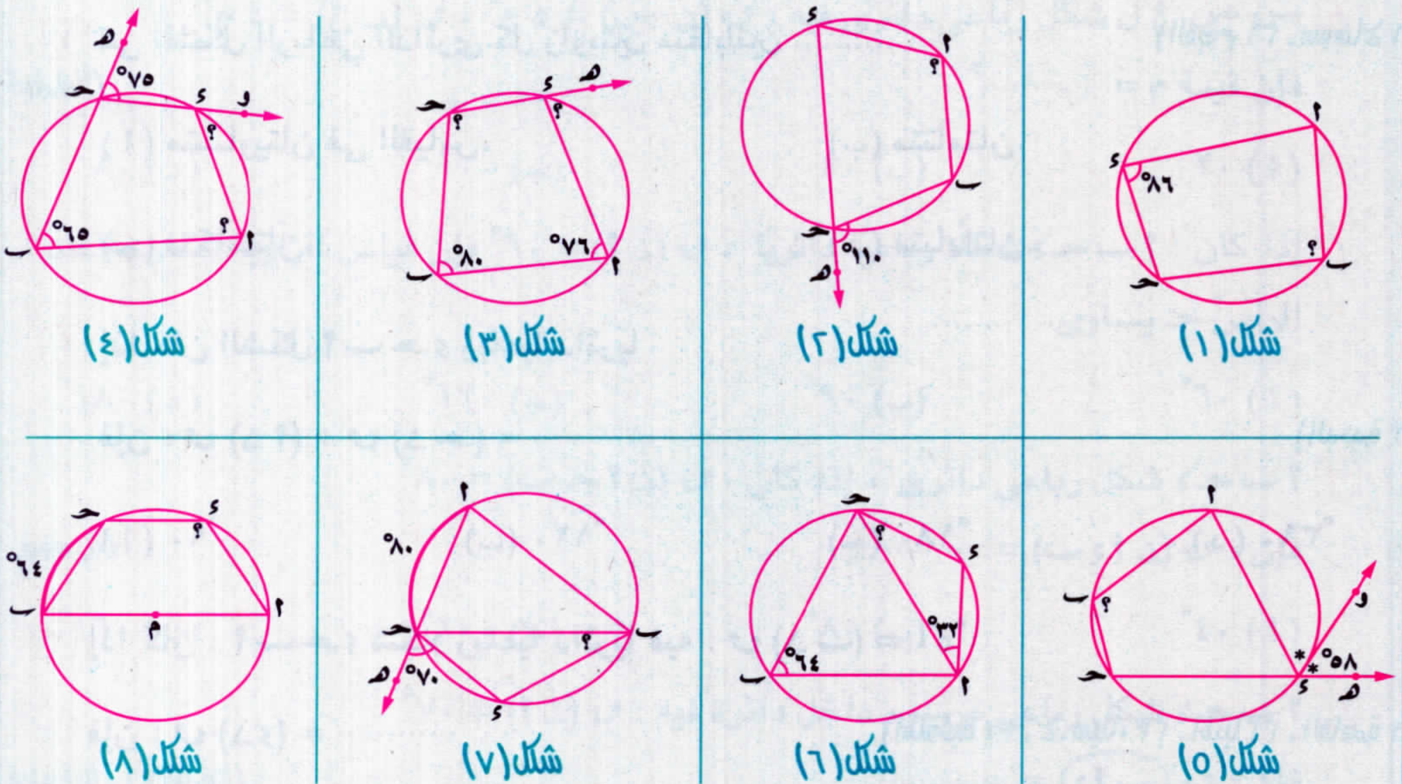
● تذكر ● فهم ○ تطبيق ● حل مشكلات | أسئلة كتاب الوزارة

1 فى كل من الأشكال الآتية : إذا كان : أ ب حـ ء رباعيًا دائريًا ، $\overline{أحـ} \cap \overline{بء} = \{و\}$

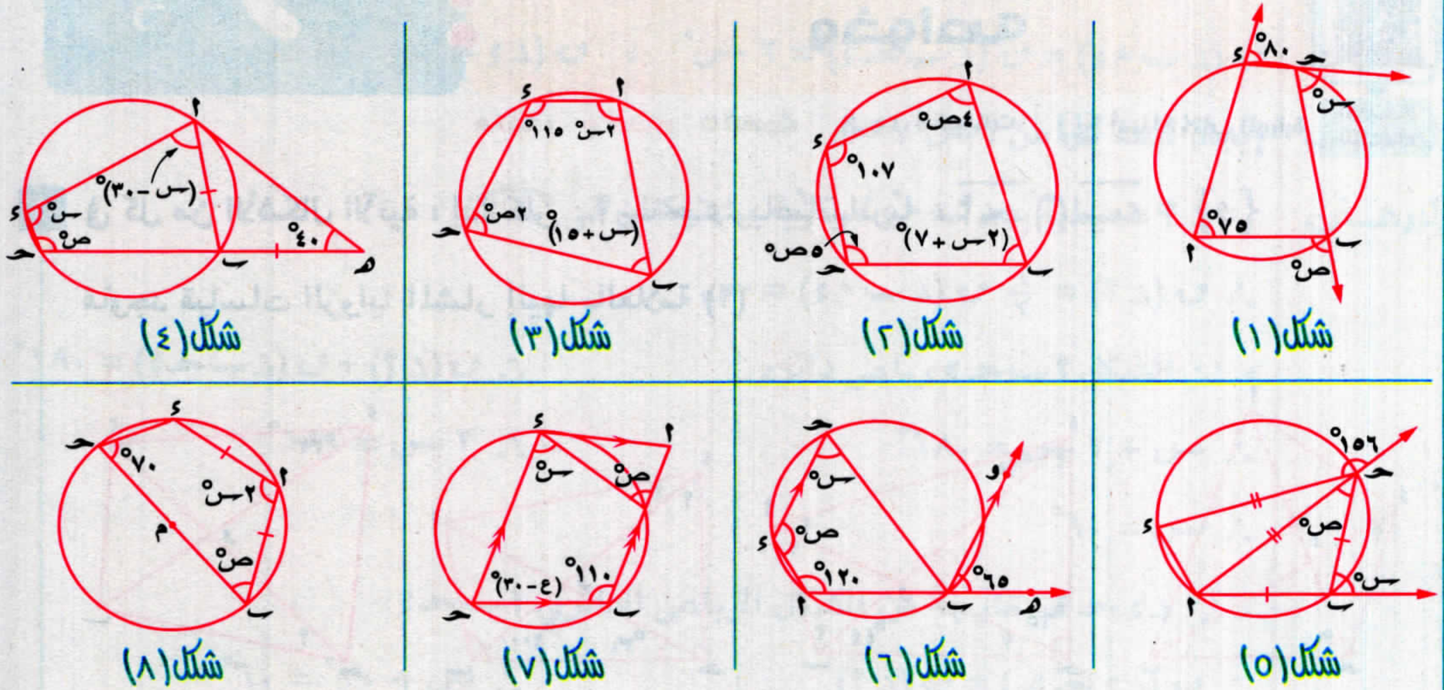
فأوجد قياسات الزوايا المشار إليها بالعلامة (؟)



2 فى كل من الأشكال الآتية أوجد قياس الزاوية المشار إليها بالعلامة (؟) علمًا بأن م هى مركز الدائرة :



٣ في كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة الرمز المستخدم فى القياس حيث م مركز الدائرة :



٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ فى الشكل الرباعى الدائرى كل زاويتين متقابلتين .... (الفيوم ٢١ ، سوهاج ٢١)

(أ) متساويتان فى القياس. (ب) متتامتان.

(جـ) متكاملتان. (د) متبادلتان.

٢ إذا كان الشكل ا ب حـ ء رباعيًا دائريًا

فإن : ق (∠ ا) + ق (∠ حـ) = ... (البحيرة ٢٣)

(أ) ٩٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ١٨٠° (د) ٣٦٠°

٣ إذا كان : ا ب حـ ء شكلًا رباعيًا دائريًا فيه : ق (∠ ب) = ٥٠°

فإن : ق (∠ ء) = ... (المنوفية ٢٤ ، ج. سيناء ٢٣ ، المنيا ٢٢ ، القاهرة ٢١)

(أ) ١٣٠° (ب) ٩٠° (جـ) ٥٠° (د) ٢٥°

٤ إذا كان أ ب ح ء شكلًا رباعيًا دائريًا

فإن : ق (∠ أ) + ق (∠ ح) − ١٢٠° = ... (القاهرة ٢٥)

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ٢٤٠°

٥ أ ب ح ء شكل رباعي دائري فيه : ق (∠ أ) = ق (∠ ح)

فإن : ق (∠ أ) = ... (الإسماعيلية ٢٣)

(أ) ٦٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٨٠°

٦ إذا كان : أ ب ح ء رباعيًا دائريًا ، ق (∠ أ) : ق (∠ ح) = ١ : ٢

فإن : ق (∠ أ) = ... (المنوفية ٢٣)

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

٧ فى الشكل الرباعي الدائرى أ ب ح ء إذا كان : ق (∠ أ) = ٣ ق (∠ ح)

فإن : ق (∠ أ) = ... (الإسكندرية ٢٤ ، قنا ٢٣ ، الشرقية ٢٢ ، أسيوط ٢٢)

(أ) ٤٥° (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٣٥°

٨ س ص ع ل شكل رباعي دائرى فيه : ق (∠ س) = ٥ م° ، ق (∠ ع) = ٤ م°

فإن قيمة م = ...° (الشرقية ٢٥)

(أ) ٢٠ (ب) ٤٠ (جـ) ١٠٠ (د) ٨٠

٩ إذا كان : أ ب ح ء شكلًا رباعيًا دائريًا ، ق (∠ أ) = ٦٠° فإن قياس الزاوية الخارجة عند الرأس ح يساوى ....

(أ) ٦٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٨٠°

١٠ أ ب ح ء شكل رباعي دائرى ، إذا كان : ق (∠ أ ح ب) = ٨٠°

فإن : ق (∠ أ ء ب) = ... (بنى سويف ٢٣)

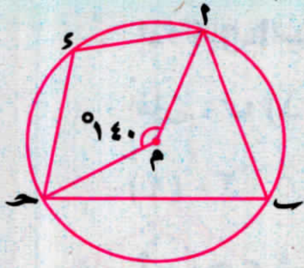
(أ) ٤٠° (ب) ٨٠° (جـ) ١٠٠° (د) ١٦٠°

١١ أ ب ح ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة فيه : ق (∠ أ) = ٧٠°

فإن : ق (⌒ ب أ ء) = ... (الغربية ٢٣ ، الدقهلية ٢١)

(أ) ٣٥° (ب) ١١٠° (جـ) ١٤٠° (د) ٢٢٠°

١٢ في الشكل المقابل :



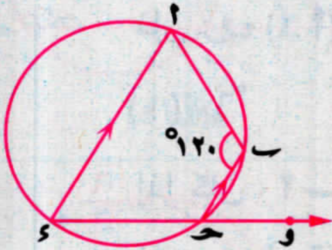
في الدائرة م إذا كان : ق (∠ حـ م أ) = ١٤٠°

فإن : ق (∠ حـ ء أ) = ... (الإسكندرية ٢١ ، الفيوم ١٧)

(أ) ٤٠° (ب) ٧٠°

(جـ) ١١٠° (د) ١٤٠°

١٣ في الشكل المقابل :

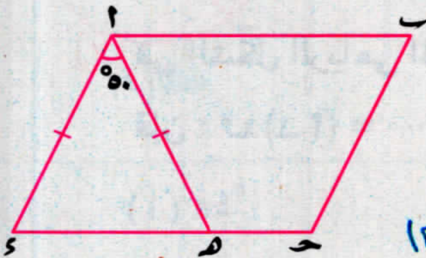


إذا كان : ق (∠ ب) = ١٢٠° ، $\overline{\text{ب حـ}}$ // $\overline{\text{أ ء}}$

فإن : ق (∠ ب حـ و) = ... (ش. سيناء ١٧)

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٨٠° (د) ١٢٠°

١٤ في الشكل المقابل :



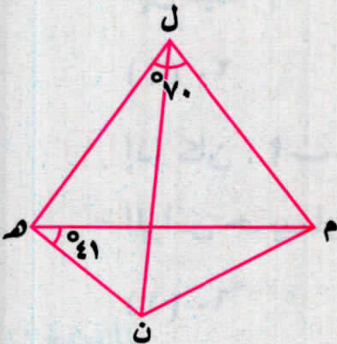
إذا كان : أ ب حـ ء شكلًا رباعيًا دائريًا

، أ هـ = أ ء ، ق (∠ هـ أ ء) = ٥٠°

فإن : ق (∠ ب) = ... (الشرقية ٢٤)

(أ) ١١٥° (ب) ٦٥° (جـ) ١٣٠° (د) ١٠٥°

١٥ في الشكل المقابل :



ل م ن هـ رباعي دائري

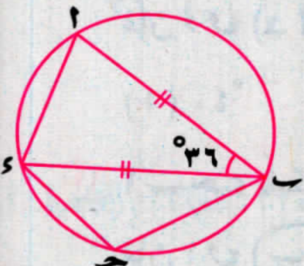
، ق (∠ م ل هـ) = ٧٠°

، ق (∠ م هـ ن) = ٤١°

فإن : ق (∠ هـ م ن) = ...

(أ) ٧٠° (ب) ٤١° (جـ) ٢٩° (د) ١١٠°

١٦ في الشكل المقابل :



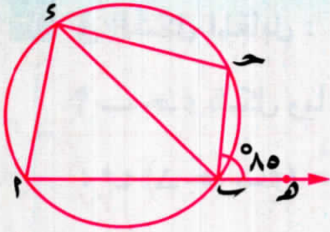
إذا كان : أ ب = ب ء

، ق (∠ أ ب ء) = ٣٦°

فإن : ق (∠ حـ) = ... (الأقصر ١٩)

(أ) ١٤٠° (ب) ٧٠° (جـ) ٥٤° (د) ١٠٨°

٥ 📖 **في الشكل المقابل :**



$هـ \in \overleftrightarrow{أب}$ ، $هـ \notin \overline{أب}$ ، ق $(\overset{\frown}{أب}) = ١١٠^\circ$

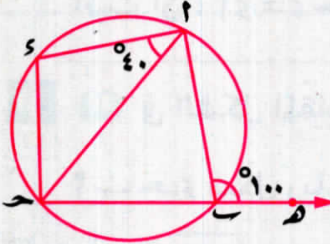
، ق (∠ حـ ب هـ) = ٨٥°

أوجد : ق (∠ ب ء حـ)

(أسيوط ٢٣ ، سوهاج ١٩ ، القليوبية ١٨ ، دمياط ١٨ ، البحيرة ١٤) « ٣٠° »

---

٦ 📖 **في الشكل المقابل :**



ق (∠ أ ب هـ) = ١٠٠°

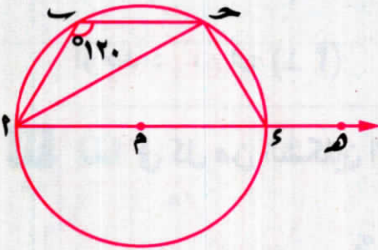
، ق (∠ حـ أ ء) = ٤٠°

أثبت أن : ق $(\overset{\frown}{حـ ء})$ = ق $(\overset{\frown}{أ ء})$

(سوهاج ٢٤ ، المنوفية ٢٣ ، الجيزة ١٩ ، البحر الأحمر ١٨ ، الغربية ١٧)

---

٧ **في الشكل المقابل :**



أ ب حـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة م فيه :

ق (∠ ب) = ١٢٠° ، $\overline{أ ء}$ قطر في الدائرة ، $هـ \in \overrightarrow{أ ء}$

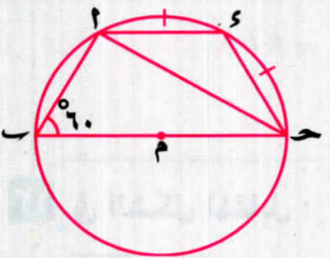
[١] **أوجد :** ق (∠ حـ ء هـ) ، ق (∠ حـ أ ء)

[٢] إذا كان : ء حـ = ٧ سم فأوجد : طول $\overset{\frown}{أ ء}$ $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$

« ١٢٠° ، ٣٠° ، ٢٢ سم »

---

٨ **في الشكل المقابل :**



أ ب حـ ء شكل رباعي دائري ، $\overline{حـ ب}$ قطر في الدائرة م

، ق (∠ أ ب حـ) = ٦٠°

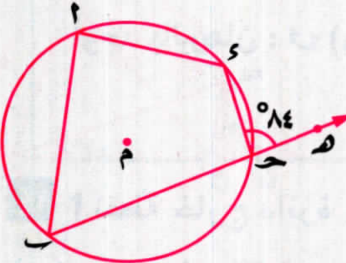
، طول $\overset{\frown}{أ ء}$ = طول $\overset{\frown}{حـ ء}$

أثبت أن : $\overrightarrow{حـ أ}$ ينصف ∠ ء حـ ب

(المنوفية ٠٨)

---

٩ **في الشكل المقابل :**



أ ب حـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة م

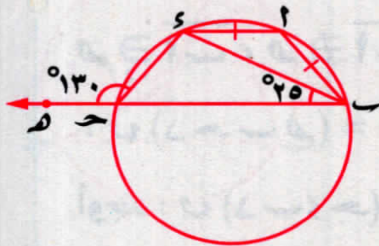
، $هـ \in \overleftrightarrow{ب حـ}$ ، ق (∠ ء حـ هـ) = ٨٤°

، ق (∠ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق (∠ ء)

أوجد : [١] ق (∠ أ) [٢] ق (∠ ب)

« ٨٤° ، ٦٠° »

١٠ **فى الشكل المقابل :**



أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى فيه : أ ب = أ ء

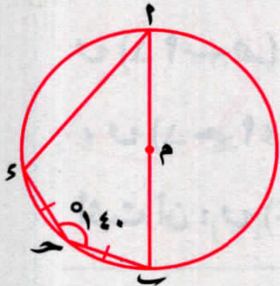
، ق (∠ حـ ب ء) = ٢٥° ، هـ ∈ ب حـ

، ق (∠ هـ حـ ء) = ١٣٠°

أثبت أن : أ ء = ء حـ

---

١١ **فى الشكل المقابل :**



أ ب حـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة م

، م ∈ أ ب ، حـ ب = حـ ء

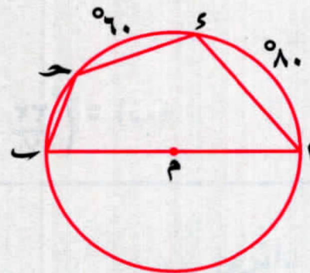
، ق (∠ ب حـ ء) = ١٤٠°

أوجد : ١ ق (∠ أ) ٢ ق (∠ ء)

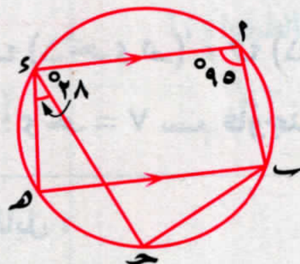
(مطروح ١٧ ، كفر الشيخ ١٤) « ٤٠° ، ١١٠° »

---

١٢ **فى كل من الشكلين الآتيين ، مستعيناً بمعطيات كل شكل أوجد بالبرهان قياسات زوايا الشكل أ ب حـ ء :**



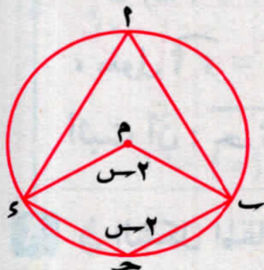
شكل (١) (الجيزة ٢٣)



شكل (٢)

---

١٣ **فى الشكل المقابل :**



أ ب ، أ ء وتران فى الدائرة م ، حـ ∈ ب ء

، ق (∠ ب حـ ء) = ق (∠ ب م ء) = ٢ س

أوجد بالبرهان : ق (∠ أ)

(المنوفية ٢٥) « ٦٠° »

---

١٤ أ نقطة خارج دائرة ، رُسم أ ب يقطع الدائرة فى ب ، حـ على الترتيب ، رُسم أ ء يقطع الدائرة فى ء ، هـ على الترتيب ، فإذا كان : أ حـ = أ هـ

أثبت أن : ١ ب ء // حـ هـ ٢ ق (ب حـ) = ق (هـ ء)

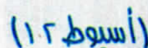
● تذكر ● فهم ○ تطبيق حل مشكلات

١٥ في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة

، $\overrightarrow{أهـ}$ ينصف ∠ ب أ ء ويلاقي الدائرة في نقطة هـ

أثبت أن : $\overrightarrow{حـ هـ}$ ينصف ∠ س حـ ء



---

١٦ أ ب حـ ء شكل رباعي دائري فيه : $\overline{أء}$ // $\overline{ب حـ}$ ، ق (∠ حـ) = ١٠٥°

أوجد : [١] ق (∠ أ) [٢] ق (∠ ب) «٧٥° ، ١٠٥°»

---

١٧ أ ب حـ ء شكل رباعي دائري فيه : أ ب = أ ء ، ق (∠ حـ) = ١٢٤° ، ق (∠ ب أ حـ) = ٣٦°

أوجد : [١] ق (∠ أ حـ ء) [٢] ق (∠ أ ء حـ) «٦٢° ، ٩٨°»

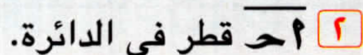
---

١٨ في الشكل المقابل :

ق (∠ ب حـ هـ) = ٦٠° ، $\overline{ب حـ}$ // $\overline{م ء}$

، أ منتصف $\frown{ب ء}$ الأكبر

أثبت أن : [١] الشكل ب م ء حـ معين.



---

١٩ $\overline{ب حـ}$ قطر في الدائرة م ، $\overline{ب أ}$ وتر فيها ، ء ∈ $\frown{أ حـ}$ بحيث ق (∠ أ ء حـ) = ١١٨°

، رسم $\overrightarrow{أهـ}$ // $\overline{ء حـ}$ ويقطع الدائرة في هـ

[١] أوجد : ق (∠ أ ب حـ) «٦٢°»

[٢] أثبت أن : ق (∠ أ حـ ء) = ق (∠ حـ ب هـ)

---

٢٠ في الشكل المقابل :

س منتصف $\frown{ص ل}$

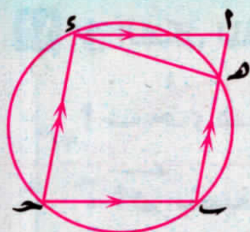
، ق (∠ ص ع ن) = ٨٠°

، ق (∠ ص ل ع) = ٢٠°

أوجد : [١] ق (∠ ع س ل) [٢] ق ($\frown{س ص ع}$)



٢١ في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء متوازي أضلاع ، الدائرة المارة بالنقط ب ، حـ ، ء

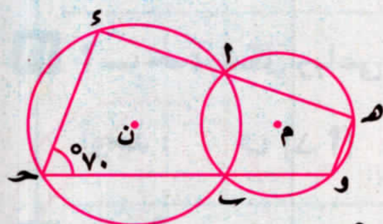
تقطع $\overline{أب}$ في هـ

أثبت أن : أء = هـ ء

(الفيوم ١١)

---

٢٢ في الشكل المقابل :



م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ، ب

، رسم $\overleftrightarrow{أء}$ يقطع الدائرة م في هـ والدائرة ن في ء

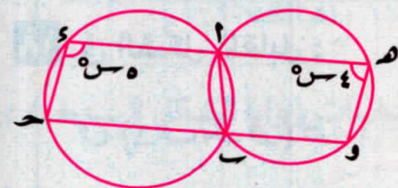
، رسم $\overleftrightarrow{ب حـ}$ يقطع الدائرة م في و والدائرة ن في حـ ، ق (∠ حـ) = ٧٠°

١ أوجد : ق (∠ و)   ٢ أثبت أن : $\overleftrightarrow{حـ ء}$ // $\overleftrightarrow{هـ و}$

(قنا ١٩ ، المنوفية ١٧) « ١١٠° »

---

٢٣ في الشكل المقابل :



دائرتان متقاطعتان في أ ، ب ، أ ∈ $\overline{هـ ء}$ ، ب ∈ $\overline{و حـ}$

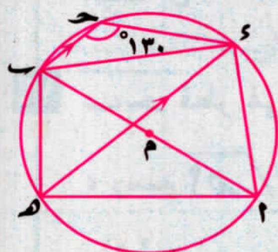
، ق (∠ ء) = ٥ س° ، ق (∠ هـ) = ٤ س°

أوجد بالبرهان : ق (∠ أ ب و)

« ١٠٠° »

---

٢٤ في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء شكل رباعي دائري ، $\overline{أب}$ قطر في الدائرة

، رسم $\overleftarrow{ء هـ}$ // $\overleftarrow{ب حـ}$ ويقطع الدائرة في هـ

١ أثبت أن : ق (∠ ء ب حـ) = ق (∠ ب أ هـ)

٢ إذا كان : ق (∠ حـ) = ١٣٠° فأوجد : ق (∠ أ هـ ء)

« ٤٠° »

للمتفوقين

١ أ ب حـ ء شكل رباعي دائري فيه : ق (∠ أ) = س° ، ق (∠ ب) = ٢ س°

، ق (∠ حـ) = ٣ ص° ، ق (∠ ء) = ص°

أوجد : قيمة كل من س ، ص

« ٧٢° ، ٣٦° »

---

٢ أ ب حـ ء هـ مخمس مرسوم في نصف دائرة قطرها $\overline{أب}$

أثبت أن : ق (∠ أ هـ ء) + ق (∠ ب حـ ء) = ٢٧٠°

الدرس 5

حالات إثبات الشكل الرباعى الدائرى



فى هذا الدرس سنجيب عن السؤال التالى :

متى يكون الشكل الرباعى دائريًا ؟

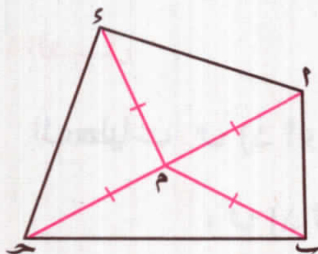
أولًا

يكون الشكل الرباعى دائريًا إذا وجدت نقطة فى مستوى الشكل على أبعاد متساوية من رؤوسه.

فمثلًا : إذا كانت م نقطة بحيث :

م أ = م ب = م حـ = م ء

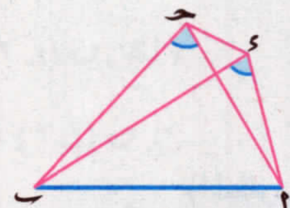
فإن : أ ب حـ ء رباعى دائرى.

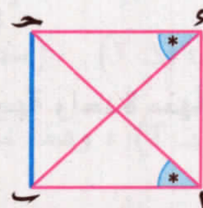


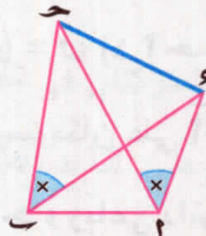
ثانيًا

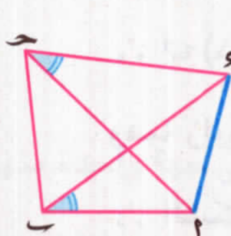
يكون الشكل الرباعى دائريًا إذا وُجدت زاويتان متساويتان فى القياس ومرسومتان على ضلع من أضلاعه كقاعدة وفى جهة واحدة من هذا الضلع.

- وعلى ذلك فإن كل شكل من الأشكال الأربعة الآتية هو شكل رباعى دائرى.


شكل (١)


شكل (٢)


شكل (٣)


شكل (٤)

! ملاحظتان

١ إذا وجدت زاويتان مرسومتان على ضلع من أضلاع شكل رباعى وفى جهة واحدة من هذا الضلع وكانتا غير متساويتين فى القياس فإن الشكل لا يكون رباعيًا دائريًا.

٢ المستطيل والمربع وشبه المنحرف المتساوى الساقين أشكال رباعية دائرية بينما متوازى الأضلاع والمعين وشبه المنحرف غير المتساوى الساقين ليست أشكالاً رباعية دائرية.

مثال ١

فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء شكل رباعى تقاطع قطراه فى هـ

، فإذا كان : ق (∠ أ ء ب) = ٤٨° ، ق (∠ ء ب حـ) = ٣٢°

، ق (∠ ب هـ حـ) = ١٠٠° ، ق (∠ أ ب ء) = ٦٤°

١ أثبت أن : الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى.

٢ أوجد : قياسات الزوايا المشار إليها بالعلامة (؟)

الحل

المعطيات ق (∠ أ ء ب) = ٤٨° ، ق (∠ ء ب حـ) = ٣٢° ، ق (∠ ب هـ حـ) = ١٠٠°

، ق (∠ أ ب ء) = ٦٤°

المطلوب ١ إثبات أن : الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى.

٢ إيجاد : قياسات الزوايا المشار إليها بالعلامة (؟)

البرهان فى Δ ب هـ حـ : ∵ ق (∠ ب حـ هـ) = ١٨٠° − (١٠٠° + ٣٢°) = ٤٨°

∴ ق (∠ أ ء ب) = ق (∠ أ حـ ب) = ٤٨°

وهما زاويتان مرسومتان على $\overline{\text{أ ب}}$ وفى جهة واحدة منها.

∴ الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى. (المطلوب أولاً)

∴ ق (∠ ء أ حـ) = ق (∠ ء ب حـ) = ٣٢° (مرسومتان على ءحـ وفى جهة واحدة منها)

، ق (∠ أ حـ ء) = ق (∠ أ ب ء) = ٦٤° (مرسومتان على أء وفى جهة واحدة منها)

، ∵ ∠ ب هـ حـ خارجة عن Δ أ ب هـ

∴ ق (∠ ب هـ حـ) = ق (∠ هـ أ ب) + ق (∠ هـ ب أ)

∴ ق (∠ هـ أ ب) = ١٠٠° − ٦٤° = ٣٦°

∴ ق (∠ ب ء حـ) = ق (∠ ب أ حـ) = ٣٦°

(مرسومتان على ب حـ وفى جهة واحدة منها) (المطلوب ثانيًا)

مثال ٢

فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة تقاطع قطراه فى هـ

، س ∈ ب هـ ، ص ∈ حـ هـ بحيث س ص // ب حـ

أثبت أن : ١ أ س ص ء رباعي دائري.

٢ ق (∠ ب أ س) = ق (∠ حـ ء ص)

الحل

المعطيات أ ب حـ ء شكل رباعي دائرى ، س ص // ب حـ

المطلوب إثبات أن : ١ أ س ص ء رباعي دائرى.

٢ ق (∠ ب أ س) = ق (∠ حـ ء ص)

البرهان ∵ س ص // ب حـ

∴ ق (∠ ١) = ق (∠ ٢) (بالتناظر)

، لكن ق (∠ ٢) = ق (∠ ٣) (محيطيتان مشتركتان فى ⌒حـ ء)

∴ ق (∠ ١) = ق (∠ ٣) ، وهما مرسومتان على القاعدة ص ء وفى جهة واحدة منها.

∴ أ س ص ء رباعي دائرى. (المطلوب أولًا)

، ∵ أ ب حـ ء رباعى دائرى.

∴ ق (∠ ب أ حـ) = ق (∠ ب ء حـ) (١)

، ∵ أ س ص ء رباعى دائرى.

∴ ق (∠ س أ ص) = ق (∠ س ء ص) (٢)

بطرح (٢) من (١) ينتج أن :

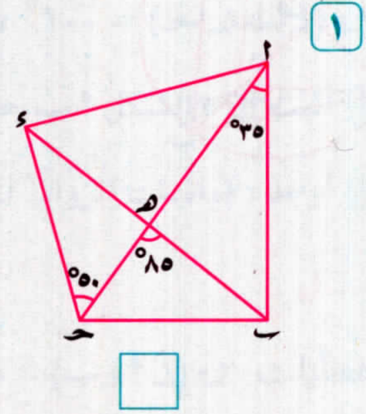
ق (∠ ب أ حـ) - ق (∠ س أ ص) = ق (∠ ب ء حـ) - ق (∠ س ء ص)

∴ ق (∠ ب أ س) = ق (∠ حـ ء ص) **(المطلوب ثانيًا)**

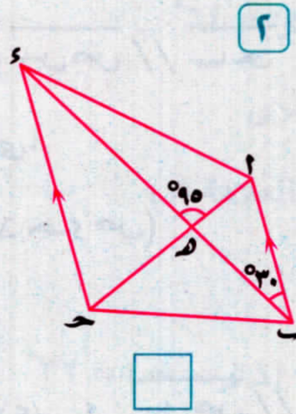
حاول بنفسك ١

ضع علامة (✔) أسفل الشكل الرباعى الدائرى فيما يلى علمًا بأن : $\overline{أحـ} \cap \overline{بء} = \{هـ\}$:

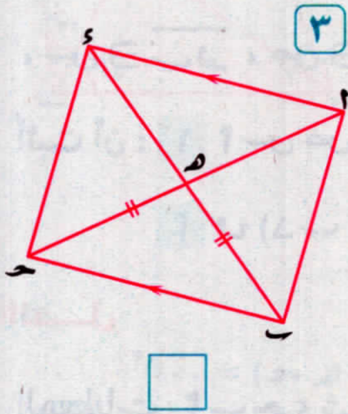
١



٢



٣



ثالثًا عكس نظرية ٣

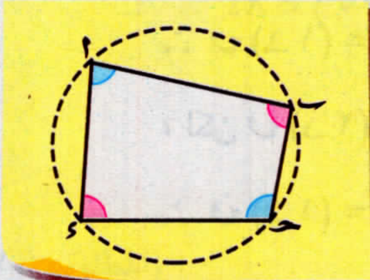
إذا وُجدت زاويتان متقابلتان متكاملتان فى شكل رباعى كان هذا الشكل رباعيًا دائريًا.

ففى الشكل المقابل :

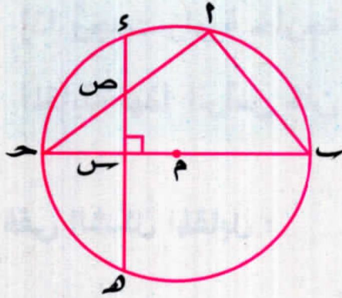
إذا كان : ق (∠ ب) + ق (∠ ء) = ١٨٠°

أ، ق (∠ أ) + ق (∠ حـ) = ١٨٠°

فإن : الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى.



مثال ٣



في الشكل المقابل :

$\overline{\text{ب حـ}}$ قطر في الدائرة م ، ا ∈ $\widehat{\text{ب حـ}}$ ، الوتر $\overline{\text{ء هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$

بحيث $\overline{\text{ء هـ}}$ ∩ $\overline{\text{ب حـ}}$ = {س} ، $\overline{\text{ء هـ}}$ ∩ $\overline{\text{ا حـ}}$ = {ص}

أثبت أن : الشكل ا ب س ص رباعي دائري.

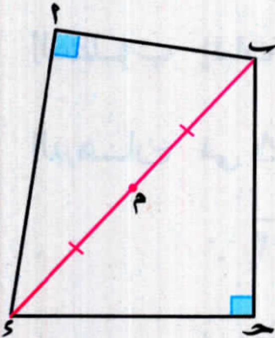
الحل

المعطيات	$\overline{\text{ب حـ}}$ قطر في الدائرة م ، $\overline{\text{ء هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$
المطلوب	إثبات أن : الشكل ا ب س ص رباعي دائري.
البرهان	∵ $\overline{\text{ب حـ}}$ قطر في الدائرة م ∴ ق (∠ ب ا حـ) = ٩٠°
	، ∵ $\overline{\text{ء هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$ ∴ ق (∠ ء س ب) = ٩٠°
	∴ في الشكل ا ب س ص :
	ق (∠ ب ا ص) + ق (∠ ص س ب) = ٩٠° + ٩٠° = ١٨٠°
	∴ الشكل ا ب س ص رباعي دائري. (وهو المطلوب)

! ملاحظة

إذا كانت إحدى زوايا شكل رباعي دائري قائمة كان قطر الشكل المقابل لهذه الزاوية القائمة هو قطر في الدائرة المارة برءوس الشكل، ومنتصف هذا القطر هو مركز هذه الدائرة.

ففي الشكل المقابل :



إذا كان : ا ب حـ ء شكلاً رباعيًا دائريًا ، ق (∠ ا) = ق (∠ حـ) = ٩٠°

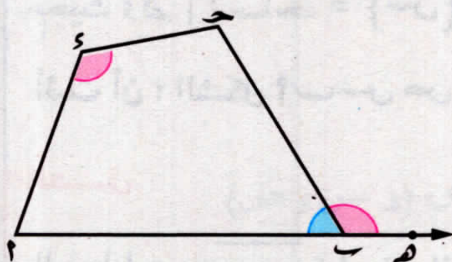
فإن : $\overline{\text{ب ء}}$ هو قطر في الدائرة المارة برءوس الشكل ا ب حـ ء

، والنقطة م منتصف $\overline{\text{ب ء}}$ هي مركز هذه الدائرة

، وطول نصف قطرها = م ب = م ء = م ا = م حـ

رابعًا نتيجة

إذا وُجدت زاوية خارجة عند رأس من رءوس شكل رباعى قياسها يساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة لهذا الرأس كان الشكل رباعيًا دائريًا.



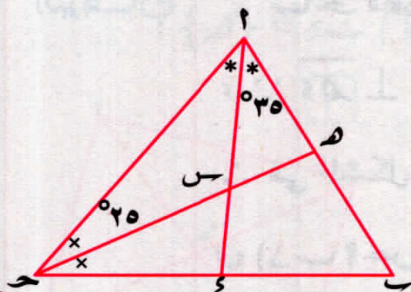
ففى الشكل المقابل :

إذا كان : أ ب حـ ء شكلاً رباعيًا

، وكان : ق (∠ حـ ب هـ) الخارجة = ق (∠ ء)

، فإن الشكل أ ب حـ ء يكون رباعيًا دائريًا.

مثال ٤



فى الشكل المقابل :

أء ينصف ∠ ب أ حـ ، حـ س ينصف ∠ أ حـ ب

، ق (∠ ب أ ء) = ٣٥° ، ق (∠ أ حـ هـ) = ٢٥°

أثبت أن : الشكل ب هـ س ء رباعى دائرى.

الحل

المعطيات أء ينصف ∠ أ ، حـ س ينصف ∠ حـ ، ق (∠ ب أ ء) = ٣٥°

، ق (∠ أ حـ هـ) = ٢٥°

المطلوب إثبات أن : الشكل ب هـ س ء رباعى دائرى.

البرهان فى Δ أ ب حـ :

∵ أء ينصف ∠ ب أ حـ ∴ ق (∠ ب أ حـ) = ٣٥° × ٢ = ٧٠°

، ∵ حـ هـ ينصف ∠ أ حـ ب ∴ ق (∠ أ حـ ب) = ٢٥° × ٢ = ٥٠°

∴ ق(∠ب) = ١٨٠° − (٧٠° + ٥٠°) = ٦٠° (١)

، ∵ ∠أ س هـ خارجة عن △ أ س حـ

∴ ق(∠أ س هـ) = ق(∠س أ حـ) + ق(∠أ حـ س) = ٣٥° + ٢٥° = ٦٠° (٢)

من (١) ، (٢) وفى الشكل ب هـ س ء :

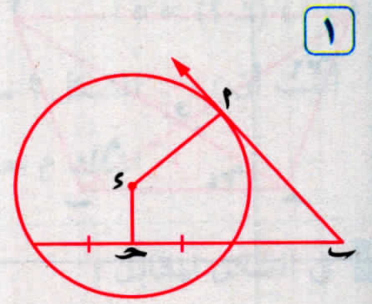
∴ ق(∠أ س هـ) الخارجة = ق(∠ب) المقابلة للرأس س

∴ الشكل ب هـ س ء رباعى دائرى. (وهو المطلوب)

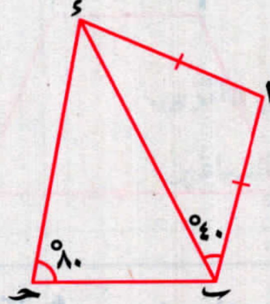
حاول بنفسك ٢

فى كل مما يأتى هل الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى أم لا ؟

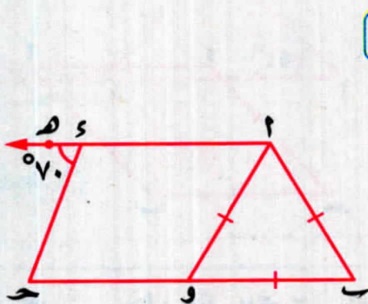
١



٢



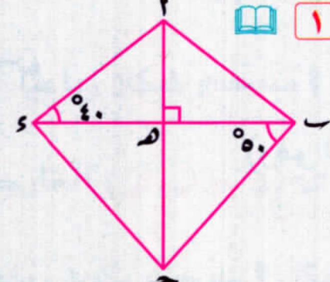
٣

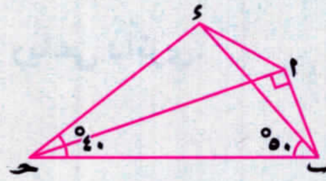


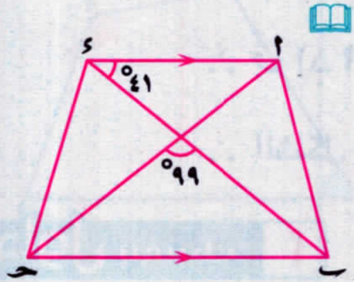
تمارين 10 على حالات إثبات الشكل الرباعى الدائرى

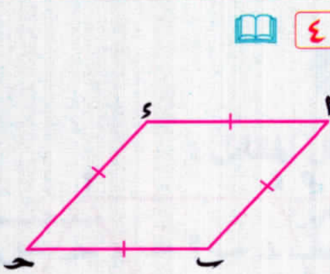
● تذكر ● فهم ○ تطبيق ● حل مشكلات | أسئلة كتاب الوزارة

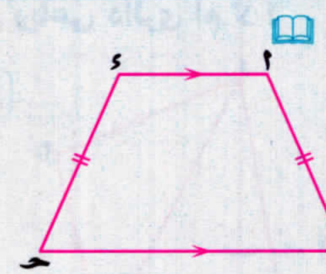
١ بيِّن أى الأشكال الآتية رباعيًا دائريًا ، فسر إجابتك :

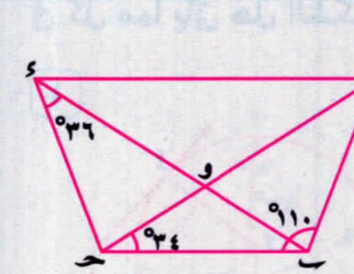

١



٢


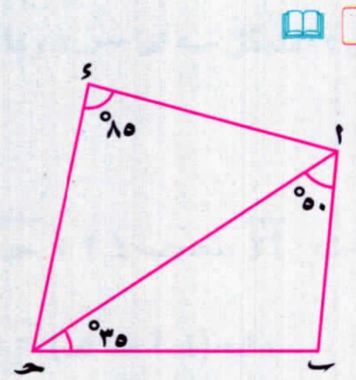

٣



٤


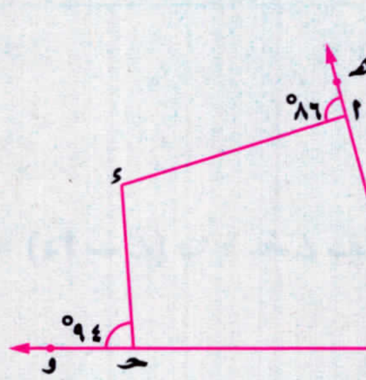

٥


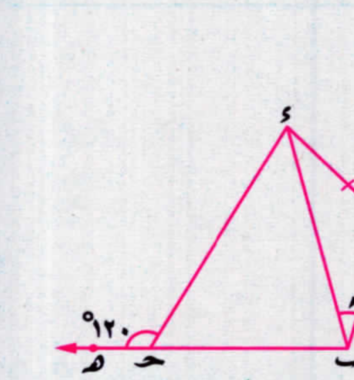
٦


٢ فى كل من الأشكال الآتية ، أثبت أن الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى :

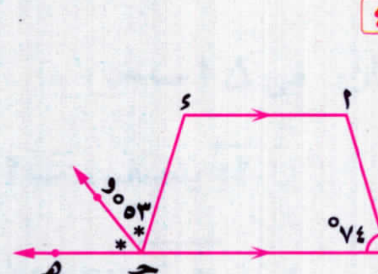

١


(ج. سيناء ١٦)

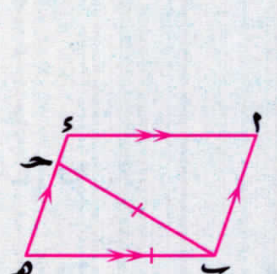
٢


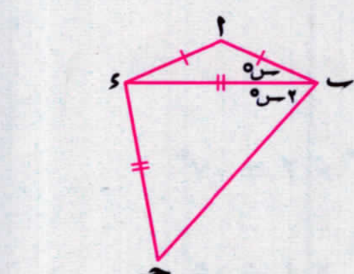
٣


(أسوان ٢٣ ، أسوان ١٦ ، دمياط ١٥)

٤


(الأقصر ٢٣ ، بورسعيد ١٧ ، دمياط ١٧)

٥


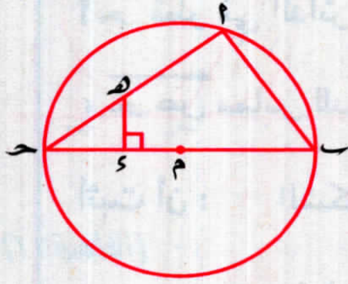
٦


(الدقهلية ٢٥ ، الدقهلية ١٣)

٣ اذكر حالتين يكون فيهما الشكل الرباعى رباعيًا دائريًا. (السويس ٢٣ ، القاهرة ١٩ ، أسيوط ١٩)

---

٤ فى الشكل المقابل :



$\overline{\text{ب حـ}}$ قطر فى الدائرة م

، $\overline{\text{هـ ء}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$

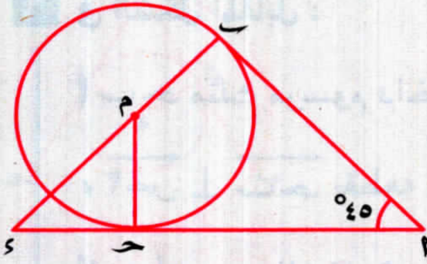
أثبت أن : ١ الشكل ا ب ء هـ رباعى دائرى.

٢ ق (∠ حـ هـ ء) = $\frac{1}{2}$ ق ($\overset{\frown}{\text{ا حـ}}$)

(الشرقية ٢٥ ، القليوبية ٢٤ ، ش. سيناء ٢٣ ، القاهرة ١٨)

---

٥ فى الشكل المقابل :



$\overline{\text{ا ب}}$ ، $\overline{\text{ا حـ}}$ تمسان الدائرة م عند ب ، حـ على الترتيب

، ق (∠ ا) = ٤٥°

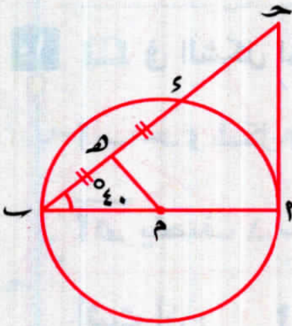
أثبت أن : ١ الشكل ا ب م حـ رباعى دائرى.

٢ المثلث م حـ ء متساوى الساقين.

(ج. سيناء ١٢)

---

٦ فى الشكل المقابل :



$\overline{\text{ا ب}}$ قطر فى الدائرة م ، $\overleftrightarrow{\text{ا حـ}}$ مماس لها عند ا

، هـ منتصف $\overline{\text{ء ب}}$ ، ق (∠ ب) = ٤٠°

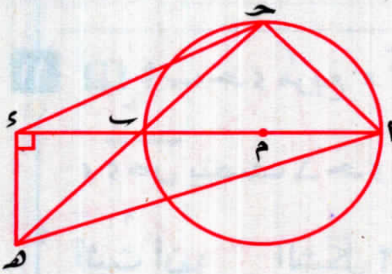
١ أثبت أن : الشكل ا م هـ حـ رباعى دائرى.

٢ أوجد : ق (∠ حـ)

(الوادى الجديد ١٤) «٥٠°»

---

٧ فى الشكل المقابل :



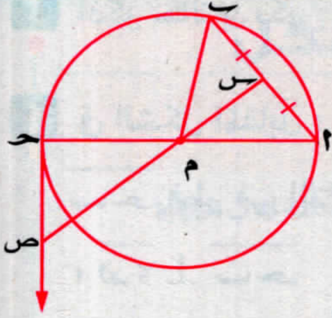
$\overline{\text{ا ب}}$ قطر فى الدائرة م

، رسم $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{ا ب}}$

، $\overleftrightarrow{\text{حـ ب}} \cap \overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$ = {هـ}

أثبت أن : ا حـ ء هـ شكل رباعى دائرى. (سوهاج ٢٤ ، قنا ١٩ ، الفيوم ١١)

٨ في الشكل المقابل :



$\overline{\text{أحـ}}$ قطر فى الدائرة م ، س منتصف $\overline{\text{أب}}$

، $\overleftrightarrow{\text{حـ ص}}$ مماس للدائرة قطع $\overrightarrow{\text{س م}}$ فى ص

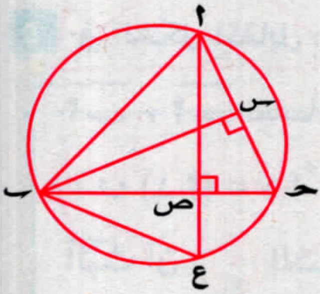
أثبت أن : [١] الشكل أ س حـ ص رباعى دائرى.

[٢] ق (∠ ب م حـ) = ٢ ق (∠ م ص حـ)

(أسوان ٠٩)

---

٩ في الشكل المقابل :



$\overline{\text{أ ب حـ}}$ مثلث مرسوم داخل دائرة ، $\overline{\text{ب س}}$ ⊥ $\overline{\text{أحـ}}$

، $\overleftrightarrow{\text{أص}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$ يقطعه فى ص ويقطع الدائرة فى ع

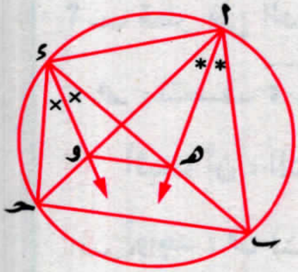
أثبت أن : [١] الشكل أ ب ص س رباعى دائرى.

[٢] $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ ينصف ∠ س ب ع

(الغربية ١٧ ، البحيرة ١٧)

---

١٠ في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى فيه :

$\overrightarrow{\text{أهـ}}$ ينصف ∠ ب أ حـ ، $\overrightarrow{\text{ءو}}$ ينصف ∠ ب ء حـ

أثبت أن : [١] أ هـ و ء شكل رباعى دائرى.

[٢] $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

(الغربية ١٨ ، الأقصر ١٦ ، الدقهلية ١٣)

---

١١ أ ب حـ ء مربع ، $\overrightarrow{\text{أس}}$ ينصف ∠ ب أ حـ ويقطع $\overline{\text{ب ء}}$ فى س

، $\overrightarrow{\text{ءص}}$ ينصف ∠ حـ ء ب ويقطع $\overline{\text{أحـ}}$ فى ص

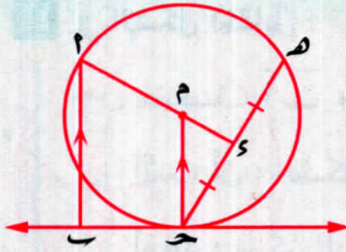
أثبت أن : [١] الشكل أ س ص ء رباعى دائرى.

[٢] ق (∠ أ ص س) = ٤٥°

(الإسكندرية ١٦ ، الشرقية ١٢)

● تذكر ● فهم ○ تطبيق ● حل مشكلات

١٢ في الشكل المقابل :



م دائرة ، ء منتصف الوتر $\overline{\text{هـ حـ}}$

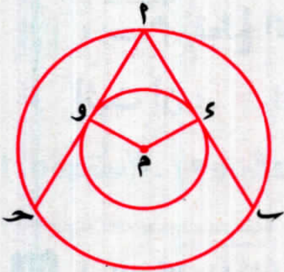
، $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ مماس للدائرة م عند حـ

، $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{م حـ}}$

أثبت أن : الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري. (القاهرة ١٢)

---

١٣ في الشكل المقابل :



دائرتان متحدتا المركز م ، $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$ مماسان

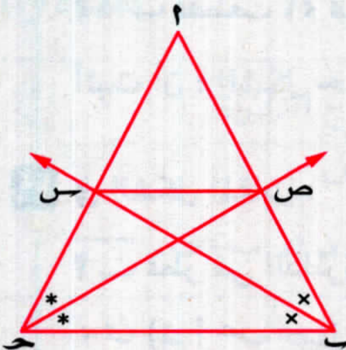
للدائرة الصغرى عند ء ، و على الترتيب

أثبت أن : [١] أ ء م و رباعي دائري.

[٢] ق ($\overset{\frown}{\text{ء و}}$) + $\frac{1}{2}$ ق ($\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$) = ١٨٠° (دمياط ٢٥)

---

١٤ في الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = أ حـ

، $\overleftarrow{\text{ب س}}$ ينصف ∠ أ ب حـ ويقطع $\overline{\text{أ حـ}}$ في س

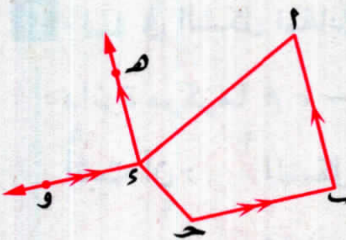
، $\overleftarrow{\text{حـ ص}}$ ينصف ∠ أ حـ ب ويقطع $\overline{\text{أ ب}}$ في ص

أثبت أن : [١] ب حـ س ص رباعي دائري.

[٢] $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ (الفيوم ١٧ ، أسيوط ١١)

---

١٥ في الشكل المقابل :



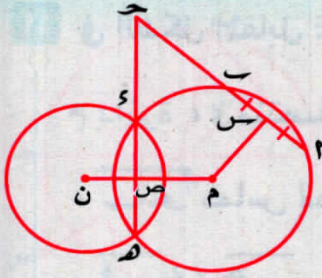
$\overleftarrow{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{ء هـ}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ // $\overleftarrow{\text{ء و}}$

، ق (∠ أ ء هـ) + ق (∠ حـ ء و) = ١٨٠°

أثبت أن : الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري.

(المنوفية ٠٦)

١٦ في الشكل المقابل :



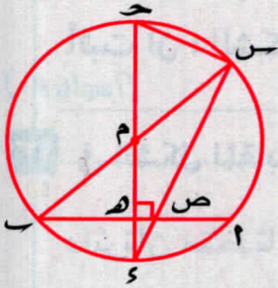
ـس منتصف أب ، م ن ∩ هـ حـ = {ص}

[١] أثبت أن : الشكل حـ ـس م ص رباعي دائري.

[٢] أوجد : مركز الدائرة المارة برؤوس الشكل حـ ـس م ص **(الإسماعيلية ١٧)**

---

١٧ في الشكل المقابل :



أب وتر في الدائرة م ، حـ ء قطر عمودي على أب ويقطعه في هـ

، ب م يقطع الدائرة في ـس ، ـس ء ∩ أب = {ص}

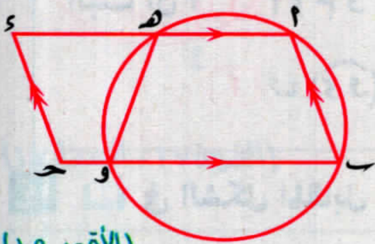
أثبت أن : [١] الشكل ـس ص هـ حـ رباعي دائري.

[٢] ق (∠ ء ص ب) = ق (∠ ء ب ـس)

(الوادي الجديد ٢٣ ، الوادي الجديد ١٩ ، القاهرة ١١)

---

١٨ في الشكل المقابل :



أب حـ ء متوازي أضلاع ، رُسمت دائرة تمر بالنقطتين

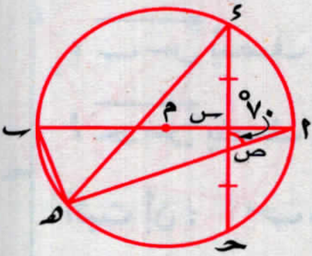
أ ، ب فقطعت أء في هـ ، ب حـ في و

أثبت أن : الشكل حـ ء هـ و رباعي دائري.

(الأقصر ١٩)

---

١٩ في الشكل المقابل :



أب قطر في الدائرة م ، ـس منتصف ء حـ

، ق (∠ أ ص ـس) = ٧٠°

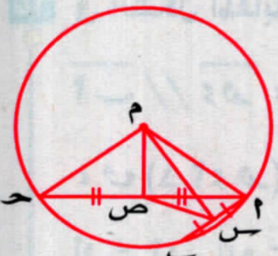
[١] أثبت أن : الشكل ـس ص هـ ب رباعي دائري.

[٢] أوجد : ق (∠ أ ء هـ)

(دمياط ٠٨) « ٧٠° »

---

٢٠ في الشكل المقابل :



دائرة مركزها م ، ـس ، ص منتصفا أب ، أحـ على الترتيب.

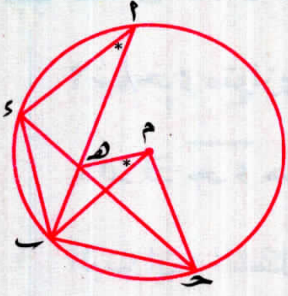
أثبت أن : [١] الشكل أ ـس ص م رباعي دائري.

[٢] ق (∠ م ـس ص) = ق (∠ م حـ ص)

[٣] أم قطر في الدائرة المارة بالنقط أ ، ـس ، ص ، م

(البحر الأحمر ١٢)

٢١ **في الشكل المقابل :**



أب ، جـ ء وتران في الدائرة م

، أب ∩ جـ ء = {هـ} ، ق(∠ب أ ء) = ق(∠ب م هـ)

أثبت أن : [1] الشكل م جـ ب هـ رباعي دائري.

[2] ق(∠جـ هـ ب) = ٢ ق(∠جـ ء ب)

---

٢٢ أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة ، س ∈ ⌢أب ، ص ∈ ⌢أجـ حيث :

ق(⌢أس) = ق(⌢أص) ، جـ س ∩ أب = {ء} ، ب ص ∩ أجـ = {هـ}

أثبت أن : [1] الشكل ب جـ هـ ء رباعي دائري.

[2] ق(∠ء هـ ب) = ق(∠س أ ب)

(المنوفية ١٩ ، الوادي الجديد ١٩ ، الإسكندرية ١٥)

---

٢٣ أ ب جـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة ، و ∈ أب ، رسم و هـ // ب جـ

ويقطع جـ ء في هـ ، ء و ∩ جـ ب = {س} أثبت أن :

[1] الشكل أ و هـ ء رباعي دائري. [2] ق(∠ب س و) = ق(∠هـ ء أ)

(مطروح ١٧)

---

٢٤ أب قطر في دائرة ، ء ∈ أب ، رُسم ء هـ ⊥ أب بحيث هـ خارج الدائرة

، ورُسم هـ أ فقطع الدائرة في س ، ورُسم س ء فقطع الدائرة في ص

أثبت أن : [1] الشكل هـ ب ء س رباعي دائري. [2] ب أ ينصف ∠ هـ ب ص

---

٢٥ أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة فيه : أب > أجـ ، ء ∈ أب بحيث

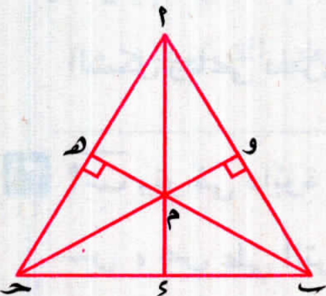
أجـ = أء ، أهـ ينصف ∠أ ويقطع ب جـ في هـ ويقطع الدائرة في و

أثبت أن : الشكل ب ء هـ و رباعي دائري.

(كفر الشيخ ١٩ ، المنيا ١٩ ، المنوفية ١٨ ، المنيا ١٨)

---

٢٦ **في الشكل المقابل :**



أ ب جـ مثلث ، ب هـ ⊥ أجـ

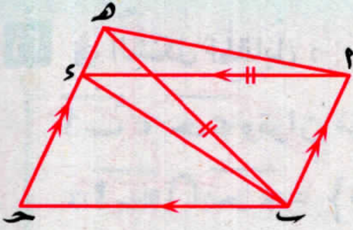
، جـ و ⊥ أب ، ب هـ ∩ جـ و = {م}

، أم ∩ ب جـ = {ء}

أثبت أن : الشكل م ء جـ هـ رباعي دائري.

(ج. سيناء ١٧)

٢٧ في الشكل المقابل :



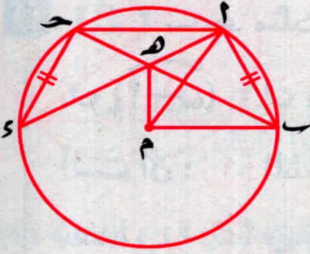
أ ب حـ ء متوازي أضلاع

، هـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ حيث ب هـ = أ ء

أثبت أن : الشكل أ ب ء هـ رباعي دائري. (البحيرة ١٨ ، الأقصر ١٧ ، ج.سيناء ١٣ ، مطروح ١١)

---

٢٨ في الشكل المقابل :



دائرة مركزها م ، أ ب = حـ ء

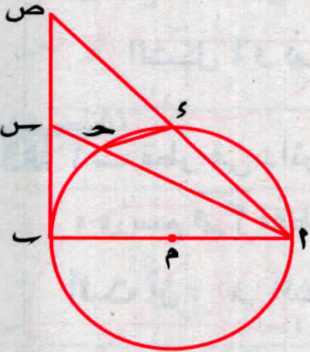
، ق (∠ أ م هـ) = ٤٠°

١ أثبت أن : الشكل أ ب م هـ رباعي دائري.

٢ أوجد : ق (∠ أ ء حـ) (الشرقية ٢٤) «٤٠°»

---

٢٩ في الشكل المقابل :



$\overline{\text{أ ب}}$ قطر في الدائرة م ، $\overline{\text{أ حـ}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$ وتران فيها

في جهة واحدة من $\overline{\text{أ ب}}$ ، رسم من ب مماس للدائرة

قطع $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ في س ، وقطع $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ في ص

أثبت أن : الشكل س ص ء حـ رباعي دائري. (الأقصر ٢٤)

---

٣٠ أ ب حـ ء شكل رباعي فيه : ق (∠ أ) = ٩٠° وأطوال أضلاعه $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{حـ ء}}$ ، $\overline{\text{ء أ}}$ هي على الترتيب ٨ ، ٥ $\sqrt{٣}$ ، ٥ ، ٦ من السنتيمترات أثبت أن :

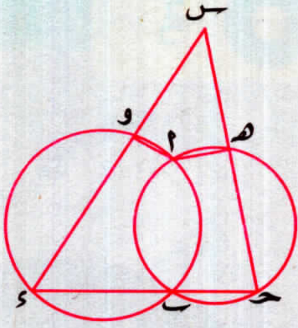
الشكل رباعي دائري وعيّن مركز الدائرة المارة برءوسه وطول نصف قطرها. «٥ سم»

---

٣١ $\overline{\text{أ ب}}$ وتر في دائرة م ، حـ منتصف $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ ، رسم من حـ الشعاعان $\overrightarrow{\text{حـ س}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ ص}}$ فقطعا $\overline{\text{أ ب}}$ في س ، ص على الترتيب وقطعا الدائرة في ل ، ع على الترتيب

أثبت أن : س ص ع ل رباعي دائري.

٣٢ في الشكل المقابل :



دائرتان متقاطعتان في أ ، ب

، $\overleftrightarrow{حء}$ يمر بالنقطة ب ويقطع الدائرتين في حـ ، ء

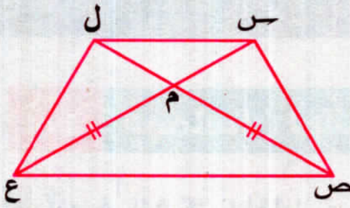
، $\overleftarrow{حهـ} \cap \overleftarrow{ءو} = \{س\}$

أثبت أن : الشكل أ و س هـ رباعي دائري.

(دمياط ١٧ ، الدقهلية ١٥ ، الغربية ١٤ ، ش. سيناء ١٣)

للمتفوقين

١ في الشكل المقابل :

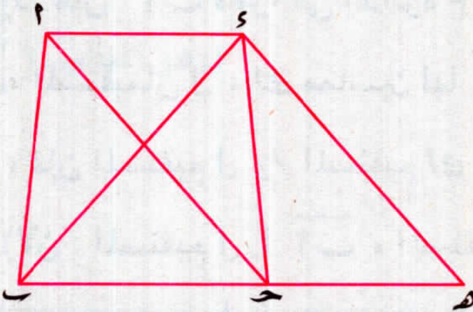


م ص = م ع ، مساحة Δ س م ص = مساحة Δ ل م ع

أثبت أن : الشكل س ص ع ل رباعي دائري.

---

٢ في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء شكل رباعي ، حـ $\in$ $\overline{هـ ب}$

، Δ ء حـ هـ ~ Δ ب أ ء

أثبت أن : ١ الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري.

٢ $\overline{هـ ء}$ // $\overline{حـ أ}$

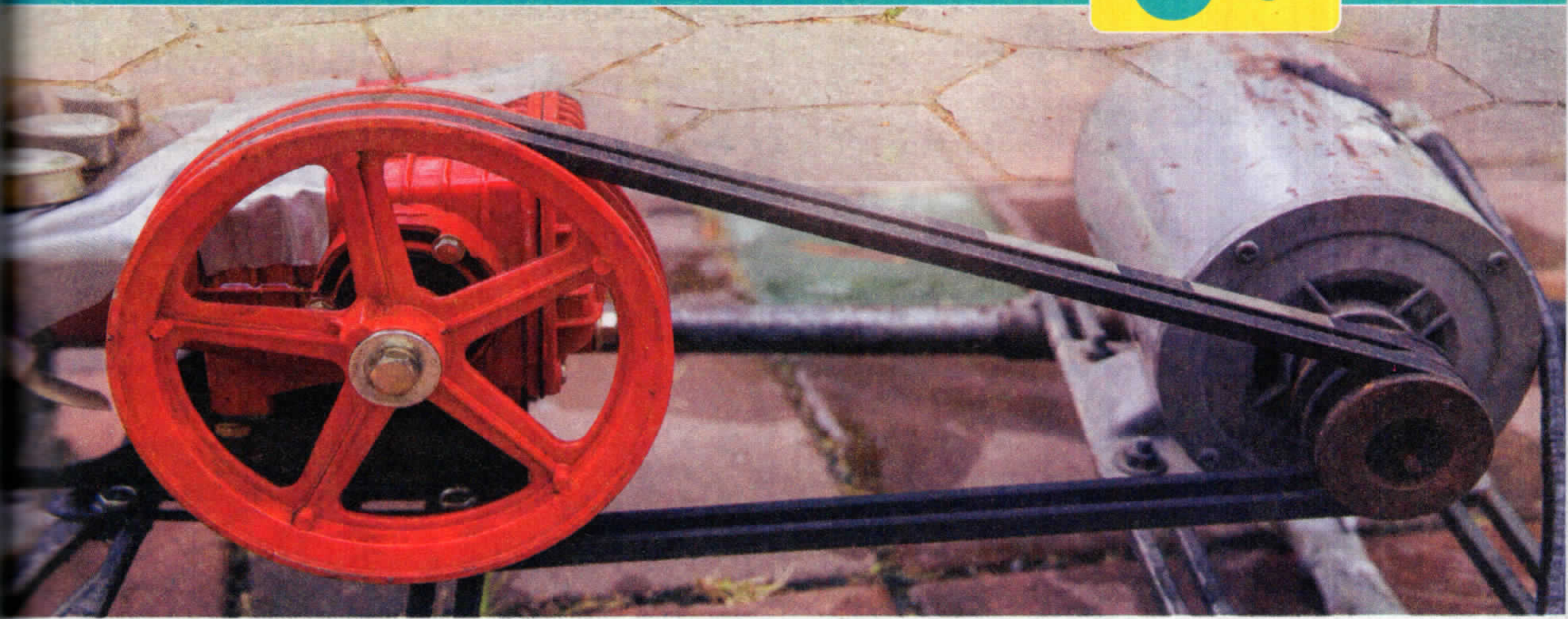
---

٣ $\overline{أ ب}$ قطر في دائرة ، ل مستقيم يمس الدائرة عند ب ، فرضت النقطتان حـ ، ء على الدائرة في جهتين مختلفتين من $\overline{أ ب}$ ثم رسم $\overrightarrow{أ حـ}$ ، $\overrightarrow{أ ء}$ فقطعا المستقيم ل في هـ ، و على الترتيب.

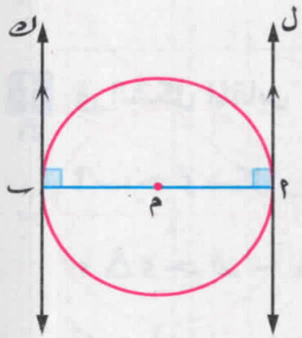
أثبت أن : الشكل حـ ء و هـ رباعي دائري.

الدرس 6

العلاقة بين مماسات الدائرة



أولًا المماسان لدائرة المرسومان من نهايتى قطر فيها يكونان متوازيين



أى أنه فى الشكل المقابل :

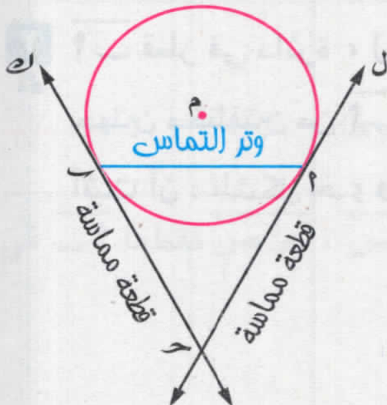
إذا كان : $\overline{أب}$ قطرًا فى الدائرة م

، المستقيمان ل ، ك مماسين لها عند أ ، ب على الترتيب

، فإن المستقيم ل // المستقيم ك

(**لأن :** المستقيم ل ⊥ $\overline{أب}$ ، المستقيم ك ⊥ $\overline{أب}$)

ثانيًا المماسان لدائرة المرسومان من نهايتى وتر فيها يكونان متقاطعين



أى أنه فى الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{أب}$ وترًا فى الدائرة م

، المستقيمان ل ، ك مماسين لها عند أ ، ب على الترتيب

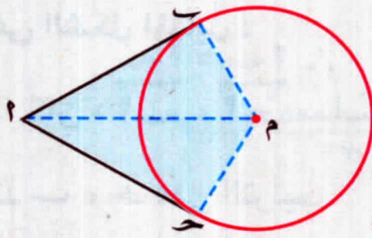
، فإن المستقيمين ل ، ك يتقاطعان فى نقطة خارج الدائرة ولتكن حـ

، وتُسمى $\overline{أحـ}$ ، $\overline{بحـ}$ «**قطعتين مماستين**» للدائرة م

، ويُسمى $\overline{أب}$ «**وتر التماس**».

نظرية ٤

القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج الدائرة متساويتان فى الطول.



المعطيات أ نقطة خارج الدائرة م ، $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ قطعتان مماستان للدائرة عند ب ، حـ على الترتيب.

المطلوب إثبات أن : أ ب = أ حـ

العمل نرسم : $\overline{م ب}$ ، $\overline{م حـ}$ ، $\overline{أم}$

البرهان ∵ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م ∴ ق (∠ أ ب م) = ٩٠°

، ∵ $\overleftrightarrow{أحـ}$ مماس للدائرة م ∴ ق (∠ أ حـ م) = ٩٠°

∴ Δ Δ أ ب م ، أ حـ م فيهما :

م ب = م حـ (طولا نصفى قطرين فى الدائرة)

$\overline{أم}$ (ضلع مشترك)

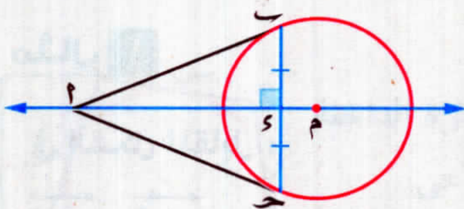
ق (∠ أ ب م) = ق (∠ أ حـ م) = ٩٠° (إثباتًا)

∴ Δ أ ب م ≡ Δ أ حـ م وينتج أن : أ ب = أ حـ (وهو المطلوب)

نتائج نظرية (٤)

نتيجة ١

المستقيم المار بمركز الدائرة ونقطة تقاطع مماسين لها يكون محورًا لوتر التماس لهذين المماسين.



ففى الشكل المقابل :

إذا كان : $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أحـ}$ مماسين للدائرة م

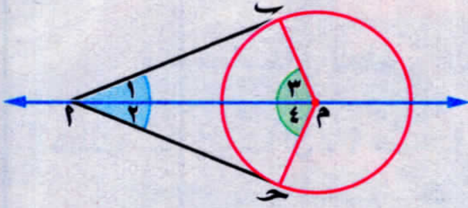
عند ب ، حـ على الترتيب ، فإن : $\overleftrightarrow{أم}$ محور $\overline{ب حـ}$

أى أن : $\overleftrightarrow{أم}$ ⊥ $\overline{ب حـ}$ ، ب ء = حـ ء

نتيجة ٢

المستقيم المار بمركز الدائرة ونقطة تقاطع مماسين لها ينصف الزاوية بين هذين المماسين كما ينصف الزاوية بين نصفى القطرين المارين بنقطتى التماس.

ففى الشكل المقابل :



إذا كان : $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أحـ}$ مماسين للدائرة م

عند ب ، حـ على الترتيب

، فإن : $\overleftarrow{أم}$ ينصف ∠ ب أ حـ ∴ ق (∠ ١) = ق (∠ ٢)

، $\overleftarrow{مأ}$ ينصف ∠ ب م حـ ∴ ق (∠ ٣) = ق (∠ ٤)

! ملاحظات على نظرية (٤) ونتائجها

فى الشكل المقابل :

إذا كانت : $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ قطعتين

مماستين للدائرة م عند ب ، حـ فإن :

١ أب = أحـ ٢ م ب = م حـ = نق

٣ ب هـ = حـ هـ ، $\overleftrightarrow{أم} \perp \overline{ب حـ}$

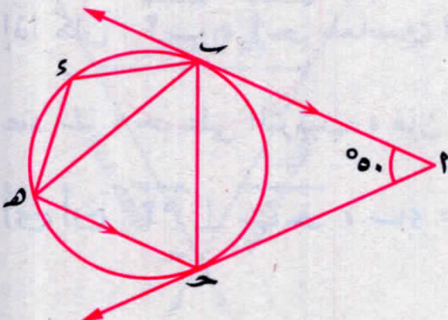
٤ ق (∠ أ ب م) = ق (∠ أ حـ م) = ٩٠° أى أن : الشكل أ ب م حـ رباعى دائرى.

٥ ق (∠ ب أ م) = ق (∠ ب حـ م) = ق (∠ حـ أ م) = ق (∠ حـ ب م)

٦ ق (∠ أ م ب) = ق (∠ أ حـ ب) = ق (∠ أ م حـ) = ق (∠ أ ب حـ)

مثال ١

فى الشكل المقابل :



$\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أحـ}$ يمسان الدائرة عند ب ، حـ

، $\overleftarrow{أب}$ // $\overline{حـ هـ}$ ، ق (∠ أ) = ٥٠°

أوجد بالبرهان : ق (∠ ب ء هـ)

الحـــل

المعطيات $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أحـ}$ يمسان الدائرة عند ب ، حـ ، $\overleftarrow{أب}$ // $\overline{حـ هـ}$ ، ق (∠ أ) = ٥٠°

المطلوب إيجاد : ق (∠ ب ء هـ)

البرهـان ∵ $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ قطعتان مماستان للدائرة. ∴ أب = أحـ

∴ فى Δ أ ب حـ : ق (∠ أ ب حـ) = ق (∠ أ حـ ب) = $\frac{١٨٠° - ٥٠°}{٢}$ = ٦٥°

، ∵ $\overleftarrow{أب}$ // $\overline{حـ هـ}$ ، $\overleftrightarrow{ب حـ}$ قاطع لهما.

∴ ق (∠ أ ب حـ) = ق (∠ ب حـ هـ) = ٦٥° (بالتبادل)

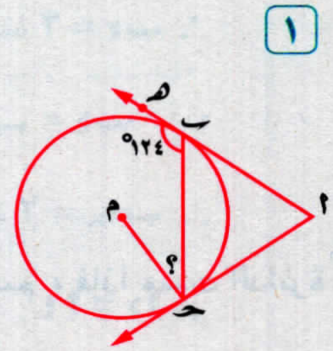
، ∵ الشكل ء ب حـ هـ رباعى دائرى.

∴ ق (∠ ب ء هـ) = ١٨٠° - ٦٥° = ١١٥° (وهو المطلوب)

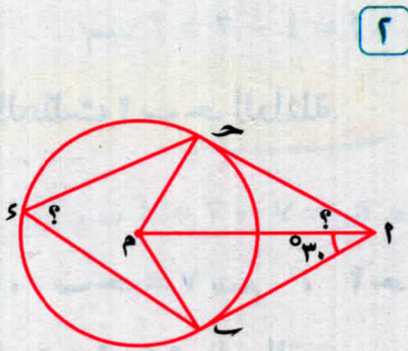
حاول بنفسك ١

فى كل مما يأتى أوجد قياس الزاوية المشار إليها بالعلامة (؟) :

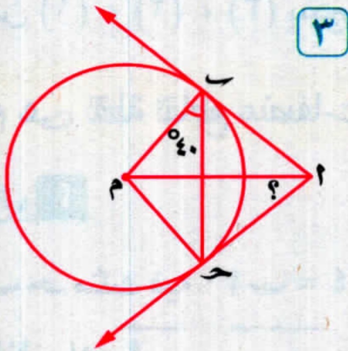
١



٢



٣

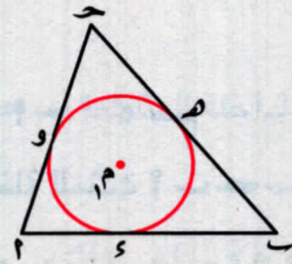


تعريف

الدائرة الداخلة لمضلع هى الدائرة التى تمس أضلاعه جميعها.

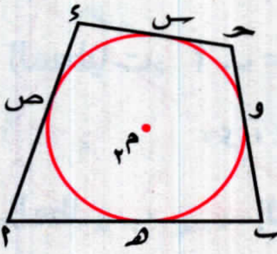
شكل (١) :

$م_١$ هى الدائرة الداخلة للمثلث أ ب حـ حيث : الضلع $\overline{أب}$ يمس الدائرة فى ء ، $\overline{ب حـ}$ يمس الدائرة فى هـ ، $\overline{حـ أ}$ يمس الدائرة فى و



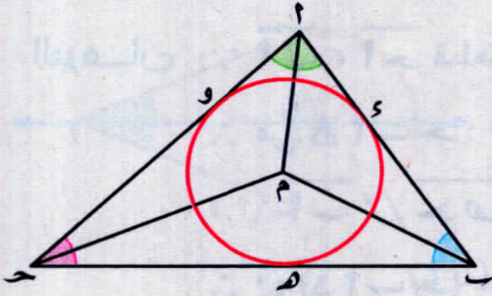
شكل (٢) :

$م_٢$ هى الدائرة الداخلة للشكل الرباعى أ ب حـ ء



ملاحظة

مركز الدائرة الداخلة لأى مثلث هو نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة.



أى أنه فى الشكل المقابل :

إذا كانت الدائرة م داخلة للمثلث أ ب حـ

فإن : م هى نقطة تلاقى منصفات زوايا Δ أ ب حـ الداخلة.

ويمكن إثبات ذلك كما يلى :

∵ $\overline{أء}$ ، $\overline{أو}$ قطعتان مماستان للدائرة م

∴ $\overleftarrow{أم}$ ينصف ∠ ب أ حـ (١)

، وبالمثل $\overleftarrow{بم}$ ينصف ∠ أ ب حـ (٢)

، وبالمثل $\overleftarrow{حـ م}$ ينصف ∠ أ حـ ب (٣)

∴ من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج أن :

م هى نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث أ ب حـ الداخلة.

مثال ٢

أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٤ سم ، ب حـ = ٧ سم ، أ حـ = ٥ سم ، فإذا مست الدائرة الداخلة له الأضلاع $\overline{أب}$ ، $\overline{بحـ}$ ، $\overline{حـ أ}$ فى ء ، هـ ، و على الترتيب

، فأثبت أن : أ حـ + ب ء = ب حـ + أ ء ، ثم استنتج من ذلك أطوال الأجزاء التى تنقسم إليها الأضلاع بنقط التماس.

الحـــل

المعطيات أ ب = ٤ سم ، ب حـ = ٧ سم ، أ حـ = ٥ سم

، ء ، هـ ، و هى نقط تماس الدائرة الداخلة للمثلث أ ب حـ

المطلـوب ١ إثبات أن : أ حـ + ب ء = ب حـ + أ ء

٢ إيجاد : أ ء ، ء ب ، ب هـ ، حـ هـ ، حـ و ، و أ

البرهـــان ∵ حـ و ، حـ هـ قطعتان مماستان للدائرة عند و ، هـ

∴ حـ و = حـ هـ

، وبالمثل أ و = أ ء ، ب ء = ب هـ

∴ (حـ و + أ و) + ب ء = (حـ هـ + ب هـ) + أ ء

∴ أ حـ + ب ء = ب حـ + أ ء (١) (المطلوب أولاً)

، ∵ أ حـ = ٥ سم ، ب حـ = ٧ سم ، أ ء = (٤ − ب ء) سم

وبالتعويض فى (١) : ∴ ٥ + ب ء = ٧ + (٤ − ب ء)

∴ ٥ + ب ء = ١١ − ب ء ∴ ٢ ب ء = ٦

∴ ب ء = ٣ سم ، ء أ = ٤ − ٣ = ١ سم

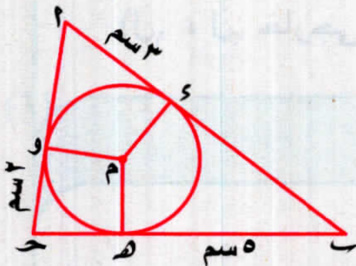
، ∵ ب ء = ب هـ

∴ ب هـ = ٣ سم ، حـ هـ = ٧ − ٣ = ٤ سم

∵ أ ء = أ و

∴ أ و = ١ سم ، حـ و = حـ هـ = ٤ سم (المطلوب ثانيًا)

حاول بنفسك ٢



فى الشكل المقابل :

إذا كانت م هى الدائرة الداخلة للمثلث أ ب حـ

١ أوجد : محيط Δ أ ب حـ

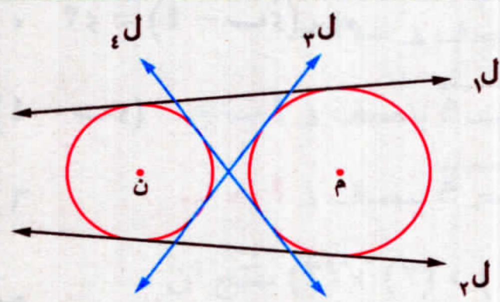
٢ أثبت أن : الشكل أ ء م و رباعى دائرى.

المماسات المشتركة لدائرتين

- يُقال للمماس $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ إنه مماس مشترك داخلى للدائرتين م ، ن إذا كانت الدائرتان م ، ن تقعان فى جهتين مختلفتين منه.
- يُقال للمماس $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ إنه مماس مشترك خارجى للدائرتين م ، ن إذا كانت الدائرتان م ، ن تقعان فى جهة واحدة منه.

والجدول التالى يوضح المماسات المشتركة وعددها لدائرتين فى أوضاعهما المختلفة.

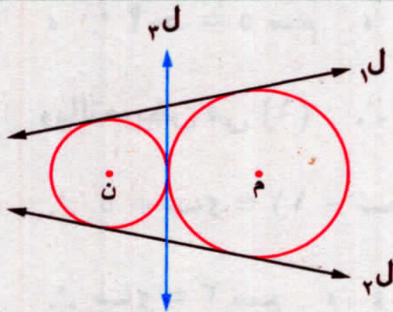
الدائرتان متباعدتان



٤ مماسات مشتركة

(ل١ ، ل٢ خارجى ، ل٣ ، ل٤ داخلى)

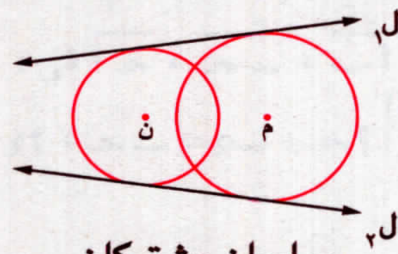
الدائرتان متماستان من الخارج



٣ مماسات مشتركة

(ل١ ، ل٢ خارجى ، ل٣ داخلى)

الدائرتان متقاطعتان



مماسان مشتركان

(ل١ ، ل٢ خارجى ، ولا يوجد داخلى)

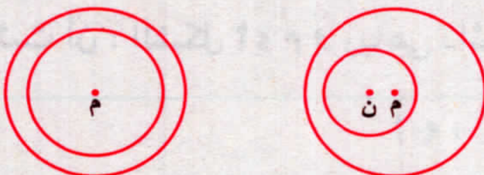
الدائرتان متماستان من الداخل



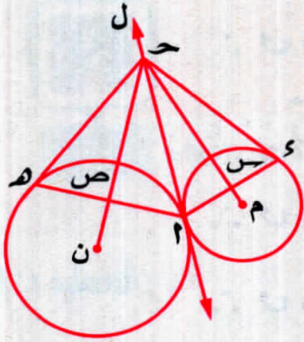
مماس واحد مشترك خارجى ولا يوجد داخلى

الدائرتان متداخلتان

لا يوجد مماسات مشتركة



مثال ٣



فى الشكل المقابل :

م ، ن دائرتان متماستان من الخارج فى أ ، المستقيم ل مماس مشترك لهما عند أ ، النقطة حـ ∈ ل ، رُسم من حـ مماسان آخران للدائرتين م ، ن يمسانهما فى ء ، هـ على الترتيب.

أثبت أن :

١ حـ مركز الدائرة المارة بالنقط ء ، أ ، هـ

٢ ∠ ء أ هـ تكمل ∠ م حـ ن

الحل

المعطيات ل مماس مشترك للدائرتين م ، ن عند أ ، $\overline{\text{حـ ء}}$ تمس الدائرة م ، $\overline{\text{حـ هـ}}$ تمس الدائرة ن

المطلوب إثبات أن :

١ حـ مركز الدائرة المارة بالنقط ء ، أ ، هـ

٢ ∠ ء أ هـ تكمل ∠ م حـ ن

البرهان ∵ $\overline{\text{حـ ء}}$ ، $\overline{\text{حـ أ}}$ قطعتان مماستان للدائرة م

∴ حـ ء = حـ أ (١)

، ∵ $\overline{\text{حـ هـ}}$ ، $\overline{\text{حـ أ}}$ قطعتان مماستان للدائرة ن

∴ حـ هـ = حـ أ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : حـ ء = حـ أ = حـ هـ

∴ حـ مركز الدائرة المارة بالنقط ء ، أ ، هـ (المطلوب أولًا)

، ∵ $\overleftrightarrow{\text{م حـ}}$ محور وتر التماس $\overline{\text{أ ء}}$ فى الدائرة م

∴ ق (∠ أ س حـ) = ٩٠°

، ∵ $\overleftrightarrow{\text{ن حـ}}$ محور وتر التماس $\overline{\text{أ هـ}}$ فى الدائرة ن

∴ ق (∠ أ ص حـ) = ٩٠°

∴ ق (∠ أ س حـ) + ق (∠ أ ص حـ) = ١٨٠°

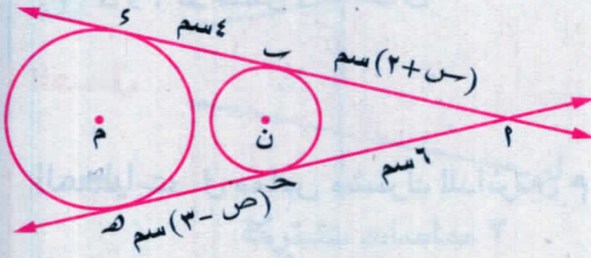
∴ أ س حـ ص رباعى دائرى.

∴ ق (∠ ء أ هـ) + ق (∠ م حـ ن) = ١٨٠° (المطلوب ثانيًا)

حاول بنفسك ٣

فى الشكل المقابل :

أوجد : قيمة كل من س ، ص بالسنتيمتر.



تمارين 11 على العلاقة بين مماسات الدائرة



● تذكر ● فهم ○ تطبيق حل مشكلات | أسئلة كتاب الوزارة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ المماسان المرسومان لدائرة من نهايتى قطر فيها .... (الدقهلية ٢١)

(أ) متوازيان. (ب) متقاطعان. (جـ) متعامدان. (د) منطبقان.

٢ القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج الدائرة ....

(أ) متوازيتان. (ب) متعامدتان.

(جـ) متساويتان فى الطول. (د) منطبقتان.

٣ مركز الدائرة الداخلة لأى مثلث هو نقطة تقاطع .... (كفر الشيخ ٢٥)

(أ) متوسطاته. (ب) ارتفاعاته.

(جـ) منصفات زواياه الداخلة. (د) أضلاعه.

٤ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتين هو .... (جنوب سيناء ٢٤ ، المنيا ٢٣ ، الفيوم ٢٢)

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

٥ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستين من الخارج يساوى .... (الأقصر ٢٣ ، القليوبية ٢١)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٦ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستين من الداخل هو .... (بورسعيد ٢٣ ، ج. سيناء ٢٣)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٧ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متداخلتين هو .... (أسيوط ٢٣)

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) صفر

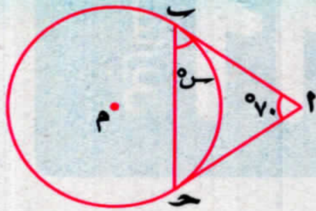
٨ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متقاطعتين هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٩ عدد المماسات التى يمكن رسمها من نقطة تقع على دائرة يساوى .... (البحيرة ٢٤)

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) عدد لا نهائى.

١٠ في الشكل المقابل :

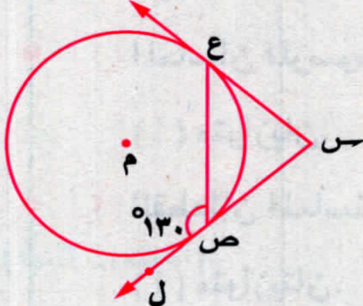


إذا كانت : $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أحـ}}$ قطعتين مماستين للدائرة م

، ق (∠ أ) = ٧٠° فإن : س = …………

(أ) ٥٠° (ب) ٥٥° (جـ) ٦٠° (د) ٧٠°

١١ في الشكل المقابل :



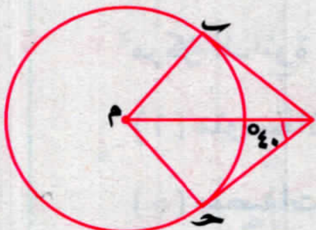
$\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{س ع}}$ مماسان للدائرة عند ص ، ع

، ق (∠ ل ص ع) = ١٣٠°

فإن : ق (∠ س) = ………… (سوهاج ٠٩)

(أ) ٥٠° (ب) ٦٥° (جـ) ٨٠° (د) ١٠٠°

١٢ في الشكل المقابل :



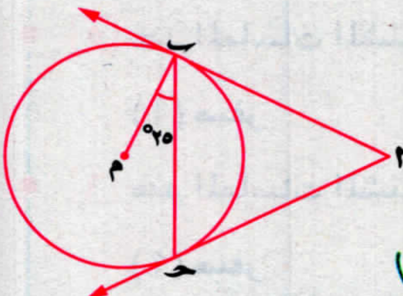
إذا كانت : $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أحـ}}$ قطعتين مماستين للدائرة م

، ق (∠ م أ حـ) = ٤٠°

فإن : ق (∠ حـ أ ب) = ………… (دمياط ٠٤)

(أ) ٨٠° (ب) ٥٠° (جـ) ٤٠° (د) ٢٠°

١٣ في الشكل المقابل :



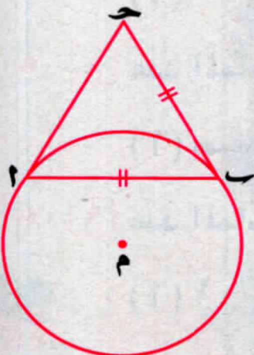
إذا كان : $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$ مماسين للدائرة م

، ق (∠ حـ ب م) = ٢٥°

فإن : ق (∠ ب أ حـ) = ………… (قنا ١٢)

(أ) ٧٥° (ب) ٥٠° (جـ) ٢٥° (د) ١٢° ٣٠َ

١٤ في الشكل المقابل :



$\overline{\text{حـ ب}}$ ، $\overline{\text{حـ أ}}$ مماستان للدائرة م ، حـ ب = ب أ

فإن : ق (∠ حـ) = ………… (السويس ٠٨)

(أ) ٦٠° (ب) ١٢٠°

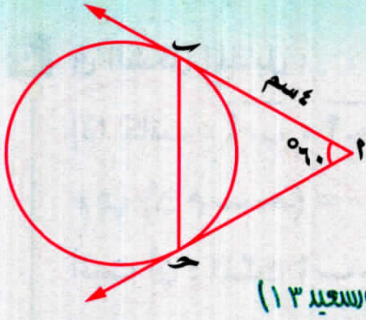
(جـ) ٩٠° (د) ١٠٠°

15 في الشكل المقابل :

$\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أحـ}$ مماسان ، ق (∠ أ) = ٦٠°

فإذا كان : طول $\overline{أب}$ = ٤ سم

فإن : طول $\overline{بحـ}$ = ...

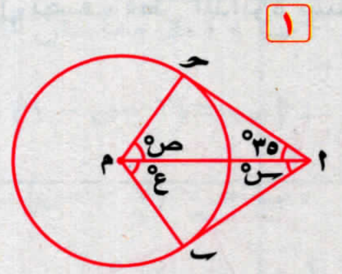


(ش. سيناء ١٥ ، بورسعيد ١٣)

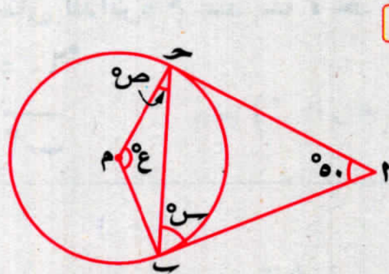
(أ) ٣ سم (ب) ٤ سم (جـ) ٥ سم (د) ٨ سم

٢ في كل من الأشكال الآتية $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م ، أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس :

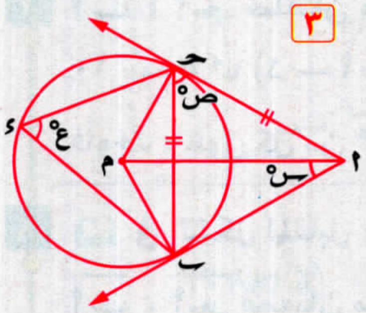
١



٢

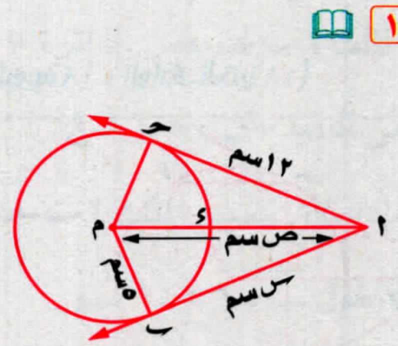


٣



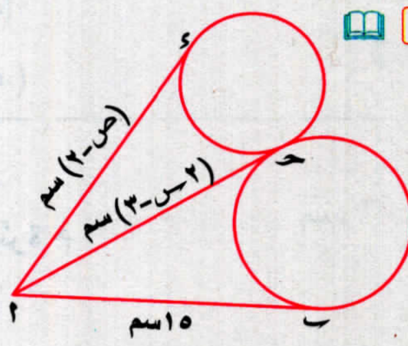
٣ مستعينًا بمعطيات الشكل أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس :

١



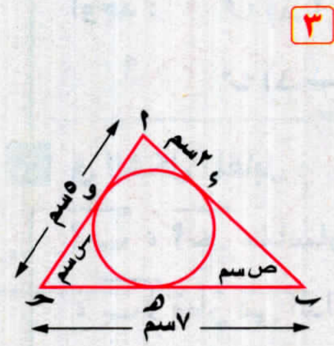
(الوادي الجديد ١٢)

٢

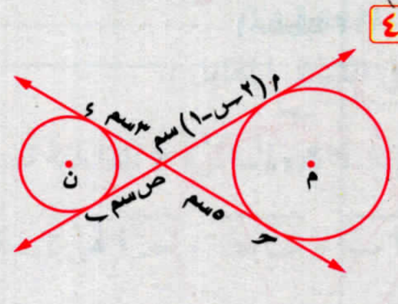


(ش. سيناء ٢٣ ، الإسماعيلية ١٩)

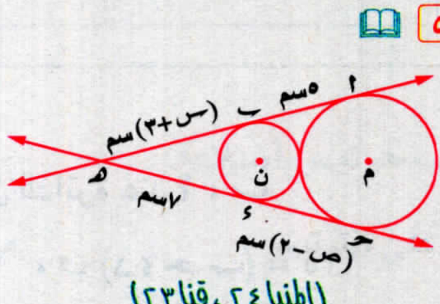
٣



٤

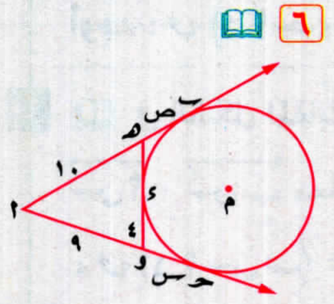


٥



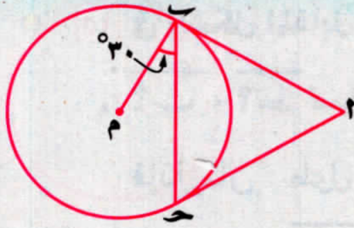
(المنيا ٢٤ ، قنا ٢٣)

٦



٤ أثبت أن القطعتين المماستين المرسومتين من نقطة خارج الدائرة متساويتان في الطول. (كفر الشيخ ١٥)

٥ فى الشكل المقابل :



إذا كانت : $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أحـ}}$ قطعتين مماستين للدائرة م

، ق (∠ م ب حـ) = ٣٠°

أثبت أن : المثلث أ ب حـ متساوى الأضلاع.

(كفر الشيخ ١١)

---

٦ دائرتان م ، ن متماستان من الداخل فى ب ، $\overleftrightarrow{\text{ب أ}}$ مماس للدائرتين ، رسم $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ مماسًا للدائرة م عند ء ، ورسم $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ مماسًا للدائرة ن عند حـ أثبت أن : أ ء = أ حـ

---

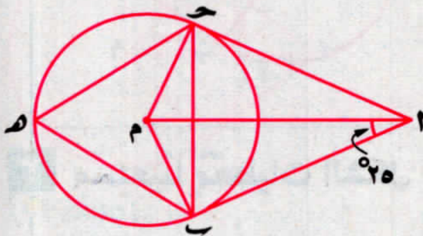
٧ $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أحـ}}$ قطعتان مماستان للدائرة م عند ب ، حـ ، فإذا كان طول نصف قطر الدائرة يساوى ١٠ سم ، ق (∠ ب أ حـ) = ٦٠°

فأوجد : طول كل من $\overline{\text{أم}}$ ، $\overline{\text{أب}}$

« ٢٠ سم ، ١٠ $\sqrt{٣}$ سم »

---

٨ فى الشكل المقابل :



$\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أحـ}}$ قطعتان مماستان للدائرة م

، ق (∠ ب أ م) = ٢٥° ، هـ ∈ $\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$ الأكبر

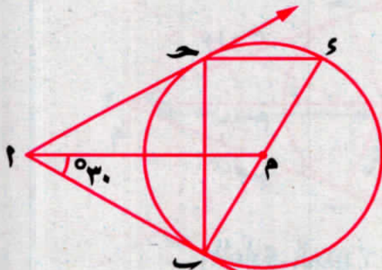
أوجد : **١** ق (∠ أ حـ ب)

٢ ق (∠ ب هـ حـ)

(القليوبية ١٨ ، الوادى الجديد ١٨) « ٦٥° ، ٦٥° »

---

٩ فى الشكل المقابل :



$\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ مماسان للدائرة م

، $\overline{\text{ب ء}}$ قطر فى الدائرة م

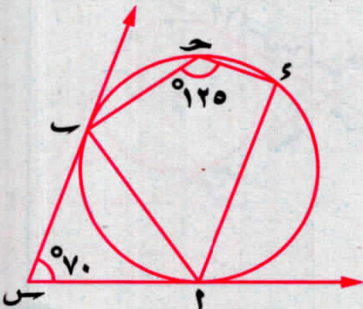
، ق (∠ م أ ب) = ٣٠°

أوجد : ق (∠ أ حـ ء)

(الشرقية ١٣) « ١٥٠° »

---

١٠ فى الشكل المقابل :



$\overrightarrow{\text{س أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{س ب}}$ مماسان للدائرة عند أ ، ب

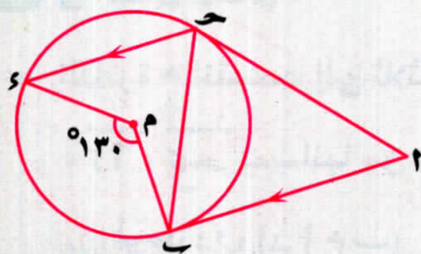
، ق (∠ أ س ب) = ٧٠° ، ق (∠ ء حـ ب) = ١٢٥°

أثبت أن : **١** $\overrightarrow{\text{أب}}$ ينصف ∠ ء أ س

٢ $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ // $\overleftrightarrow{\text{س ب}}$

(الغربية ٢٤ ، الجيزة ٢٣ ، أسيوط ١٨ ، الأقصر ١٦ ، قنا ١٦)

١١ في الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م

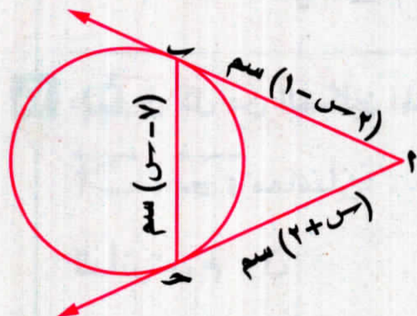
، $\overline{أب}$ // $\overline{حـ ء}$ ، ق (∠ب م ء) = ١٣٠°

[١] أثبت أن : $\overleftarrow{حـ ب}$ ينصف ∠ أحـ ء

[٢] أوجد : ق (∠ أ) (الأقصر ٢٣ ، الوادى الجديد ١٩ ، مطروح ١٨ ، الفيوم ١٧ ، الغربية ١٦) « ٥٠° »

---

١٢ في الشكل المقابل :



$\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أحـ}$ مماسان للدائرة

، أب = (٢ س − ١) سم ، أحـ = (س + ٢) سم

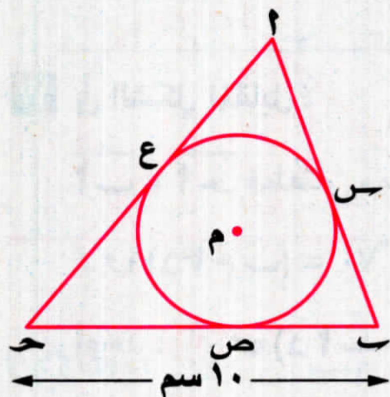
، ب حـ = (٧ − س) سم

أوجد : [١] قيمة س [٢] محيط Δ أب حـ

(ج. سيناء ٢٣) « ٣ ، ١٤ سم »

---

١٣ في الشكل المقابل :



المثلث أب حـ يمس الدائرة م من الخارج

في النقط س ، ص ، ع

فإذا كان محيط المثلث أب حـ يساوى ٣٠ سم

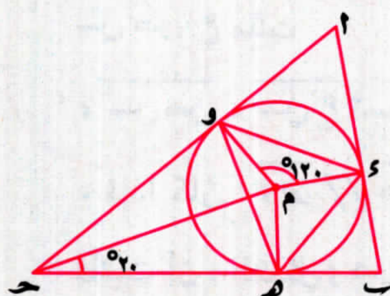
، طول $\overline{ب حـ}$ = ١٠ سم

أوجد طول : $\overline{أس}$

(الدقهلية ٢٣) « ٥ سم »

---

١٤ في الشكل المقابل :



إذا كانت الدائرة م الداخلة للمثلث أب حـ تمس أضلاعه

$\overline{أب}$ ، $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{حـ أ}$ في ء ، هـ ، و على الترتيب

، وكان : ق (∠ء م و) = ١٢٠° ، ق (∠هـ حـ م) = ٢٠°

فأوجد : قياسات زوايا Δ أب حـ

« ٤٠° ، ٦٠° ، ٨٠° »

١٥ في الشكل المقابل :

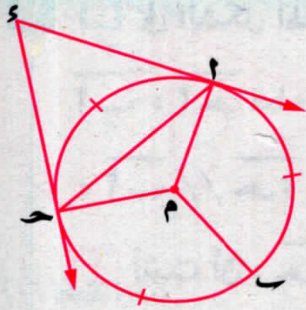
الدائرة م انقسمت إلى ثلاثة أقواس متساوية في الطول

، $\overleftarrow{ء أ}$ ، $\overleftarrow{ء حـ}$ يمسانها من ء

١ أوجد : ق (∠ أ م ب)

٢ أثبت أن : أولًا : الشكل أ م حـ ء رباعي دائري.

ثانيًا : △ أ حـ ء متساوي الأضلاع.



«١٢٠°»

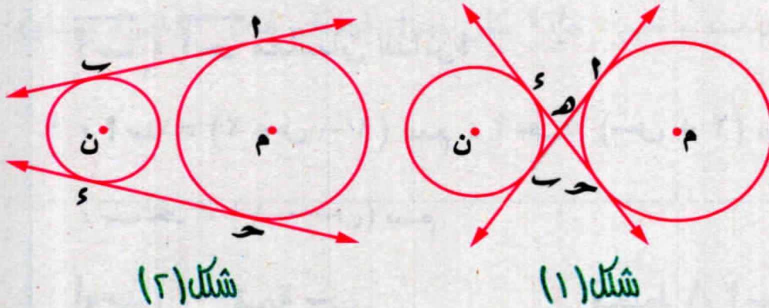
---

١٦ في كل من الشكلين المقابلين :

$\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{حـ ء}$ مماسان

للدائرتين م ، ن

أثبت أن : أ ب = حـ ء



(بورسعيد ١٣ ، السويس ١١)

---

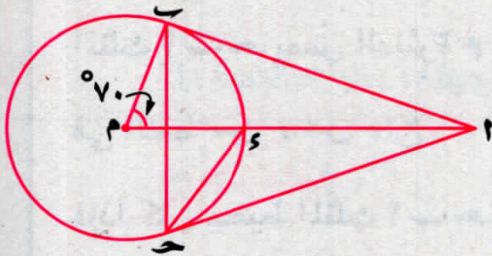
١٧ في الشكل المقابل :

$\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ حـ}$ قطعتان مماستان مرسومتان من نقطة أ

، ق (∠ أ م ب) = ٧٠°

أوجد : ١ ق (∠ أ ب حـ)

٢ ق (∠ أ حـ ء)



(الإسماعيلية ١٧) «٧٠° ، ٣٥°»

---

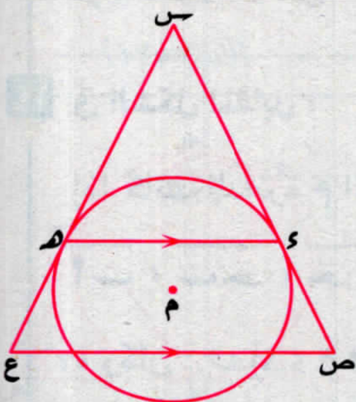
١٨ في الشكل المقابل :

س ص ع مثلث

، $\overline{س ص}$ ، $\overline{س ع}$ تمسان الدائرة م عند ء ، هـ

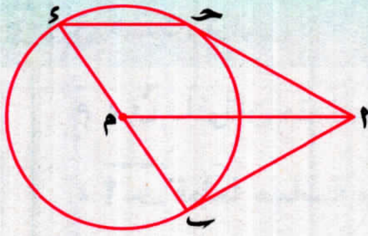
، فإذا كان : $\overline{ء هـ}$ // $\overline{ص ع}$

فأثبت أن : الشكل ء ص ع هـ رباعي دائري.



(الإسكندرية ٠٤)

١٩ 📖 **في الشكل المقابل :**



$\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أحـ}}$ قطعتان مماستان للدائرة م

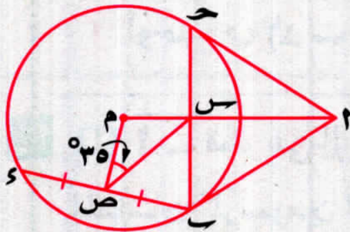
، $\overline{\text{بء}}$ قطر في الدائرة

أثبت أن : $\overline{\text{أم}}$ // $\overline{\text{حـ ء}}$

(المنوفية ١١)

---

٢٠ 📖 **في الشكل المقابل :**



$\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أحـ}}$ قطعتان مماستان للدائرة م عند ب ، حـ

، $\overline{\text{أم}} \cap \overline{\text{بحـ}} = \{\text{س}\}$ ، ص منتصف الوتر $\overline{\text{بء}}$

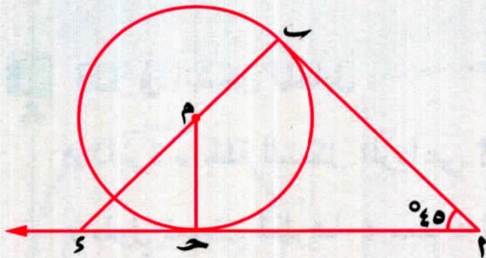
، ق (∠ س ص م) = ٣٥°

[١] أثبت أن : الشكل س ب ص م رباعي دائري.

[٢] أوجد : ق (∠ ب أ حـ) «٧٠°»

---

٢١ **في الشكل المقابل :**



$\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أحـ}}$ قطعتان مماستان للدائرة م

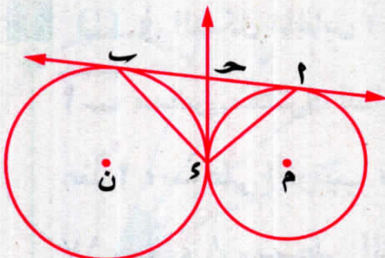
عند ب ، حـ على الترتيب

، ق (∠ أ) = ٤٥° ، $\overleftarrow{\text{بم}} \cap \overleftarrow{\text{أحـ}} = \{\text{ء}\}$

أثبت أن : [١] الشكل أ ب م حـ رباعي دائري. [٢] أ ء = أ ب + م ب (سوهاج ١٣)

---

٢٢ 📖 **في الشكل المقابل :**



م ، ن دائرتان متماستان من الخارج في ء

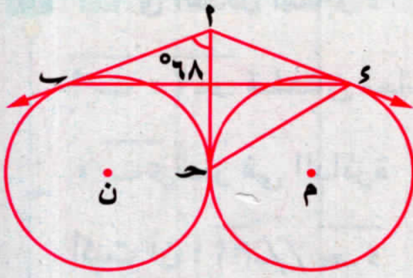
، $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماس مشترك لهما عند أ ، ب

، $\overleftarrow{\text{ءحـ}}$ مماس مشترك للدائرتين عند ء

حيث $\overleftarrow{\text{ءحـ}} \cap \overleftrightarrow{\text{أب}} = \{\text{حـ}\}$

أثبت أن : [١] حـ منتصف $\overline{\text{أب}}$ [٢] $\overline{\text{أء}} \perp \overline{\text{بء}}$ (الإسكندرية ١٤ ، ج.سيناء ١٢)

٢٣ **فى الشكل المقابل :**



م ، ن دائرتان متماستان من الخارج عند حـ

، $\overline{\text{أحـ}}$ قطعة مماسة مشتركة للدائرتين ، $\overleftarrow{\text{أء}}$ مماس للدائرة م عند ء

، $\overleftarrow{\text{أب}}$ مماس للدائرة ن عند ب ، ق (∠ب أ حـ) = ٦٨°

١ أثبت أن : أب = أء

٢ أوجد : ق (∠ب ء حـ) (الشرقية ٢٤) «٣٤°»

---

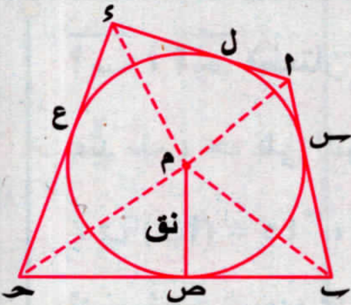
٢٤ $\overline{\text{أب}}$ قطر فى الدائرة م ، أب = ١٠ سم ، حـ ∈ الدائرة م ، رسم مماس للدائرة عند حـ فقطع المماسين المرسومين لها عند أ ، ب فى س ، ص على الترتيب حيث س ص = ١٣ سم

١ أثبت أن : $\overline{\text{س م}}$ ⊥ $\overline{\text{ص م}}$

٢ أوجد : مساحة الشكل أ س ص ب «٦٥ سم²»

للمتفوقين

١ **فى الشكل المقابل :**



م دائرة داخلة للشكل الرباعى أ ب حـ ء

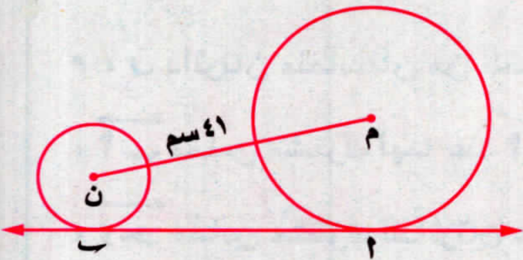
، طول نصف قطرها ٥ سم ، أ ب = ٩ سم ، حـ ء = ١٢ سم

أوجد : محيط الشكل أ ب حـ ء ثم احسب مساحته.

«٤٢ سم ، ١٠٥ سم²»

---

٢ **فى الشكل المقابل :**



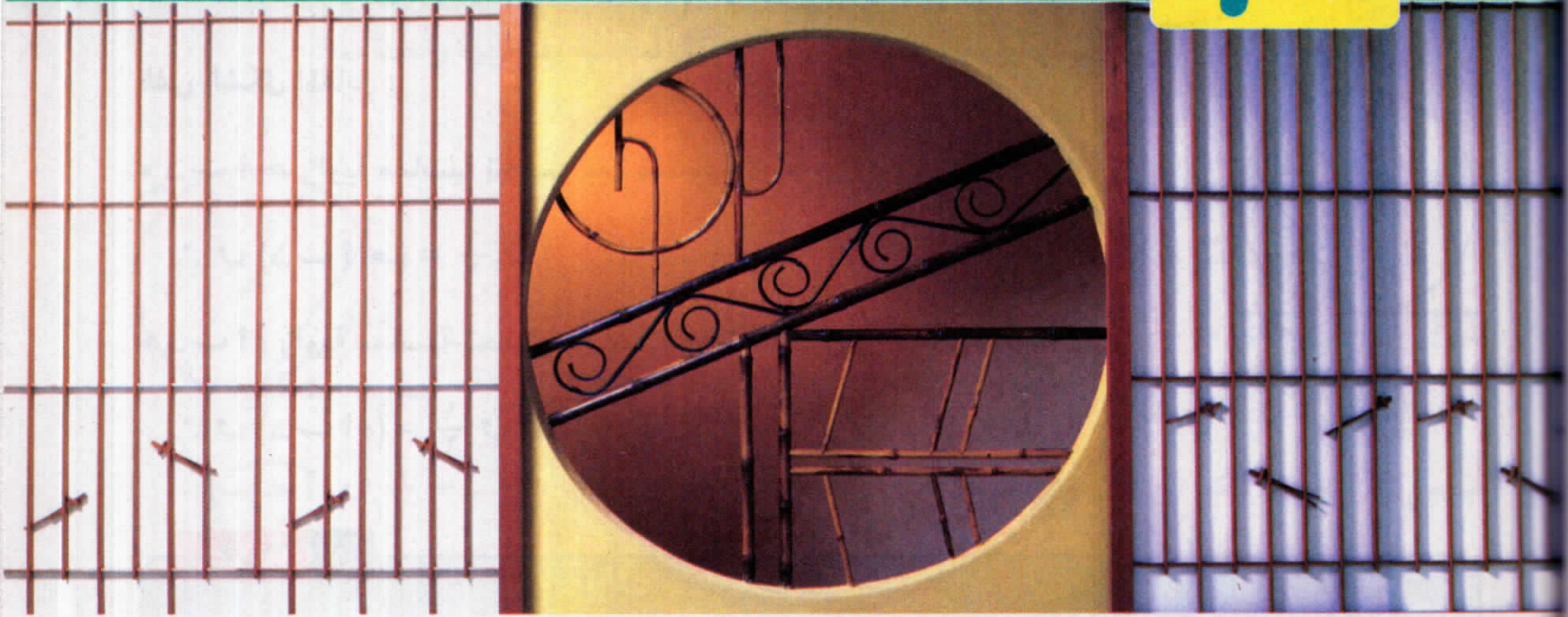
$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماس مشترك للدائرتين م ، ن من الخارج

عند أ ، ب على الترتيب ، طولا نصفى قطرى الدائرتين

١٧ سم ، ٨ سم على الترتيب ، م ن = ٤١ سم

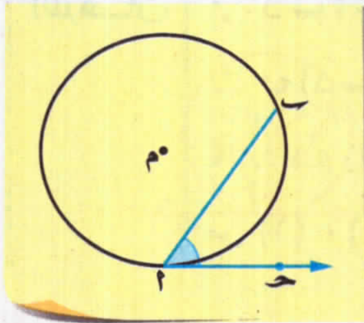
أوجد : طول $\overline{\text{أب}}$ «٤٠ سم»

الدرس 7 الزاوية المماسية



الزاوية المماسية

الزاوية المماسية هى الزاوية المكونة من اتحاد شعاعين أحدهما مماس للدائرة ، والآخر يحمل وترًا فى الدائرة يمر بنقطة التماس.



ففى الشكل المقابل :

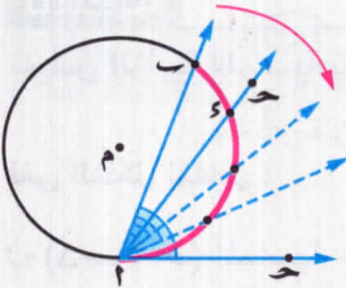
إذا كان : $\overleftarrow{\text{أحـ}}$ مماسًا للدائرة م عند أ

، $\overleftarrow{\text{أب}}$ يحمل الوتر $\overline{\text{أب}}$

، فإن : ∠ ب أ حـ زاوية مماسية فى الدائرة م وترها $\overline{\text{أب}}$

، ويسمى $\overline{\text{أب}}$ وتر التماس للزاوية المماسية ب أ حـ

قياس الزاوية المماسية



تعتبر الزاوية المماسية حالة خاصة من الزاوية المحيطية

، فإذا تصورنا أن الضلع $\overleftarrow{\text{أحـ}}$ للزاوية المحيطية ب أ حـ

دار حول أ فى اتجاه السهم كما بالشكل المقابل

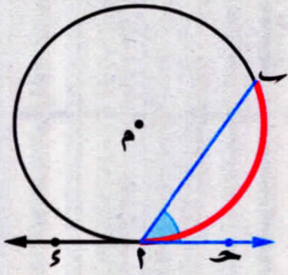
، فإن النقطة ء تقترب من النقطة أ حتى إذا انطبقت عليها أصبح $\overleftarrow{\text{أحـ}}$ مماسًا للدائرة.

ولما كانت الزاوية المحيطية تُقاس بنصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها

، فكذلك يكون قياس الزاوية المماسية.

أى أن : **قياس الزاوية المماسية = $\frac{1}{2}$ قياس القوس المصور بين ضلعيها.**

ففى الشكل المقابل :



- ∠ب أ حـ زاوية مماسية تحصر بين ضلعيها $\overset{\frown}{\text{أب}}$

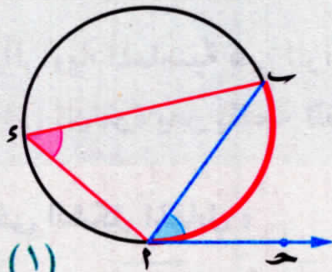
∴ ق(∠ب أ حـ) = $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{\text{أب}}$)

- ∠ب أ ء زاوية مماسية تحصر بين ضلعيها $\overset{\frown}{\text{أب}}$ الأكبر

∴ ق(∠ب أ ء) = $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{\text{أب}}$ الأكبر)

نظرية ٥

قياس الزاوية المماسية يساوى قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى القوس.



المعطيات ∠ب أ حـ زاوية مماسية ، ∠ء زاوية محيطية.

المطلوب إثبات أن : ق(∠ب أ حـ) = ق(∠ء)

البرهان ∵ ∠ب أ حـ زاوية مماسية.

∴ ق(∠ب أ حـ) = $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{\text{أب}}$) (١)

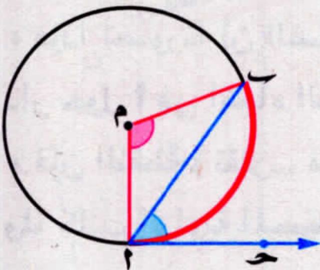
، ∵ ∠ء زاوية محيطية. ∴ ق(∠ء) = $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{\text{أب}}$) (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : ق(∠ب أ حـ) = ق(∠ء) (وهو المطلوب)

نتيجة

قياس الزاوية المماسية يساوى نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس.

ففى الشكل المقابل :



ق(∠ب أ حـ) المماسية = $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{\text{أب}}$)

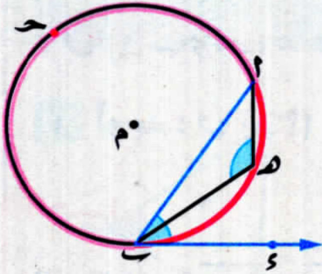
، ق(∠أ م ب) المركزية = ق($\overset{\frown}{\text{أب}}$)

∴ ق(∠ب أ حـ) المماسية = $\frac{1}{2}$ ق(∠أ م ب) المركزية.

! ملاحظـة

الزاوية المماسية تكمل الزاوية المحيطية المرسومة على وتر الزاوية المماسية وفى جهة واحدة منه.

ففى الشكل المقابل :



إذا كان : $\overleftarrow{\text{ب ء}}$ مماسًا للدائرة م ، هـ ∈ الدائرة م

فإن : ق (∠ أ ب ء) = $\frac{1}{2}$ ق ($\frown$ أ هـ ب) (١)

، ق (∠ أ هـ ب) = $\frac{1}{2}$ ق ($\frown$ أ ح ب) (٢)

بجمع (١) ، (٢) ينتج أن : ق (∠ أ ب ء) + ق (∠ أ هـ ب) = $\frac{1}{2}$ ق ($\frown$ أ هـ ب) + $\frac{1}{2}$ ق ($\frown$ أ ح ب)

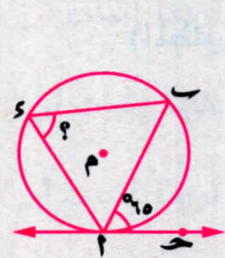
= $\frac{1}{2}$ [ق ($\frown$ أ هـ ب) + ق ($\frown$ أ ح ب)]

= $\frac{1}{2}$ × ٣٦٠° = ١٨٠°

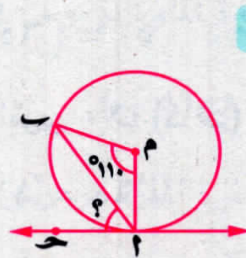
مثال ١

فى كل من الأشكال الآتية $\overleftrightarrow{\text{أ ح}}$ مماس للدائرة م ، أوجد قياس الزاوية المشار إليها بالعلامة (؟) :

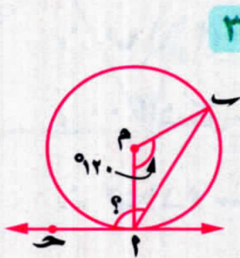
١



٢



٣



الحـــل

١ ق (∠ أ ء ب) = ق (∠ ب أ ح) = ٦٥° (محيطية ومماسية مشتركتان فى $\frown$ أ ب)

٢ ق (∠ ب أ ح) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ أ م ب) = ٥٥° (مماسية ومركزية مشتركتان فى $\frown$ أ ب)

٣ ∵ ق (∠ أ م ب المنعكسة) = ٣٦٠° − ١٢٠° = ٢٤٠°

∴ ق (∠ ب أ ح) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ أ م ب المنعكسة) = ١٢٠°

(مماسية ومركزية مشتركتان فى $\frown$ أ ب الأكبر)

مثال ٢

فى الشكل المقابل :

أب ، أحـ قطعتان مماستان للدائرة

، ق (∠ ب ء حـ) = ٦٥° ، ق (∠ هـ) = ١١٥°

١ أوجد : ق (∠ أ)   **٢** أثبت أن : ب حـ ينصف ∠ أ ب ء

الحل

المعطيات أب ، أحـ قطعتان مماستان للدائرة ، ق (∠ ب ء حـ) = ٦٥° ، ق (∠ هـ) = ١١٥°

المطلوب **١** إيجاد : ق (∠ أ)   **٢** إثبات أن : ب حـ ينصف ∠ أ ب ء

البرهان ∵ ق (∠ أ ب حـ) = ق (∠ ب ء حـ) (مماسية ومحيطية مشتركتان فى ب⌒حـ)

∴ ق (∠ أ ب حـ) = ٦٥° (١)

، ∵ أب ، أحـ قطعتان مماستان للدائرة.   ∴ أ ب = أ حـ

∴ فى Δ أ ب حـ : ق (∠ أ ب حـ) = ق (∠ أ حـ ب) = ٦٥°

∴ ق (∠ أ) = ١٨٠° − (٦٥° + ٦٥°) = ٥٠° (المطلوب أولاً)

، ∵ الشكل ب حـ هـ ء رباعى دائرى ، ق (∠ هـ) = ١١٥°

∴ ق (∠ ء ب حـ) = ١٨٠° − ١١٥° = ٦٥° (٢)

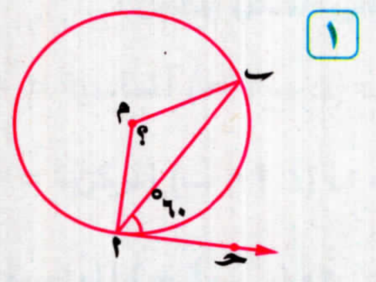
من (١) ، (٢) : ∴ ق (∠ أ ب حـ) = ق (∠ ء ب حـ)

∴ ب حـ ينصف ∠ أ ب ء (المطلوب ثانيًا)

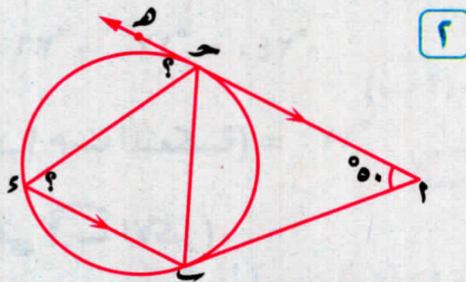
حاول بنفسك ١

فى كل مما يأتى أوجد قياس الزاوية المشار إليها بالعلامة (؟) :

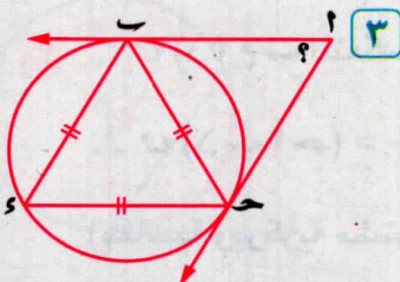
١



٢

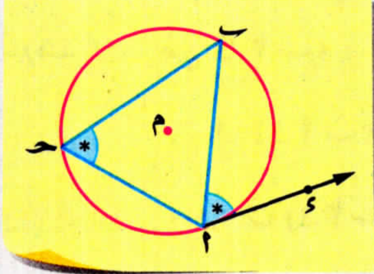


٣



عكس نظرية ٥

إذا رُسم شعاع من إحدى نقطتى النهاية لوتر فى دائرة بحيث كان قياس الزاوية المحصورة بين هذا الشعاع والوتر يساوى قياس الزاوية المحيطية المرسومة على نفس الوتر من الجهة الأخرى فإن هذا الشعاع يكون مماسًا للدائرة.



ففى الشكل المقابل :

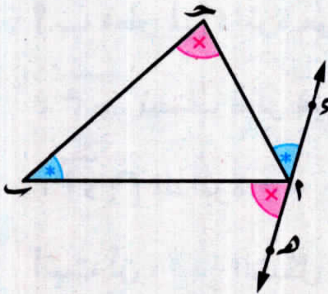
إذا كان : أب وترًا فى الدائرة م

، رُسم أء بحيث ق (∠ ب أ ء) = ق (∠ حـ)

فإن : أء مماس للدائرة م

ما الذى نستفيده من عكس نظرية (٥) ؟

يستخدم عكس نظرية (٥) لإثبات أن شعاعًا مرسومًا من أحد رءوس مثلث يكون مماسًا للدائرة المارة برءوس هذا المثلث.



- فإذا أردنا إثبات أن : أء مماس للدائرة المارة برءوس △ أ ب حـ

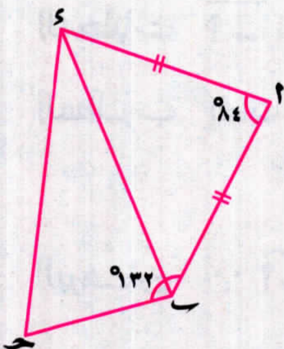
  فإن علينا إثبات أن : ق (∠ حـ أ ء) = ق (∠ ب) (١)

- وإذا أردنا إثبات أن : أهـ مماس للدائرة المارة برءوس △ أ ب حـ

  فإن علينا إثبات أن : ق (∠ ب أ هـ) = ق (∠ حـ) (٢)

- وإثبات أى من المتساويتين (١) ، (٢) يعنى أن ءهـ مماس للدائرة الخارجة للمثلث أ ب حـ

مثال ٣



فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : أ ب = أ ء

، ق (∠ أ) = ٨٤° ، ق (∠ أ ب حـ) = ١٣٢°

أثبت أن : ب حـ مماسة للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، ء

الحـل

المعطيات ا ب حـ ء شكل رباعى فيه :

ا ب = ا ء ، ق (∠ ا) = ٨٤° ، ق (∠ ا ب حـ) = ١٣٢°

المطلوب إثبات أن : $\overline{\text{ب حـ}}$ مماسة للدائرة المارة بالنقط ا ، ب ، ء

البرهان فى Δ ا ب ء : ∵ ا ب = ا ء ، ق (∠ ا) = ٨٤°

∴ ق (∠ ا ب ء) = ق (∠ ا ء ب) = $\frac{١٨٠° - ٨٤°}{٢}$ = ٤٨°

، ∵ ق (∠ ا ب حـ) = ١٣٢° ∴ ق (∠ ء ب حـ) = ١٣٢° - ٤٨° = ٨٤°

∴ ق (∠ ء ب حـ) = ق (∠ ا)

∴ $\overline{\text{ب حـ}}$ مماسة للدائرة المارة بالنقط ا ، ب ، ء (وهو المطلوب)

مثال ٤

فى الشكل المقابل :

$\overline{\text{ا ب}}$ قطر فى دائرة مركزها م

، $\overline{\text{م حـ}}$ نصف قطر فيها عمودى على $\overline{\text{ا ب}}$ ، ء ∈ $\overleftarrow{\text{م حـ}}$

، $\overline{\text{ا ء}}$ ∩ الدائرة م = {هـ} ، $\overline{\text{ب هـ}}$ ∩ $\overline{\text{م حـ}}$ = {ن}

أثبت أن : ١ الشكل ء هـ م ب رباعى دائرى.

٢ $\overleftrightarrow{\text{هـ م}}$ مماس للدائرة المارة برءوس المثلث ن ء هـ

الحـل

المعطيات $\overline{\text{ا ب}}$ قطر فى الدائرة م ، $\overleftarrow{\text{ء م}}$ ⊥ $\overline{\text{ا ب}}$

المطلوب إثبات أن : ١ الشكل ء هـ م ب رباعى دائرى.

٢ $\overleftrightarrow{\text{هـ م}}$ مماس للدائرة المارة برءوس المثلث ن ء هـ

البرهان ∵ $\overline{\text{ا ب}}$ قطر فى الدائرة م ∴ ق (∠ ا هـ ب) = ٩٠°

∴ ق (∠ ب هـ ء) = ٩٠°

∴ ق (∠ ب هـ ء) = ق (∠ ب م ء) = ٩٠°

وهما مرسومتان على $\overline{\text{ب ء}}$ وفى جهة واحدة منها.

∴ الشكل ء هـ م ب رباعى دائرى. (المطلوب أولًا)

∴ ق (∠ هـ ء م) = ق (∠ هـ ب م) مرسومتان على $\overline{\text{م هـ}}$ وفى جهة واحدة منها

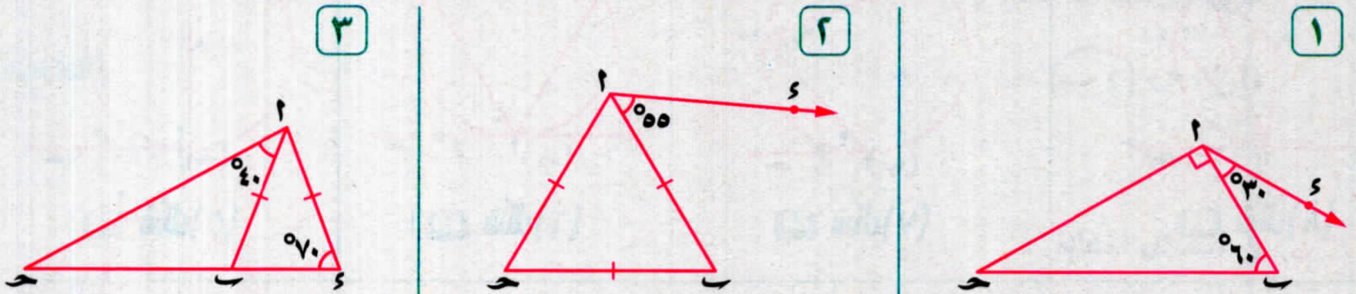
، لكن ق (∠ هـ ب م) = ق (∠ م هـ ب) لأن م ب = م هـ = نق

∴ ق (∠ م هـ ب) = ق (∠ هـ ء م)

∴ $\overleftrightarrow{\text{هـ م}}$ مماس للدائرة المارة برءوس المثلث ن ء هـ (المطلوب ثانيًا)

حاول بنفسك ٢

فى كل من الأشكال الآتية بين هل $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، حـ أم لا :



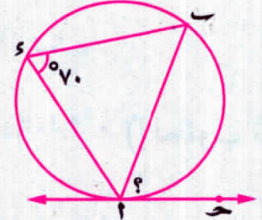
تمارين 12 على الزاوية المماسة



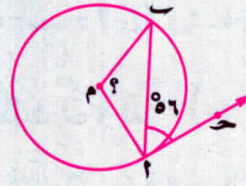
● تذكر ● فهم ● تطبيق ● حل مشكلات 📖 أسئلة كتاب الوزارة

أولًا مسائل على نظرية (٥) ونتيجتها

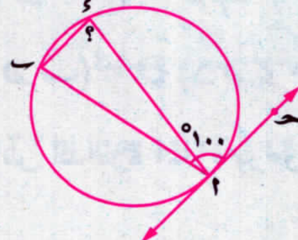
١ فى كل مما يأتى أوجد قياس الزاوية المشار إليها بالعلامة (؟) علمًا بأن $\overleftrightarrow{أ حـ}$ يمس الدائرة م عند أ :



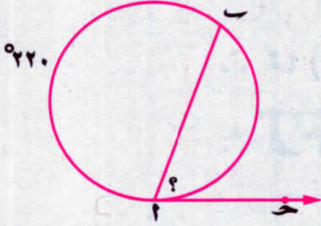
شكل (١)



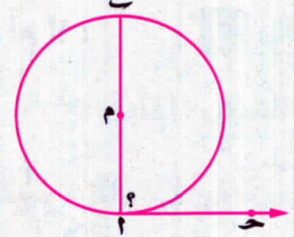
شكل (٢)



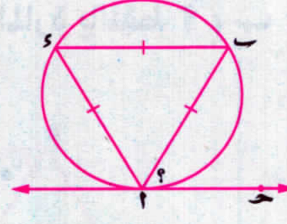
📖 شكل (٣)



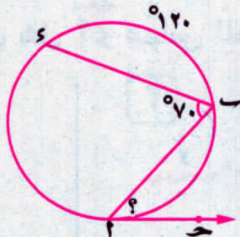
شكل (٤)



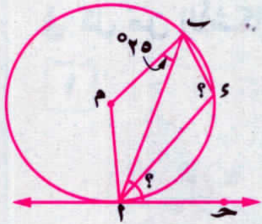
📖 شكل (٥)



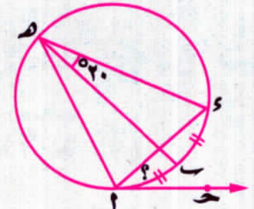
📖 شكل (٦)



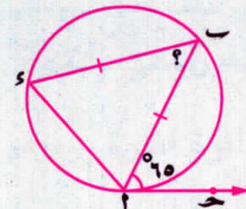
📖 شكل (٧)



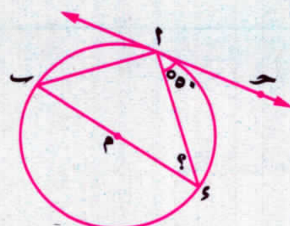
📖 شكل (٨)



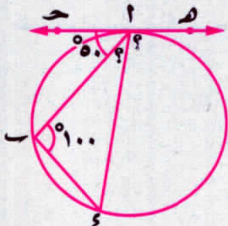
شكل (٩)



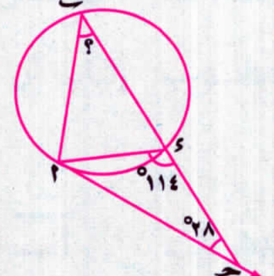
شكل (١٠)



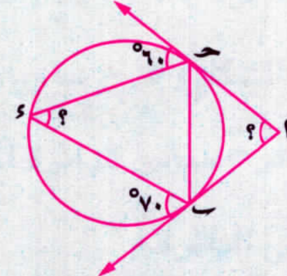
شكل (١١)



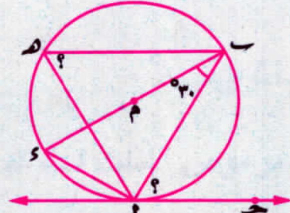
شكل (١٢)



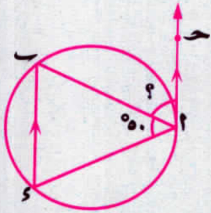
شكل (١٣)



📖 شكل (١٤)



📖 شكل (١٥)



شكل (١٦)

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ الزاوية المماسية هى زاوية محصورة بين .... (الوادى الجديد ٢٣ ، ج. سيناء ٢١)

(أ) وترين. (ب) مماسين. (جـ) وتر ومماس. (د) وتر وقطر.

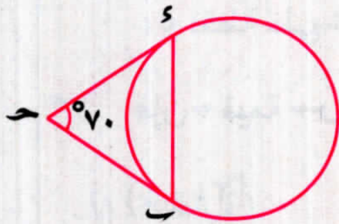
٢ قياس الزاوية المماسية يساوى .... قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس.

(أ) نصف (ب) ضعف (جـ) ثلث (د) ربع

٣ إذا كان قياس زاوية مماسية يساوى ٧٠° ، فإن قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس يساوى .... (القليوبية ١٦ ، أسوان ١٣)

(أ) ٣٥° (ب) ٧٠° (جـ) ١٤٠° (د) ١٠٥°

٤ فى الشكل المقابل :



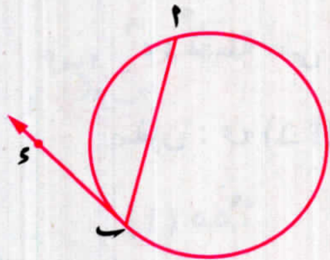
حـ ب ، حـ ء مماستان للدائرة فى ب ، ء

، ق (∠ حـ) = ٧٠°

فإن : ق (ء ب⌢) = ... (الدقهلية ١٧)

(أ) ١٨٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٠٠° (د) ١١٠°

٥ فى الشكل المقابل :



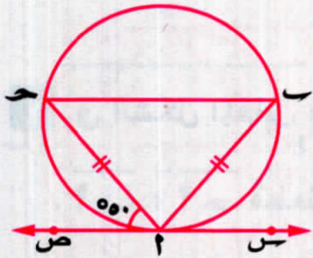
ب ء يمس الدائرة

، ق (أ ب⌢) = $\frac{1}{3}$ قياس الدائرة

فإن : ق (∠ أ ب ء) = ... (المنوفية ١٥)

(أ) ٦٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ٣٠°

٦ فى الشكل المقابل :



إذا كان : أ ب = أ حـ

، ق (∠ ص أ حـ) = ٥٠°

فإن : ق (ب حـ⌢) = ... (القاهرة ٠٤)

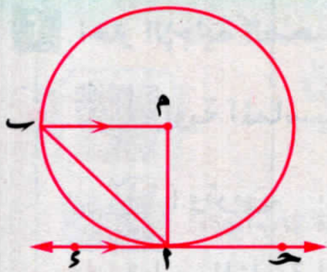
(أ) ٥٠° (ب) ١٠٠° (جـ) ٨٠° (د) ١٦٠°

٧ في الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{حـ ء}$ مماس للدائرة م عند أ

، $\overline{م ب}$ // $\overleftrightarrow{حـ ء}$

فإن : ق (∠ب أ ء) = ...



(بورسعيد ٠٦)

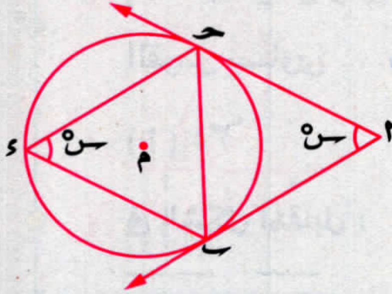
(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

٨ في الشكل المقابل :

$\overrightarrow{أ ب}$ ، $\overrightarrow{أ حـ}$ مماسان للدائرة م

، ء نقطة على الدائرة

فإن : قيمة س = ...



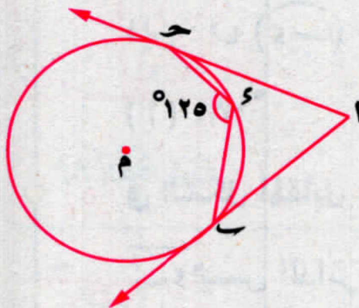
(أ) ٢٠° (ب) ٣٠° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

٩ في الشكل المقابل :

$\overrightarrow{أ ب}$ ، $\overrightarrow{أ حـ}$ مماسان للدائرة م

، ء نقطة على الدائرة بحيث ق (∠حـ ء ب) = ١٢٥°

فإن : ق (∠أ) = ...



(أ) ٥٥° (ب) ٦٠° (جـ) ٧٠° (د) ٨٠°

---

٣ أثبت أن قياس الزاوية المماسية يساوى قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس.

(مطروح ١٧)

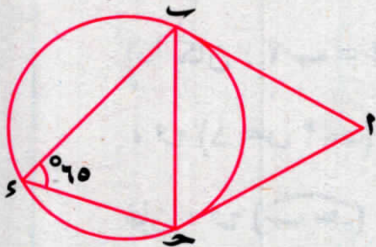
---

٤ في الشكل المقابل :

$\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ حـ}$ قطعتان مماستان للدائرة عند ب ، حـ

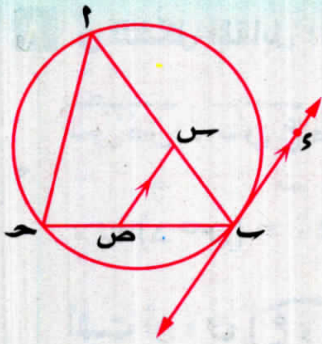
، ق (∠ب ء حـ) = ٦٥°

أوجد بالبرهان : ق (∠ب أ حـ)



(الإسماعيلية ٢٥ ، المنوفية ٢٤ ، ش.سيناء ٢٣ ، ج.سيناء ١٧) « ٥٠° »

٥ في الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة ، مماس للدائرة عند ب

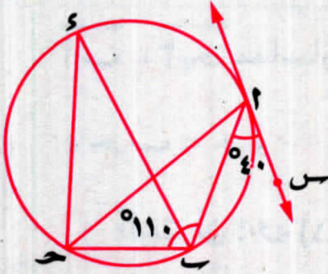
، س ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ ، ص ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$ حيث $\overline{\text{س ص}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$

أثبت أن : الشكل أ س ص حـ رباعي دائري.

(كفر الشيخ ٢٤ ، الغربية ٢٣ ، أسيوط ١٩ ، كفر الشيخ ١٨ ، القاهرة ١٧)

---

٦ في الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{\text{أ س}}$ مماس

، ق (∠ س أ ب) = ٤٠°

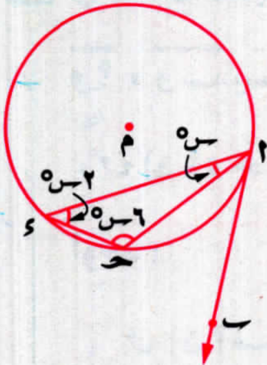
، ق (∠ أ ب حـ) = ١١٠°

أوجد : ق (∠ حـ ء ب)

(كفر الشيخ ١١) «٣٠°»

---

٧ في الشكل المقابل :



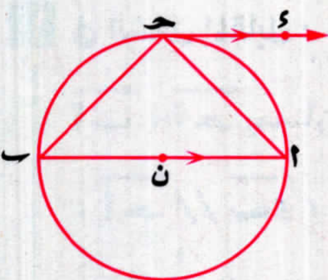
$\overrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة م

أوجد : ق (∠ ب أ حـ)

(الوادي الجديد ١٧) «٤٠°»

---

٨ في الشكل المقابل :



$\overline{\text{أ ب}}$ قطر في دائرة ن محيطها ٤٤ سم

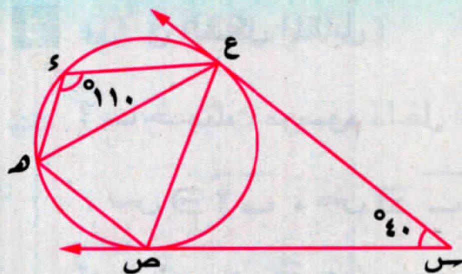
، $\overrightarrow{\text{حـ ء}}$ مماس لها عند حـ ، $\overrightarrow{\text{حـ ء}}$ // $\overline{\text{ب أ}}$

أوجد مع البرهان :

١ ق (∠ ء حـ أ) **٢** طول $\overset{\frown}{\text{أ حـ}}$

(الفيوم ١٣) «٤٥° ، ١١ سم»

٩ في الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{سص}$ ، $\overleftrightarrow{سع}$ مماسان للدائرة من نقطة س

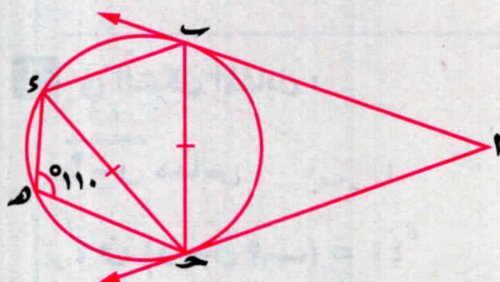
، ق (∠ س) = ٤٠° ، ق (∠ ء) = ١١٠°

أثبت أن : ق ($\overset{\frown}{ع ء هـ}$) = ق ($\overset{\frown}{ع ص}$)

(أسيوط ١٧ ، الغربية ١٧)

---

١٠ في الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أحـ}$ مماسان للدائرة عند ب ، حـ

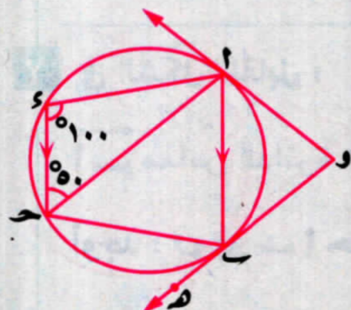
، حـ ب = حـ ء

1. أثبت أن : ق (∠ أ ب حـ) = ق (∠ ء ب حـ)
2. إذا كان : ق (∠ حـ هـ ء) = ١١٠° أوجد : ق (∠ أ)

«٤٠°»

---

١١ في الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{وأ}$ ، $\overleftrightarrow{وب}$ يمسان الدائرة عند أ ، ب ، $\overline{أب}$ // $\overline{حـ ء}$

، ق (∠ أ ء حـ) = ١٠٠° ، ق (∠ أ حـ ء) = ٥٠°

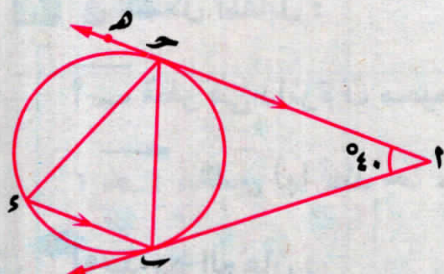
أوجد :

1. ق (∠ أ ب حـ)
2. ق (∠ حـ ب هـ)
3. ق (∠ أ و ب)

«٨٠° ، ٥٠° ، ٨٠°»

---

١٢ في الشكل المقابل :



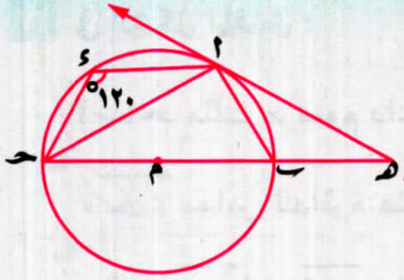
$\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أحـ}$ يمسان الدائرة عند ب ، حـ

، $\overleftrightarrow{أحـ}$ // $\overline{ب ء}$ ، ق (∠ أ) = ٤٠°

1. أوجد بالبرهان : ق (∠ أ حـ ب) ، ق (∠ هـ حـ ء)
2. أثبت أن : حـ ب = حـ ء

(الغربية ٠٤) «٧٠° ، ٧٠°»

١٣ في الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{هـ أ}$ مماس للدائرة م

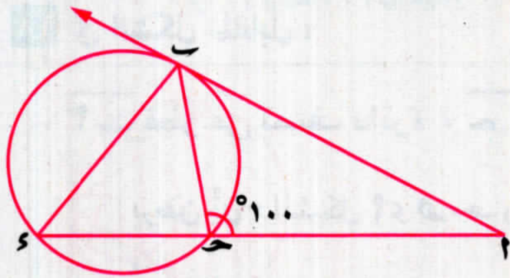
، رسم $\overrightarrow{هـ م}$ يقطع الدائرة في ب ، حـ

، ق (∠ أ ء حـ) = ١٢٠°

أثبت أن : [١] ب أ = ب هـ [٢] ق (∠ أ ب هـ) = ق (∠ هـ أ حـ) (دمياط ٠٩)

---

١٤ في الشكل المقابل :



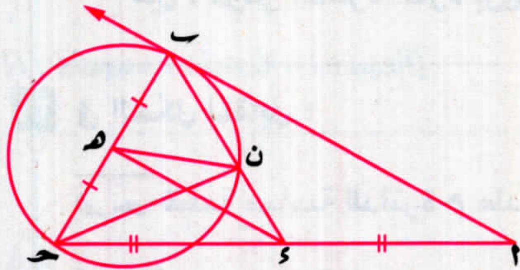
$\overleftrightarrow{أ ب}$ مماس للدائرة عند ب ، ء ∈ $\overrightarrow{أ حـ}$

، ق (∠ أ حـ ب) = ١٠٠°

أوجد : ق (∠ أ ب ء) «١٠٠°»

---

١٥ في الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{أ ب}$ مماس للدائرة ، $\overline{أ حـ}$ قاطع لها ، ء منتصف $\overline{أ حـ}$

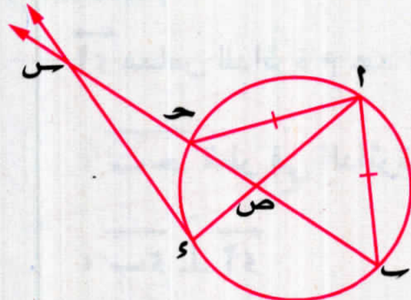
، هـ منتصف $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{ب ء}$ ∩ الدائرة = {ن}

أثبت أن : [١] $\overline{أ ب}$ // $\overline{ء هـ}$

[٢] النقط ن ، ء ، حـ ، هـ تمر بها دائرة واحدة. (بورسعيد ١٥)

---

١٦ في الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة فيه : أ ب = أ حـ

، ء ∈ $\overset{\frown}{ب حـ}$ ، رسم $\overleftrightarrow{ء س}$ مماسًا للدائرة عند ء

حيث $\overleftrightarrow{ء س}$ ∩ $\overleftrightarrow{ب حـ}$ = {س} ، $\overline{أ ء}$ ∩ $\overline{ب حـ}$ = {ص}

أثبت أن : س ص = س ء

17 في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة

، $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ مماس للدائرة عند حـ

، رُسم $\overleftarrow{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{أ حـ}}$ قطع $\overline{\text{أ ب}}$ في هـ

أثبت أن : ب هـ حـ ء شكل رباعي دائري.


(المنيا ٠٩)

---

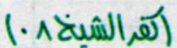
18 في الشكل المقابل :

$\overline{\text{أ ب}}$ قطر في نصف دائرة ، $\overleftarrow{\text{حـ و}}$ مماس لها عند حـ ، $\overleftarrow{\text{ء و}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$

[١] برهن أن : الشكل أ ء هـ حـ رباعي دائري.

[٢] برهن أن : Δ و حـ هـ متساوي الساقين.

[٣] عيّن : مركز الدائرة المارة برؤوس الشكل أ ء هـ حـ

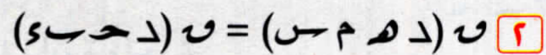

(كفر الشيخ ٠٨)

---

19 في الشكل المقابل :

$\overline{\text{هـ حـ}}$ قطعة مماسة للدائرة م عند حـ ، س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

أثبت أن : [١] الشكل هـ حـ م س رباعي دائري.


[٢] ق (∠ هـ م س) = ق (∠ حـ ب ء)

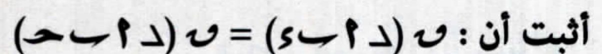
---

20 في الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ مماس للدائرة م عند أ

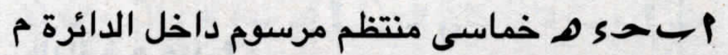
، $\overline{\text{ب حـ}}$ قطر في الدائرة م

، $\overline{\text{ب ء}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$


أثبت أن : ق (∠ أ ب ء) = ق (∠ أ ب حـ)

(بورسعيد ٠٦)

٢١ **فى الشكل المقابل :**



أ ب حـ ء هـ خماسى منتظم مرسوم داخل الدائرة م

، $\overleftrightarrow{\text{أس}}$ مماس للدائرة عند أ

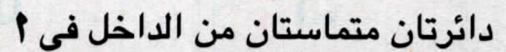
، $\overleftrightarrow{\text{هـ س}}$ مماس للدائرة عند هـ

حيث $\overleftrightarrow{\text{أس}} \cap \overleftrightarrow{\text{هـ س}} = \{\text{س}\}$

أوجد : [١] ق (أ⌒هـ) [٢] ق (∠ أ س هـ) (البحيرة ١٩ ، مطروح ١١) «٧٢° ، ١٠٨°»

---

٢٢ **فى الشكل المقابل :**



دائرتان متماستان من الداخل فى أ

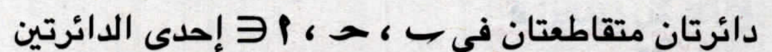
، $\overleftrightarrow{\text{أس}}$ مماس مشترك لهما عند أ ،

$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ يقطعان الدائرة الصغرى فى ب ، ء ويقطعان الدائرة الكبرى فى حـ ، هـ

أثبت أن : $\overline{\text{ءب}}$ // $\overline{\text{هـ حـ}}$ (الغربية ١٥ ، المنوفية ١٤ ، سوهاج ١٣)

---

٢٣ **فى الشكل المقابل :**



دائرتان متقاطعتان فى ب ، حـ ، أ ∈ إحدى الدائرتين

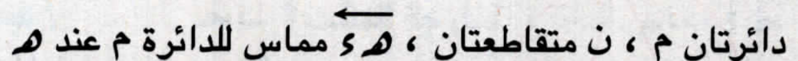
، رُسم $\overleftrightarrow{\text{أو}}$ مماسًا لها عند أ ثم رُسم $\overrightarrow{\text{أب}}$

، $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ يقطعان الدائرة الأخرى فى ء ، هـ

أثبت أن : $\overleftrightarrow{\text{أو}}$ // $\overline{\text{ءهـ}}$ (كفر الشيخ ٠٩)

---

٢٤ **فى الشكل المقابل :**



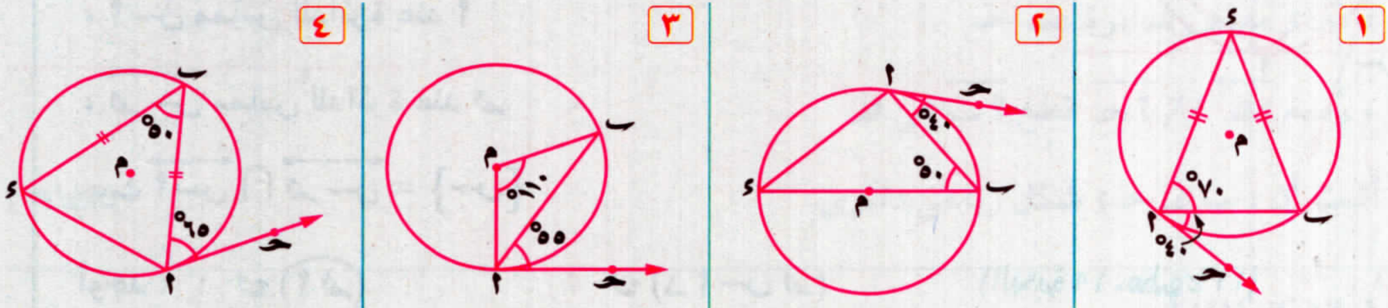
دائرتان م ، ن متقاطعتان ، $\overrightarrow{\text{هـ ء}}$ مماس للدائرة م عند هـ

، $\overrightarrow{\text{حـ ء}}$ مماس للدائرة ن عند حـ

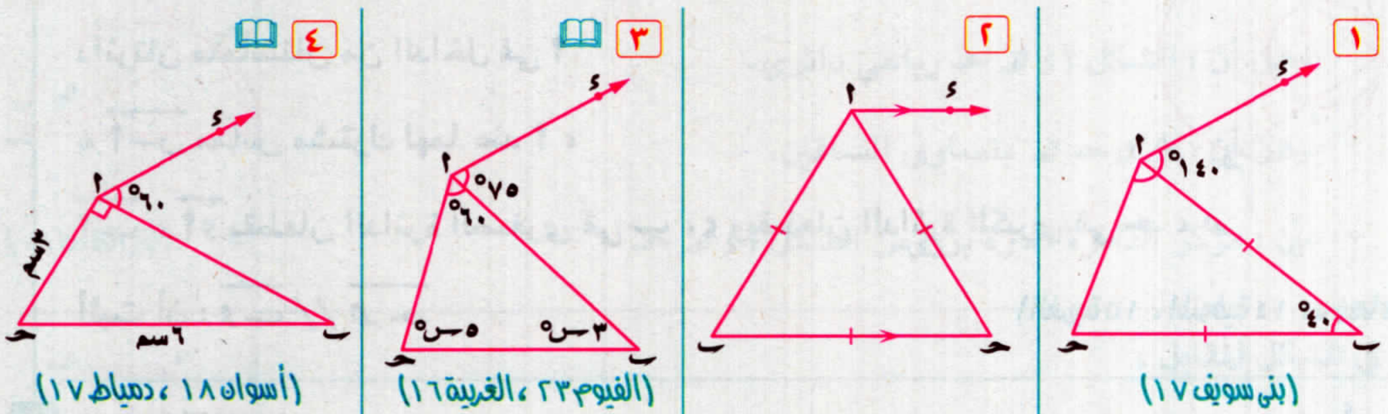
برهن أن : الشكل أ هـ ء حـ رباعى دائرى. (الفيوم ٢٤)

ثانيًا مسائل على عكس نظرية (٥)

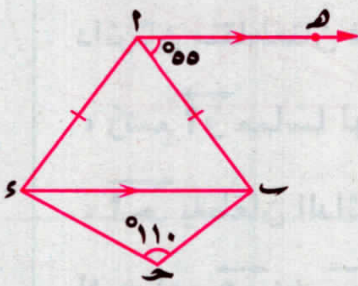
١ في كل من الأشكال الآتية أثبت أن $\overleftrightarrow{أحـ}$ يمس الدائرة م عند أ :



٢ في كل من الأشكال الآتية أثبت أن $\overleftrightarrow{أء}$ مماس للدائرة التي تمر برؤوس △ أ ب حـ :



٣ في الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{أهـ}$ // $\overline{ءب}$ ، ق (∠ب أ هـ) = °٥٥

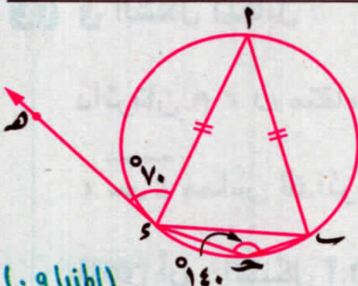
، ق (∠حـ) = °١١٠ ، أ ب = أ ء

أثبت أن : ١ الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري.

٢ $\overleftrightarrow{أهـ}$ مماس للدائرة المارة برؤوس الشكل أ ب حـ ء

(البحيرة ٠٥)

٤ في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة فيه : أ ب = أ ء

، ق (∠حـ) = °١٤٠ ، ق (∠أ ء هـ) = °٧٠

أثبت أن : $\overleftrightarrow{ءهـ}$ مماس للدائرة عند ء

(المنيا ٠٩)

٥ ا ب ح ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة ، هـ نقطة خارجها ، $\overrightarrow{هـ ا}$ ، $\overleftarrow{هـ ب}$ مماسان للدائرة عند ا ، ب فإذا كان ق (∠ ا هـ ب) = ٧٠° ، ق (∠ ا ء ح) = ١٢٥° أثبت أن :

[١] ا ب = ا ح [٢] $\overleftrightarrow{ا ح}$ مماس للدائرة المارة بالنقط ا ، ب ، هـ (الإسكندرية ١٧)

---

٦ فى الشكل المقابل :

$\overline{ء ا}$ ، $\overline{ء ب}$ قطعتان مماستان للدائرة م عند ا ، ب

، ح ∈ الدائرة م بحيث ا ب = ا ح

أثبت أن : $\overleftrightarrow{ا ح}$ مماس للدائرة المارة برؤوس Δ ا ب ء

(الجيزة ٢٣ ، الإسكندرية ١٨ ، القاهرة ١٧)

---

٧ فى الشكل المقابل :

أثبت أن :

$\overleftrightarrow{ا ب}$ مماس للدائرة المارة برؤوس Δ ا ء ح

(المنيا ٢٣)

---

٨ فى الشكل المقابل :

$\overline{ح ء}$ قطر فى الدائرة م ، ق (∠ ب) = ٢٠°

، ق (∠ ا ح ء) = ٣٥°

أثبت أن : $\overleftrightarrow{ب ا}$ مماس للدائرة عند ا

---

٩ ا ب ح ء متوازى أضلاع فيه : ا ح = ب ح أثبت أن :

$\overleftrightarrow{ح ء}$ مماس للدائرة الخارجة للمثلث ا ب ح (دمياط ١٩ ، القليوبية ١٨ ، بورسعيد ١٧ ، الإسماعيلية ١٦)

---

١٠ $\overline{ا ب}$ ، $\overline{ا ح}$ وتران فى دائرة حيث ا ب = ا ح ، ء ∈ $\overline{ب ح}$ ، رسم $\overrightarrow{ا ء}$ فقطع الدائرة فى هـ

أثبت أن : $\overline{ا ح}$ قطعة مماسة للدائرة المارة برؤوس المثلث ح ء هـ (الفيوم ٠٩)

١١ في الشكل المقابل :

أب قطر فى الدائرة ن ، ن حـ نصف قطر عمودى على أب

، ء ∈ ن حـ ، رسم أء فقطع الدائرة فى هـ

أثبت أن : أحـ مماس للدائرة الخارجة للمثلث حـ ء هـ



---

١٢ في الشكل المقابل :

أب = أحـ ، هـ ل مماس للدائرة عند أ

أثبت أن :

[١] ق (∠ ل أ ب) = ق (∠ أ ب حـ)

[٢] أحـ مماس للدائرة المارة برؤوس Δ أ ء هـ

(ج. سيناء ٠٥)

---

١٣ أ ب حـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة تقاطع قطراه فى هـ ، رسم س ص مماسًا للدائرة عند حـ حيث س ص // ب ء

أثبت أن : [١] أحـ ينصف ∠ ب أ ء [٢] ب حـ يمس الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب هـ

---

١٤ أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة ، أء مماس للدائرة عند أ ، س ∈ أب ، ص ∈ أحـ حيث س ص // ب حـ

أثبت أن : أء مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، س ، ص

(كفر الشيخ ٢٥ ، الدقهلية ٢٣ ، القليوبية ١٩ ، الوادى الجديد ١٨ ، الفيوم ١٧ ، الإسكندرية ١٥)

---

١٥ في الشكل المقابل :

أب قطر فى الدائرة م حيث أب = ٨ سم ، أحـ وتر فيها

، رسم ب ء مماسًا للدائرة يقطع أحـ فى ء

فإذا كان : ب ء = ٦ سم

[١] أثبت أن : أب مماس للدائرة المارة برؤوس Δ حـ ب ء

[٢] أوجد : طول ب حـ



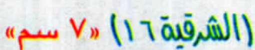
١٦ في الشكل المقابل :

أل ، أحـ قطعتان مماستان للدائرة م عند ل ، حـ

، أل ⊥ أحـ ، أحـ = ٧ سم

١ أوجد بالبرهان : طول أل

٢ أثبت أن : أل مماس للدائرة المارة برءوس △ أ ن حـ



---

١٧ في الشكل المقابل :

الشكل ب حـ و ء رباعي دائري

، ءو ∩ ب حـ = {أ} ، أس // حـ و

برهن أن : أس مماس للدائرة المارة برءوس △ أ ب ء



---

١٨ أب ، أحـ وتران في دائرة يحصران زاوية حادة حيث ء منتصف ب حـ

، رسم ب س مماسًا للدائرة عند ب قطع أء في س ، ب ء ∩ أحـ = {ص}

أثبت أن : ١ الشكل أ ب س ص رباعي دائري.

٢ س ص مماس للدائرة الخارجة للمثلث أ ء ص

---

١٩ في الشكل المقابل :

أ ب حـ ، ء حـ هـ مثلثان متساويا الأضلاع

، هـ منتصف ب حـ ، أهـ ∩ ب ء = {و}

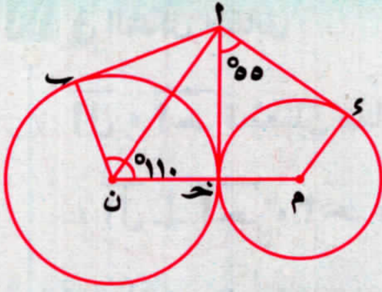
١ أثبت أن : أحـ مماسة للدائرة المارة برؤوس △ حـ هـ ء

٢ أثبت أن : الشكل حـ ء و هـ رباعي دائري.

٣ عين مركز الدائرة المارة برؤوس الشكل حـ ء و هـ



٢٠ في الشكل المقابل :



م ، ن دائرتان متماستان من الخارج في حـ ، $\overline{أء}$ تمس الدائرة م في ء

، $\overline{أب}$ تمس الدائرة ن في ب ، فإذا كان : ق (∠ ء أ حـ) = ٥٥°

، ق (∠ حـ ن ب) = ١١٠° ، م ن = ٦ سم ، أ ء = ٥ سم

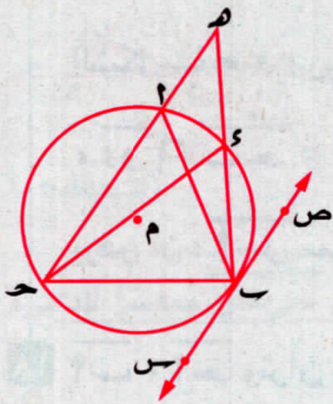
١ أثبت أن : أ ء = أ حـ = أ ب　　٢ أوجد : محيط الشكل أ ب ن م ء

٣ أثبت أن : $\overrightarrow{نأ}$ ينصف ∠ حـ ن ب

٤ أثبت أن : $\overline{أء}$ مماسة للدائرة المارة برؤوس المثلث أ حـ ن　(الإسماعيلية ١٥)

---

٢١ في الشكل المقابل :



الدائرة م خارجة للمثلث أ ب حـ الذي فيه :

أ ب = ب حـ ، $\overrightarrow{بء}$ يقطع الدائرة في ء

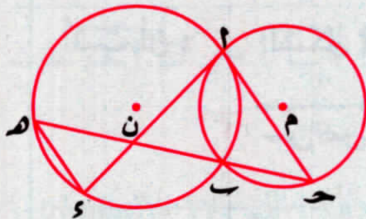
حيث $\overrightarrow{بء} \cap \overrightarrow{حـأ}$ = {هـ} ، $\overleftrightarrow{سص}$ مماس للدائرة عند ب

أثبت أن : ١ $\overleftrightarrow{بس}$ // $\overline{حـهـ}$

٢ $\overleftrightarrow{بحـ}$ مماس للدائرة المارة بالنقط حـ ، ء ، هـ

للمتفوقين

١ في الشكل المقابل :



م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ، ب

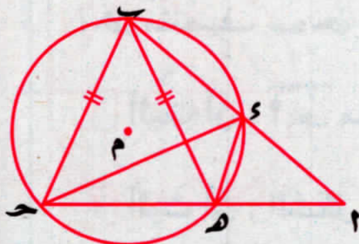
، $\overline{أحـ}$ قطعة مماسة للدائرة ن وتقطع الدائرة م في حـ

، $\overline{أء}$ قطعة مماسة للدائرة م وتقطع الدائرة ن في ء ، $\overrightarrow{حـب}$ يقطع الدائرة ن في هـ

أثبت أن : $\overline{أحـ}$ // $\overline{ءهـ}$

---

٢ في الشكل المقابل :



أ نقطة خارج الدائرة م ، $\overline{أء}$ يقطع الدائرة في ء ، ب

، $\overrightarrow{أهـ}$ يقطع الدائرة في هـ ، حـ ، ثم رُسم $\overline{ءحـ}$ ، $\overline{ءهـ}$

، فإذا كان : ب هـ = ب حـ

أثبت أن : $\overline{بهـ}$ مماسة للدائرة المارة برءوس △ أ ء هـ

● تذكر ● فهم ○ تطبيق ● حل مشكلات

مفاهيم ومهارات أساسية تراكمية



اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ طول قطر المربع الذى مساحته ١٠٠ سم^{٢} يساوى .... سم. (دمياط ٢٤)

(أ) ٢ $\sqrt{١٠}$ (ب) ١٠ (جـ) ١٠ $\sqrt{٢}$ (د) ٥٠

٢ المضلعان المتشابهان زواياهما المتناظرة .... فى القياس. (الإسكندرية ١٦)

(أ) متساوية (ب) مختلفة (جـ) متناظرة (د) متبادلة

٣ مساحة المعين الذى طولا قطريه ٦ سم ، ٨ سم تساوى .... (الإسكندرية ٢٥ ، المنوفية ٢٤ ، سوهاج ٢٣)

(أ) ١٤ سم^{٢} (ب) ١٠ سم^{٢} (جـ) ٢٤ سم^{٢} (د) ٤٨ سم^{٢}

٤ عدد محاور تماثل دائرتين متطابقتين متماستين من الخارج يساوى .... (الدقهلية ١٦)

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) عدد لا نهائى.

٥ نقطة تلاقى متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة .... من جهة القاعدة. (الإسكندرية ٢٥)

(أ) ٤ : ٢ (ب) ٢ : ٤ (جـ) ١ : ٣ (د) ٣ : ١

٦ إذا كان مسقط قطعة مستقيمة على مستقيم هو نقطة فإن القطعة المستقيمة .... المستقيم.

(الجيزة ٢٣ ، المنوفية ١٨ ، ش. سيناء ١٧ ، الإسكندرية ١٦)

(أ) // (ب) $\perp$ (جـ) $\in$ (د) $\subset$

٧ أ ب ح مثلث قائم الزاوية فى ب فيه : أ ب = ٦ سم ، ب ح = ٨ سم

فإن مساحته = ... سم^{٢} (دمياط ١٦)

(أ) ٤٨ (ب) ١٤ (جـ) ٢٤ (د) ٧

٨ أ ب ح مثلث فيه : $(أ ب)^{٢} = (أ ح)^{٢} - (ب ح)^{٢}$ فإن : ∠ ب تكون .... (أسيوط ٢٥)

(أ) منفرجة. (ب) حادة. (جـ) مستقيمة. (د) قائمة.

٩ أ ب ح مثلث فيه : ق (∠ أ) = ق (∠ ح) - ق (∠ ب) فإن : ق (∠ ح) = ... ° (أسوان ٢٤)

(أ) ٤٥ (ب) ٦٠ (جـ) ٩٠ (د) ١٨٠

١٠ طول الضلع المقابل للزاوية التى قياسها ٣٠° فى المثلث القائم الزاوية

يساوى .... طول الوتر. (القاهرة ١٩ ، الإسماعيلية ١٦)

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (جـ) $\sqrt{٢}$ (د) ٢

١١ إذا كان $م_{١}$ ، $م_{٢}$ هما ميلا مستقيمين متوازيين فإن .... (الفيوم ١٦)

(أ) $م_{١} + م_{٢} = ٠$ (ب) $م_{١} = م_{٢}$

(جـ) $م_{١} \times م_{٢} = -١$ (د) $م_{١} - م_{٢} = -١$

١٢ صورة النقطة (٢ ، ٣) بالدوران د (و ، ١٨٠°) هى النقطة .... (ج. سيناء ١٧)

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (−٢ ، ٣) (جـ) (٢ ، −٣) (د) (−٢ ، −٣)

١٣ معين طول ضلعه ل سم فإن محيطه يساوى .... سم (الجيزة ٢٣ ، الفيوم ١٦)

(أ) ل^{٢} (ب) ٢ ل^{٢} (جـ) ٤ ل (د) ٢ $\sqrt{٢}$ ل

١٤ قياس زاوية رأس الشكل السداسى المنتظم يساوى .... (البحيرة ٢٤ ، المنيا ١٨)

(أ) ٩٠° (ب) ١٠٨° (جـ) ١٢٠° (د) ١٣٥°

١٥ إذا كانت : م دائرة طول نصف قطرها نق سم فإن طول نصف الدائرة = ... سم

(أ) ٢ π نق (ب) $\frac{١}{٤}$ π نق

(جـ) $\frac{١}{٢}$ π نق (د) π نق (ج. سيناء ١٧ ، البحيرة ١٦)

١٦ مربع محيطه ٢٠ سم تكون مساحته .... سم^{٢} (البحيرة ٢٣ ، المنيا ١٩ ، القليوبية ١٨)

(أ) ٢٠ (ب) ٢٥ (جـ) ٥٠ (د) ١٠٠

١٧ القطران متساويان فى الطول وغير متعامدين فى .... (دمياط ٢٣ ، بنى سويف ١٨ ، المنيا ١٦)

(أ) المربع. (ب) المعين. (جـ) المستطيل. (د) متوازى الأضلاع.

١٨ إذا كانت : حا ٢ س = $\frac{١}{٢}$ حيث س زاوية حادة فإن : ق (د س) = ... ° (بنى سويف ١٦)

(أ) ١٥ (ب) ٣٠ (جـ) ٤٥ (د) ٦٠

١٩ الزاويتان أ ، ب فى △ أ ب حـ القائم الزاوية فى حـ تكونان .... (المنيا ١٧)

(أ) متكاملتين. (ب) متتامتين. (جـ) متجاورتين. (د) متقابلتين بالرأس.

٢٠ المستقيمان الموازيان لثالث .... (الأقصر ١٦)

(أ) متعامدان. (ب) متوازيان. (جـ) متقاطعان. (د) متخالفان.

٢١ طول نصف قطر الدائرة التى مركزها (٧ ، ٤) وتمر بالنقطة (٣ ، ١)

يساوى .... وحدة طول. (أسوان ١٦)

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

٢٢ عدد محاور التماثل للمربع هو .... (الإسكندرية ٢٤ ، الفيوم ١٧)

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

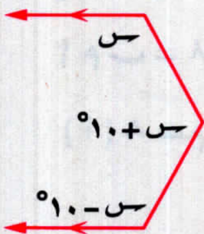
٢٣ الأعداد ٥ ، ٤ ، .... تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث. (المنوفية ٢٥ ، المنيا ١٦)

(أ) ٨ (ب) ١٢ (جـ) ١٠ (د) ٩

٢٤ س ص ع مثلث قائم الزاوية فى ص فإن : س ع .... ص ع (الجيزة ٢٣)

(أ) > (ب) < (جـ) = (د) ضعف

٢٥ فى الشكل المقابل : (الوادى الجديد ٢٣)



طا ($\frac{س}{٢}$) = ...

(أ) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (ب) $\frac{١}{٢}$

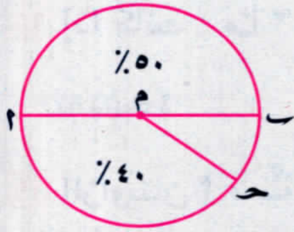
(جـ) $\sqrt{٣}$ (د) ١

٢٦ إذا كانت : ص ∈ $\overline{س ع}$ وكان : س ص = ٢ ص ع فإن مساحة المربع المرسوم على $\overline{س ص}$

تساوى .... مساحة المربع المرسوم $\overline{س ع}$ (المنوفية ١٩)

(أ) $\frac{٩}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٩}$ (جـ) ٢ (د) $\frac{١}{٢}$

٢٧ فى الشكل المقابل :

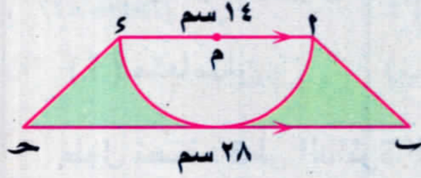


م مركز الدائرة

فإن : ق (∠ حـ م ب) = ...° (ج. سيناء ١٦)

(أ) ٣٦ (ب) ٧٢ (جـ) ١٤٤ (د) ١٨٠

٢٨ فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : $\overline{أء}$ // $\overline{ب حـ}$

، $\overline{أء}$ قطر فى الدائرة م

فإن مساحة الجزء المظلل = ... (دمياط ١٦)

(أ) ٧٠ سم^2 (ب) ١٤٧ سم^2 (جـ) ١٧٠ سم^2 (د) ٢٢٤ سم^2

٢٩ مثلث له محور تماثل واحد وفيه طولا ضلعين ٨ سم ، ٤ سم فإن محيطه = ... سم (سوهاج ٢٥)

(أ) ١٦ (ب) ٣٢ (جـ) ١٢ (د) ٢٠

٣٠ صورة مستطيلة الشكل طولها ٦٠ سم وعرضها ٤٠ سم أحيطت بإطار خشبى عرضه ٥ سم فتكون مساحة الشكل كله .... سم^2 (دمياط ١٧)

(أ) ٣٠٥٠ (ب) ٣٥٠٠ (جـ) ٢٩٢٥ (د) ٣٢٥٠

٣١ إذا كان $\overline{م أ}$ ، $\overline{م ب}$ نصفى قطرين متعامدين فى الدائرة م ، وكانت مساحة المثلث أ م ب = ٨ سم^2 فإن طول نصف قطر الدائرة = ... (المنوفية ١٧)

(أ) ٨ سم (ب) ١٦ سم (جـ) ٤ سم (د) ٢ سم



الآن بالمكتبات



فى: **اللغة الإنجليزية**
للمرحلة الإعدادية



الصف **الثالث** الإعدادى

الفصل الدراسى الثانى

الرياضيات

يصرف مجانًا مع هذا الكتاب
- الجزء الخاص بالتقويم المستمر
- إجابات المعاصر



- أدخل كودك الشخصى الموجود على ظهر الغلاف
- لمزيد من المعلومات انظر صفحة ٣.









مكتبة الطلبة
للطبع والنشر والتوزيع
٣ شارع كامل صدقى - الفجالة
تليفون: ٢٥٩٠٢٩٩٧ - ٢٥٩٣٧٧٩١ - ٠٢/٢٥٩٣٤٠١٢
www.gpseducation.com
الخط الساخن
١٥٠١٤



2026

المعاصر

إعداد نخبة من خبراء التعليم

الجزء الخاص بالتقويم المستمر

- اختبارات تراكمية
- الأسئلة الهامة
- مراجعة نهائية
- امتحانات نهائية

الصف الثالث الإعدادى

الفصل الدراسى الثانى

الرياضيات

المعاصر

إعداد نخبة من خبراء التعليم

الجزء الخاص بالتقويم المستمر

- اختبارات تراكمية
- الأسئلة الهامة
- مراجعة نهائية
- امتحانات نهائية

الصف الثالث الإعدادى

الفصل الدراسى الثانى

٢٠٢٦

الرياضيات





مكتبة الطلبة
للطبع والنشر والتوزيع
٣ شارع كامل صدقى - الفجالة
تليفون: ٢٥٩٠٢٩٩٧ - ٢٥٩٣٧٧٩١ - ٢٥٩٣٤٠١٢ /٠٢
www.gpseducation.com



بسم الله الرحمن الرحيم

تقديـــم

فـى إطـار خطتنـا الطموحـة لتطويـر مؤلفاتنـا فـى مـادة الرياضيـات للمرحلـة الإعدادية - فى ضوء ما يرد إلينا من آراء ومقترحات - تحقيقًا للمستوى الأمثل الذى نرجوه جميعًا ، وانطلاقًا من إيماننا الكامل بأهمية التقويم المستمر فى نجاح العملية التعليمية للوقوف على مستوى التلاميذ أولًا بأول وصولًا للهدف المنشود ؛ نضع بين أيديكم :

«الجزء الخاص بالتقويم المستمر»

والذى يحتوى على :

- اختبارات تراكمية على كل درس من امتحانات المحافظات.
- الأسئلة الهامة الواردة بامتحانات المحافظات فى سنوات مختلفة.
- المراجعة النهائية.
- امتحانات نهائية تشمل نماذج امتحانات الكتاب المدرسى.

ومجموعة مختارة من امتحانات المحافظات.

وكلنا أمل فى أن تحظى مؤلفاتنا بثقتكم الغالية التى نعتز بها دائمًا.

والله لا يضيع أجر من أحسن عملًا، وهو ولى التوفيق،

« المؤلفون »

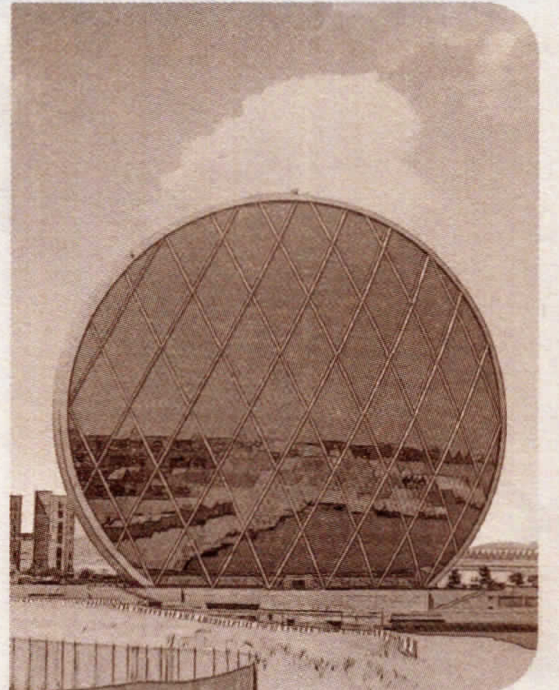
محتويات الكتاب

أولًا الجبر والاحتمال



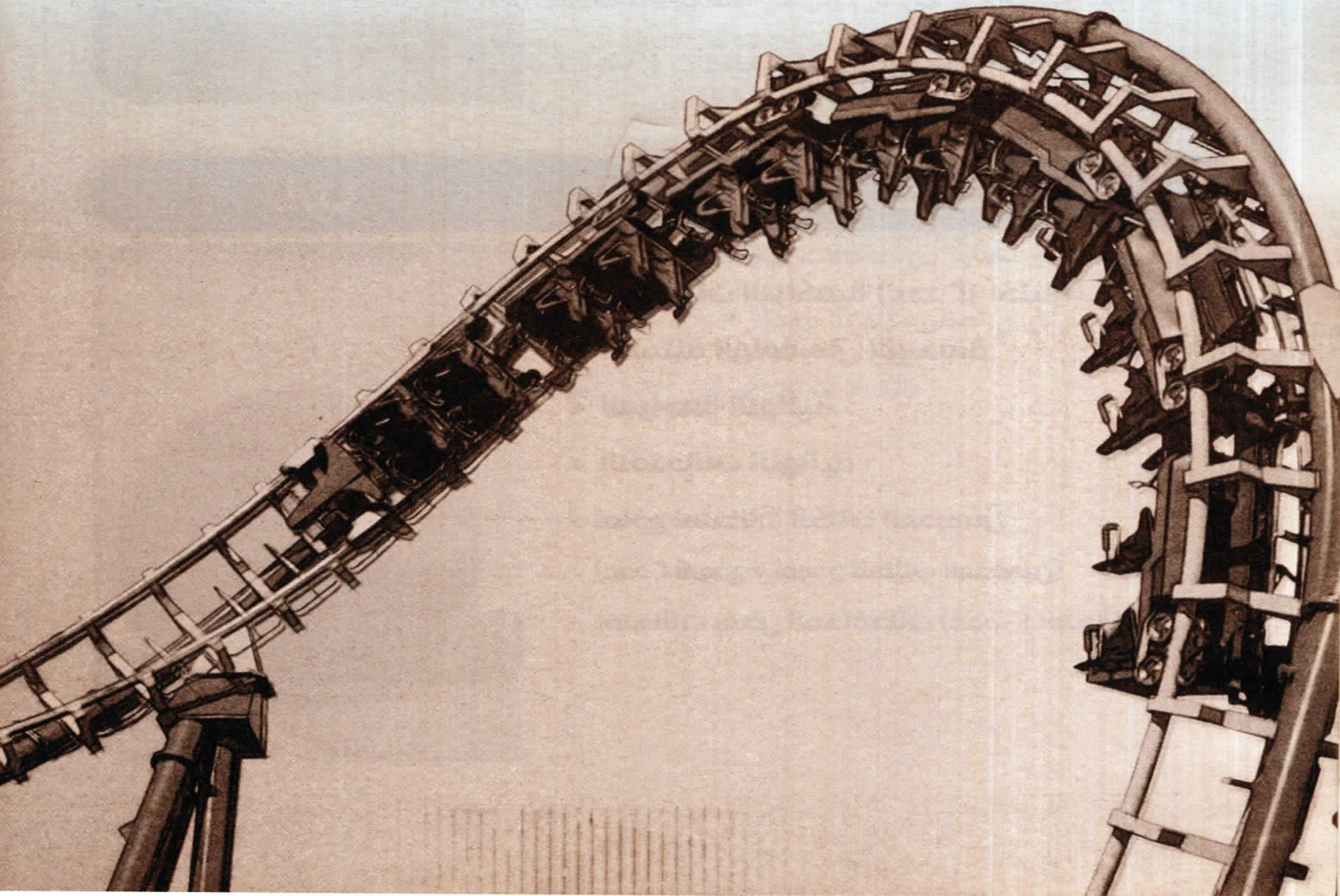
- الاختبارات التراكمية (عدد ١٠ اختبارات).
- الأسئلة الهامة فى الجبر والاحتمال.
- المراجعة النهائية.
- الامتحانات النهائية :
  - نماذج امتحانات الكتاب المدرسى (عدد ٢ نموذج + نموذج للطلاب المدمجين)
  - امتحانات بعض المحافظات (عدد ٢٠ امتحانًا)

ثانيًا الهندسة



- الاختبارات التراكمية (عدد ١٢ اختبارًا).
- الأسئلة الهامة فى الهندسة.
- المراجعة النهائية.
- الامتحانات النهائية :
  - نماذج امتحانات الكتاب المدرسى (عدد ٢ نموذج + نموذج للطلاب المدمجين)
  - امتحانات بعض المحافظات (عدد ٢٠ امتحانًا)

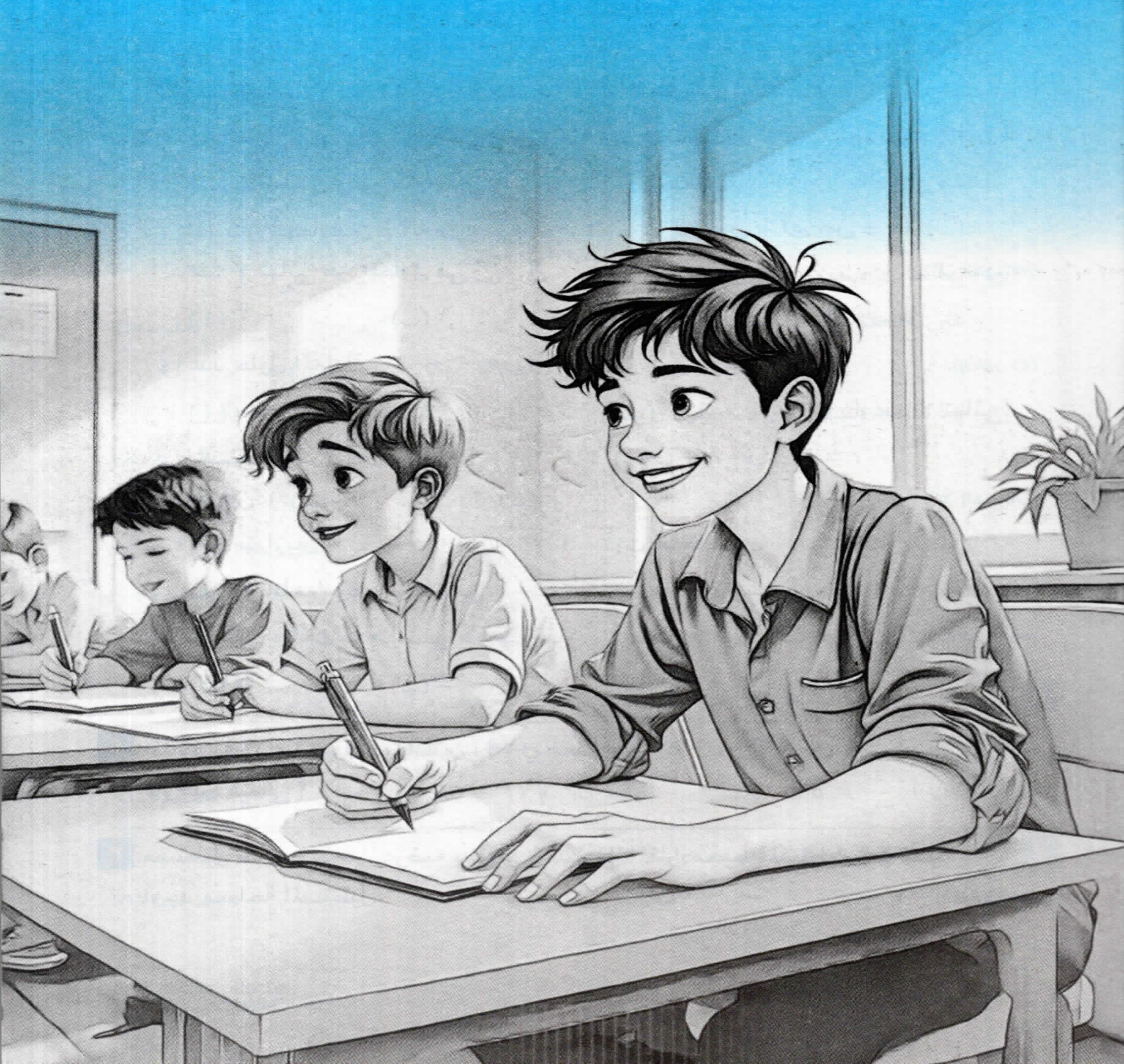
أولًا | الجبــر والاحتمال



الاختبارات التراكمية

فى الجبر والاحتمال

من امتحانات المحافظات





اختبارات تراكمية فى الجبر والاحتمال

اختبار تراكمى ١ على الدرس الأول الوحدة الأولى

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ المستقيمان الممثلان للمعادلتين : س = ٤ ، ص − ٣ = صفر يتقاطعان فى النقطة .... (السويس ٢٢)

(أ) (٤ ، ٣) (ب) (٤ ، −٣) (جـ) (٣ ، ٤) (د) (−٣ ، ٤)

٢ المستقيمان : س − ١ = ٠ ، س + ص = ٥ يكونان .... (أسوان ١٦)

(أ) متوازيين. (ب) منطبقين.

(جـ) متقاطعين وغير متعامدين. (د) متعامدين.

٣ إذا كان للمعادلتين : ٢ س + ٣ ص = ٦ ، ٤ س + ك ص = ١٢ عدد لا نهائى من الحلول فى ح × ح فإن : ك = ... (كفر الشيخ ٢٣)

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٢ (د) صفر

٤ عدد حلول المعادلة : ٢ س − ص = ٣ فى ح × ح هو .... (الأقصر ٢٥)

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ١ (د) عدد لا نهائى.

٥ المستقيمان : ٣ س + ٤ ص = ١ ، ٦ س + ٨ ص − ٢ = ٠ يكونان .... (كفر الشيخ ١٨)

(أ) متوازيين. (ب) متعامدين.

(جـ) متقاطعين وغير متعامدين. (د) منطبقين.

٦ إذا كان : أ < ب < صفر < جـ فإن : أ ب .... ب جـ (الجيزة ٢٥)

(أ) < (ب) = (جـ) ≥ (د) >

---

٢ إذا كان (−٣ ، ١) حلًا للمعادلتين : أ س + ب ص = ٥ ، ٣ أ س + ب ص − ١٧ = ٠ .
فأوجد : قيمتى أ ، ب (المنيا ١٧)

---

٣ مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٤ سم فإذا كان محيط المستطيل ٢٨ سم.
أوجد مساحة المستطيل. (القليوبية ١٩)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان : س = ٣ أحد حلول المعادلة : $س^٢ - أ س - ٦ = ٠$

فإن : أ = ... (السويس ١٧)

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) −١

٢ إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = $س^٢ - ٨ س + ١٦$ يمر بالنقطتين (٤ ، ٠) ، (٠ ، ١٦) فإن مجموعة حل المعادلة : $٨ س - ١٦ - س^٢ =$ صفر فى ح

هى .... (قنا ١٦)

(أ) {٤ ، ٠} (ب) {٠ ، ١٦} (جـ) {٤} (د) {٤ ، ٠ ، ٦}

٣ إذا كان للمعادلتين : ٢ س − ٣ ص = ٢ ، ٦ س − ٩ ص = ك عدد لا نهائى من الحلول

فإن : ك = ... (القليوبية ٢٥)

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٢

٤ إذا كانت مجموعة الحل للمعادلة : $س^٢ - أ س + ٤ = ٠$ فى ح هى ∅

فإن أ يمكن أن تساوى .... (الفيوم ٢٥)

(أ) −٥ (ب) صفر (جـ) ٤ (د) ٥

٥ إذا كانت النسبة بين محيطى مربعين ١ : ٢ فإن النسبة بين مساحتيهما ....

(السويس ١٩)

(أ) ١ : ٢ (ب) ٢ : ١ (جـ) ١ : ٤ (د) ٤ : ١

٦ إذا كان للمعادلتين : س + ٢ ص = ١ ، ٢ س + ك ص = ٢ حل وحيد فى ح × ح

فإن ك لا يمكن أن تساوى .... (الدقهلية ١٧)

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) −٢ (د) −٤

---

٢ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين باستخدام القانون العام :

١ $٣ س^٢ - ٥ س + ١ = ٠$ (مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين) (الوادى الجديد ١٨)

٢ $س + \frac{٢}{س} = ٥$ (علمًا بأن $\sqrt{١٧} \simeq ٤,١٢$) (الدقهلية ١٦)

---

٣ أوجد بيانيًا فى ح × ح مجموعة حل المعادلتين الآتيتين :

ص = ٣ س − ١ ، س − ص + ١ = صفر (الإسماعيلية ١٦)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كانت : س = ص + ١ ، (س – ص)^{٢} + ص = ٣

فإن : ص = ... (كفر الشيخ ١٧)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٢ إذا كان : س + ص = ٧ ، س^{٢} – ص^{٢} = ١٤ فإن : ص – س = ...

(كفر الشيخ ٢٤)

(أ) ٧ (ب) –٢ (جـ) ٢ (د) –٧

٣ المستقيمان : س – ٣ = ٠ ، ص = ٤ يتقاطعان فى الربع .... (كفر الشيخ ٢٣)

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

٤ إذا كانت مجموعة حل المعادلة : س^{٢} + م س + ٩ = ٠ فى ح هى {–٣}

فإن : م = ... (كفر الشيخ ١٧)

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ± ٦ (د) صفر

٥ مجموعة حل المعادلتين : س = ٣ ، س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥ فى ح × ح هى ....

(الإسكندرية ٢٥)

(أ) {(٣ ، ٤)} (ب) {(٣ ، ٤) ، (٣ ، – ٤)}

(جـ) {(٣ ، –٤)} (د) {(٤ ، –٣)}

٦ إذا كان : ٢$^{ك – ٣}$ = ١ فإن : ك = ... (القاهرة ١٩)

(أ) –٣ (ب) صفر (جـ) ٣ (د) ٨

---

٢ أوجد فى ح × ح مجموعة حل المعادلتين الآتيتين جبريًا :

س + ص = ٥ ، س^{٢} + س ص = ١٥ (الإسماعيلية ١٧)

---

٣ أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة :

س^{٢} = ٢ (س + ٦) علمًا بأن : $\sqrt{٥٢}$ ≈ ٧,٢ (المنوفية ١٦)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ مجموعة أصفار الدالة د حيث د (س) = س + ٣ هى .... (الدقهلية ١٦)

(أ) ح (ب) ح - {٣} (جـ) {-٣} (د) {٣}

٢ مجموعة أصفار الدالة د حيث د (س) = $س^٢$ + ٩ هى .... (كفر الشيخ ٢٢)

(أ) {٣} (ب) {-٩} (جـ) {٣ ، -٣} (د) ∅

٣ إذا كانت مجموعة حل المعادلة : $س^٢$ - أ س + ٤ = ٠ فى ح هى {-٢}

فإن : أ = ... (بورسعيد ٢٣)

(أ) -٢ (ب) -٤ (جـ) ٢ (د) ٤

٤ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = ٢ س ($س^٢$ - ٢ س + ١) هى ....

(بنى سويف ٢٥)

(أ) {صفر} (ب) {صفر ، ١}

(جـ) {صفر ، -١} (د) {صفر ، ١ ، -١}

٥ إذا كان : س ص = ٣ ، $س^٢$ ص - س $ص^٢$ = ٦

فإن : س - ص = ... (الوادى الجديد ١٧)

(أ) ٢ (ب) -٢ (جـ) ٣ (د) -٣

٦ المستقيمان : ٣ س + ٥ ص = ٠ ، ٥ س - ٣ ص = ٠ يتقاطعان فى ....

(سوهاج ٢٥)

(أ) نقطة الأصل. (ب) الربع الأول. (جـ) الربع الثانى. (د) الربع الثالث.

---

٢ (أ) إذا كانت مجموعة أصفار الدالة د حيث د (س) = أ $س^٢$ + ب س + ١٥ هى {٣ ، ٥}

أوجد : قيمة كل من أ ، ب (الفيوم ١٩)

(ب) إذا كانت : ص (د) = {٥} ، د (س) = $س^٣$ - ٣ $س^٢$ + أ

فأوجد : قيمة أ (أسيوط ١٩)

---

٣ عدد مكون من رقمين رقم آحاده ضعف رقم عشراته فإذا كان حاصل ضرب الرقمين يساوى ثلث العدد الأصلى. فما هو العدد ؟ (المنوفية ١٦)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = $\frac{س + ١}{س^٢ - ١}$ هى .... (بنى سويف ٢٣)

(أ) {١ ، -١} (ب) {١} (جـ) {-١} (د) ∅

٢ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = $\frac{س^٢ - س - ٢}{س^٢ - ٤}$ هى .... (المنوفية ١٨)

(أ) {٢ ، -٢} (ب) {-٢} (جـ) {-١} (د) {٢ ، -١}

٣ إذا كان مجال الدالة ن : ن (س) = $\frac{س + ١}{س^٢ - أ س + ٤}$ هو ح - {٢}

فإن : أ = ... (الدقهلية ١٨)

(أ) ٢ (ب) -٢ (جـ) ٤ (د) -٤

٤ مجال الدالة ن حيث ن (س) = $\frac{س - ٣}{٢}$ هو .... (الأقصر ١٦)

(أ) ح (ب) ح - {٢} (جـ) ح - {٠} (د) ح - {٠ ، ١}

٥ إذا كانت المعادلتان : ب س + ٤ ص = ٧ ، ٣ س + أ ص = ٢١ لهما عدد

لا نهائى من الحلول فى ح × ح فإن : أ ب = ... (كفر الشيخ ٢٥)

(أ) ١٢ (ب) ٧ (جـ) ٢١ (د) ٩

٦ إذا كان : أ ب = ١٢ ، ب حـ = ٢٠ ، أ حـ = ١٥ ، أ ، ب ، حـ ∈ $ح^+$

فإن : أ ب حـ = ... (الدقهلية ٢٤)

(أ) ٣٦ (ب) ٦٠ (جـ) ٣٦٠ (د) ٣٦٠٠

---

٢ إذا كان مجال الدالة د حيث د (س) = $\frac{س}{س^٢ - ٥ س + م}$ هو ح - {٢ ، حـ}

فأوجد : قيمة كل من الثابتين م ، حـ (الشرقية ١٦)

---

٣ أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة :

$س^٢ - ٢ (س + ٣)$ = صفر مستخدمًا القانون العام علمًا بأن : $\sqrt{٧} \approx ٢,٦٥$ (أسيوط ١٦)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = $\frac{-٣}{س - ٢}$ هى .... (الغربية ١٩)

(أ) ح - {٢} (ب) ح - {٣} (جـ) {٢} (د) ∅

٢ أبسط صورة للدالة ن حيث ن (س) = $\frac{٤ س^{٢} - ٢ س}{٢ س}$ ، س ≠ صفر هى .... (قنا ١٧)

(أ) ٤ $س^{٢}$ (ب) ٢ س - ١ (جـ) ٢ س (د) ٢

٣ أبسط صورة للدالة د : د (س) = $\frac{٣ - س}{س - ٣}$ حيث س ≠ ٣ هى .... (بنى سويف ٢٥)

(أ) -١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٣

٤ المجال المشترك للكسرين : $\frac{٢}{س^{٢} - ١}$ ، $\frac{٥ س}{س^{٢} - س}$ هو .... (الفيوم ١٨)

(أ) ح - {١} (ب) ح - {٠ ، ١}

(جـ) ح - {٠ ، ١ ، -١} (د) ح - {١ ، -١}

٥ إذا كان : س + ٣ ص = ٧ فإن : س + ٣ (ص + ٥) = ... (الإسماعيلية ٢٣)

(أ) ٢٢ (ب) ١٢ (جـ) ٧ (د) ٣٥

٦ إذا كان للمعادلتين : س + ٣ ص = ٢ ، ٢ س + م ص = ٤ عدد لا نهائى من الحلول فى ح × ح فإن : م = ... (بنى سويف ٢٣)

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٦

---

٢ (أ) أوجد المجال المشترك الذى تتساوى فيه الدالتان $ن_{١}$ ، $ن_{٢}$ حيث : (بورسعيد ١٧)

$ن_{١}$ (س) = $\frac{س^{٢} + ٩ س + ٢٠}{س^{٢} - ١٦}$ ، $ن_{٢}$ (س) = $\frac{س^{٢} + ٥ س}{س^{٢} - ٤ س}$

(ب) إذا كان : $ن_{١}$ (س) = $\frac{س^{٢} - س}{س^{٣} - ٢ س^{٢}}$ ، $ن_{٢}$ (س) = $\frac{س^{٢} - ٣ س + ٢}{س^{٣} - ٤ س^{٢} + ٤ س}$

أثبت أن : $ن_{١}$ = $ن_{٢}$ (المنوفية ١٨)

---

٣ أوجد فى ح × ح مجموعة حل المعادلتين : ٢ ص = س - ٥ ، ٤ س = ٢ - ص (الفيوم ٢٥)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ يكون للدالة د حيث د (س) = $\frac{س - ٣}{س - ٤}$ معكوس جمعى فى المجال .... (السويس ١٧)

(أ) ح - {٣} (ب) ح - {٤} (جـ) ح - {-٤} (د) ح - {-٣}

٢ أبسط صورة للدالة ن : ن (س) = $\frac{س}{س - ١} - \frac{١}{س - ١}$
هى .... (حيث س ≠ ١) (بورسعيد ٢٣)

(أ) $\frac{س}{س - ١}$ (ب) س - ١ (جـ) $\frac{س - ١}{٢}$ (د) ١

٣ إذا كان : $٢^{٧} \times ٣^{٧} = ٦^{ك}$ فإن : ك = ... (الشرقية ١٦)

(أ) ١٤ (ب) ٧ (جـ) ٦ (د) ٥

٤ إذا كان مجال الدالة ن حيث ن (س) = $\frac{س + ٢}{٤ س^{٢} + ك س + ٩}$ هو ح - $\{-\frac{٣}{٢}\}$
فإن : ك = ... (كفر الشيخ ١٩)

(أ) ١٥ (ب) -١٥ (جـ) ١٢ (د) -١٢

٥ المعكوس الجمعى للكسر الجبرى : $\frac{٣}{س^{٢} + ١}$ هو .... (الإسكندرية ١٧)

(أ) $\frac{-٣}{س^{٢} + ١}$ (ب) $\frac{س^{٢} + ١}{٣}$ (جـ) $\frac{س^{٢} + ١}{-٣}$ (د) $\frac{٣}{س^{٢} - ١}$

٦ عدد حلول المعادلتين : س + ص = ٥ ، ٢ س + ٢ ص = ١٠ معًا فى ح × ح
هو .... (الغربية ٢٢)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لانهائى.

---

٢ (أ) أوجد مجموعة حل المعادلتين الآتيتين فى $ح^{٢}$:

س + ص = ٢ ، $\frac{١}{س} + \frac{١}{ص} = ٢$ (المنيا ١٩)

(ب) أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا المجال حيث :

ن (س) = $\frac{س^{٢} + س}{س^{٢} - ١} - \frac{س - ٥}{س^{٢} - ٦ س + ٥}$ (أسيوط ٢٥)

---

٣ (أ) إذا كانت : ن (س) = $\frac{س^{٢} - ٢ س}{س^{٢} - ٣ س + ٢} - \frac{٤ - س^{٢}}{س^{٢} + س - ٢}$

أوجد : ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن (الوادى الجديد ١٧)

(ب) إذا كان : $ن_{١}$ (س) = $\frac{س}{س^{٢} - ٢ س}$ ، $ن_{٢}$ (س) = $\frac{س + ١}{س^{٢} - س - ٢}$

هل $ن_{١} = ن_{٢}$ ؟ مع ذكر السبب. (القاهرة ١٨)

اختبـــار تراكمـى ٨ حتى الدرس الخامس الوحدة الثانية

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ مجال المعكوس الضربى للكسر الجبرى : $\frac{س + ٢}{س + ٥}$ هو .... (الشرقية ١٧)

(أ) ح (ب) ح − {−٥} (جـ) ح − {−٢} (د) ح − {−٢ ، −٥}

٢ الكسر ن (س) = $\frac{س - ٢}{٢}$ له معكوس ضربى فى المجال .... (القليوبية ١٦)

(أ) ح (ب) ح − {٢} (جـ) ح − {٠} (د) ح − {٠ ، ٢}

٣ عدد مكون من رقمين رقم آحاده = رقم عشراته = س هو .... (سوهاج ٢٥)

(أ) ١٠ $س^٢$ (ب) ١٠ س (جـ) ١١ س (د) ١١ $س^٢$

٤ $\frac{٥ س}{س^٢ + ١}$ ÷ $\frac{س}{س^٢ + ١}$ = ... (حيث س ≠ صفر) (بورسعيد ٢٣)

(أ) −٥ (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٥

٥ إذا كان : ن (س) = $\frac{١}{س}$ − $\frac{٣}{س}$ فإن : $ن^{-١}$ (س) = ... (الوادى الجديد ١٦)

(أ) س − $\frac{س}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{س}$ (جـ) $\frac{-س}{٢}$ (د) $\frac{س}{٢}$

٦ فى المعادلة : أ $س^٢$ + ب س + جـ = صفر ، إذا كان : $ب^٢$ − ٤ أ جـ > صفر
فإن عدد جذور المعادلة فى ح يساوى .... (الفيوم ١٩)

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) صفر. (د) لا نهائى.

---

٢ (أ) إذا كان : ن (س) = $\frac{س^٢ - ٢ س}{س - ٢}$

١ أوجد : $ن^{-١}$ (س) فى أبسط صورة مبينًا المجال.

٢ إذا كان : $ن^{-١}$ (س) = $\frac{١}{٣}$ فما قيمة س ؟ (الإسماعيلية ١٦)

(ب) إذا كان : ن (س) = $\frac{س - ٣}{س^٢ - ٧ س + ١٢}$ − $\frac{٤}{س^٢ - ٤ س}$

أوجد : ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن ثم أوجد : قيمة ن (٤) إن أمكن.
(الغربية ١٦)

---

٣ (أ) أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن حيث :

ن (س) = $\frac{٣ س^٢ - ٦ س}{س^٢ - ٤}$ ÷ $\frac{س^٢ + س}{س^٢ + ٣ س + ٢}$ (الفيوم ٢٥)

(ب) أوجد مجموعة حل المعادلتين الآتيتين فى ح × ح :

س + ص = ٤ ، $س^٢$ + $ص^٢$ + س ص = ١٣ (الجيزة ١٨)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ ا ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ا ⊂ ب حيث : ا ≠ ب
فإن : ل (ا ∪ ب) = ... (الأقصر ٢٥)

(أ) ل (ب) (ب) ل (ا) (جـ) ل (ا ∩ ب) (د) صفر

٢ إذا كان : ا ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة وكان : ل (ا) = ٠,٥
، ل (ا ∪ ب) = ٠,٨ فإن : ل (ب) = ... (مطروح ١٦)

(أ) ٠,٣ (ب) ٠,٠٣ (جـ) ٠,٥ (د) ٠,١٣

٣ إذا كان : ا ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية
فإن : ا ∩ ب = ... (الأقصر ٢٢)

(أ) {صفر} (ب) صفر (جـ) ا (د) ∅

٤ إذا ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة فإن احتمال ظهور عدد زوجى أو ظهور عدد فردى يساوى .... (الوادى الجديد ١٨)

(أ) صفر (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) ١

٥ أحد حلول المعادلتين : س − ص = ١ ، س^{٢} + ص^{٢} = ٥ فى ح × ح
هو .... (بورسعيد ٢٣)

(أ) (−٢ ، ١) (ب) (٢ ، ١) (جـ) (١ ، ٢) (د) {٢ ، ١}

٦ إذا كان : ن (س) = $\frac{س + ١}{س − ٢}$ كسرًا جبريًا فإن المجال الذى يكون فيه للكسر معكوس ضربى هو .... (الدقهلية ١٧)

(أ) ح − {٢} (ب) ح − {−١ ، ٢} (جـ) ح − {−١} (د) {−١ ، ٢}

---

٢ إذا كان : ا ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما وكان :
ل (ا) = $\frac{١}{٣}$ ، ل (ا ∪ ب) = $\frac{٧}{١٢}$ **أوجد ل (ب) إذا كان :**

١ ا ، ب حدثين متنافيين. ٢ ا ⊃ ب (الإسماعيلية ١٨)

---

٣ أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن حيث :

ن (س) = $\frac{س^{٢} + ٢س − ٣}{س + ٣}$ × $\frac{س + ١}{س^{٢} − ١}$ (القاهرة ١٨)

اختبـــار تراكمــى ١٠ حتى الدرس الثانى الوحدة الثالثة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كانت : أ $\subset$ ف لتجربة عشوائية ما وكان : ل (أَ) = ٣ ل (أ)

فإن : ل (أ) = ... (أسيوط ١٨)

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{١}{٤}$

٢ فى تجربة إلقاء قطعة نقود مرة واحدة إذا كان أ هو حدث ظهور صورة ، ب هو حدث ظهور كتابة فإن : ل (أ $\cup$ ب) = ... (الغربية ١٩)

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) صفر (د) $\emptyset$

٣ إذا كان احتمال نجاحك فى امتحان الشهادة الإعدادية ٨٥٪ فإن احتمال رسوبك يساوى .... (الإسماعيلية ٢٣)

(أ) $\frac{٣}{٢٠٠}$ (ب) $\frac{٣}{٢٠}$ (جـ) $\frac{١٧}{٢٠}$ (د) ٠,٨٥

٤ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما وكان : ل (أ) = ٠,٧

، ل (أ $\cap$ ب) = ٠,٥ فإن : ل (أ − ب) = ... (أسيوط ٢٢)

(أ) ٠,٦ (ب) ٠,٤ (جـ) ٠,٣ (د) ٠,٢

٥ إذا كان : أ $\cap$ ب = $\emptyset$ فإن : ل (أ − ب) = ... (القليوبية ١٩)

(أ) ل (أ) (ب) ل (ب) (جـ) ل (ب − أ) (د) ١

٦ إذا كان : أ^{٢} − ب^{٢} = ٦ ، أ − ب = $\sqrt{٣}$ فإن : (أ + ب)^{٢} = ... (الدقهلية ١٨)

(أ) ٢ $\sqrt{٣}$ (ب) ٣ $\sqrt{٣}$ (جـ) $\sqrt{٣}$ (د) ١٢

---

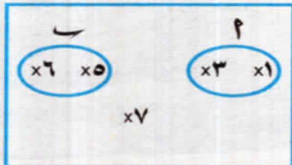
٢ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان :

ل (أ) = ٠,٦ ، ل (ب) = ٠,٥ ، ل (أ $\cap$ ب) = ٠,٣

فأوجد : ١ ل (أَ) ٢ ل (أ $\cup$ ب) ٣ ل (ب − أ) (الفيوم ٢٥)

---

٣ (أ) فى الشكل المقابل :



إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية

فأوجد : ١ ل (أ $\cap$ ب) ٢ ل (أ $\cup$ ب)

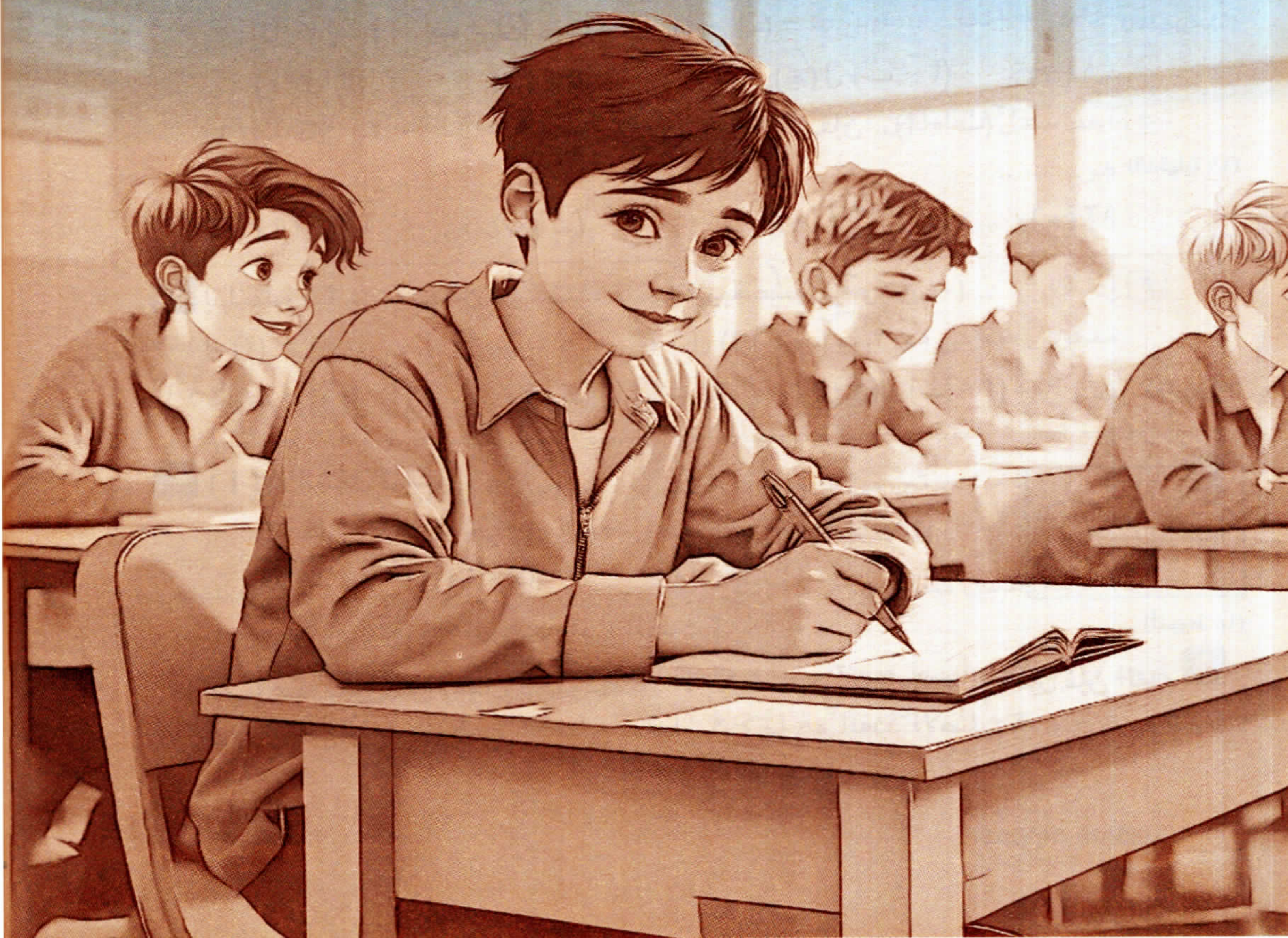
٣ احتمال عدم وقوع الحدث أ (أسيوط ١٨)

(ب) عدد مكون من رقمين مجموعهما ٥ ، إذا عكس (بُدّل) وضع الرقمين فإن العدد الناتج يزيد عن العدد الأصلى بمقدار ٩ ، ما هو العدد الأصلى ؟ (المنيا ١٨)

الأسئلة الهامة

فى الجبر والاحتمال

من امتحانات المحافظات





الأسئلة الهامة على الوحدة الأولى
المعـادلات

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

١ نقطة تقاطع المستقيمين : س + ٣ = صفر ، ص = ٥ هى .... (الإسماعيلية ٢٥)

(أ) (٣ ، ٥) (ب) (-٣ ، ٥) (جـ) (-٣ ، -٥) (د) (٣ ، -٥)

---

٢ المستقيمان : ٣ س = ٧ ، ٢ ص = ٩ .... (الأقصر ١٦)

(أ) متوازيان. (ب) منطبقان.

(جـ) متقاطعان وغير متعامدين. (د) متعامدان.

---

٣ إذا كانت نقطة تقاطع المستقيمين : س - ١ = ٠ ، ص = ٢ ك تقع فى الربع الرابع

فإن : ك يمكن أن تساوى .... (كفر الشيخ ١٦)

(أ) -٥ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٥

---

٤ عدد حلول المعادلتين : س + ص = ٥ ، ص - ٥ = صفر معًا فى ح × ح

هو .... (جنوب سيناء ١٧)

(أ) صفر (ب) واحد. (جـ) اثنان. (د) ثلاثة.

---

٥ عدد حلول المعادلتين : س + ٢ ص = ٥ ، س - ٢ ص = -١ معًا فى ح × ح

هو .... (القاهرة ١٨)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى.

---

٦ عدد الحلول للمعادلتين : ٣ س + ص = ٤ ، ٢ ص + ٦ س = ٣ فى ح × ح

هو .... (أسوان ٢٥)

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) عدد لا نهائى. (د) $\emptyset$

---

٧ عدد حلول المعادلتين : س - $\frac{1}{2}$ ص = ٤ ، ٢ س - ص = ٢ معًا فى $ح^2$

هو .... (القليوبية ١٦)

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) عدد لا نهائى. (د) صفر

٨ المستقيمان : ٣ س + ٥ ص = صفر ، ٥ س − ٣ ص = صفر متقاطعان في .... (الجيزة ٢٢)

(أ) الربع الأول. (ب) الربع الثانى. (جـ) نقطة الأصل. (د) الربع الثالث.

---

٩ إذا كان المستقيمان : س + ٢ ص = ٤ ، ٢ س + ك ص = ١١ متوازيين فإن : ك = ... (المنوفية ٢٥)

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

---

١٠ معادلتا الدرجة الأولى فى متغيرين اللتان لهما عدد لا نهائى من الحلول معًا فى ح × ح يمثلهما مستقيمان .... (الدقهلية ١٦)

(أ) متوازيان. (ب) متقاطعان فى نقطة وحيدة.

(جـ) متباعدان. (د) منطبقان.

---

١١ إذا تقاطع مستقيمان فى نقطتين فإن عدد حلول المعادلتين الممثلتين بالمستقيمين .... (قنا ١٨)

(أ) حل وحيد. (ب) حلان. (جـ) عدد لا نهائى. (د) لا يوجد حل.

---

١٢ إذا كان للمعادلتين : س + ٢ ص = ٣ ، ٣ س + ك ص = ٩ عدد لا نهائى من الحلول معًا فى ح × ح فإن : ك = ... (الإسماعيلية ٢٣)

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ٩

---

١٣ عدد حلول المعادلة : س − ص = ٠ فى ح × ح هو .... (الغربية ١٩)

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائى.

---

١٤ مجموعة حل المعادلتين الآنيتين : $\frac{١}{٢}$ س = ١ ، س + ص = ١ فى ح × ح هى .... (الشرقية ١٨)

(أ) {(٢ ، ١)} (ب) {(٢ ، −١)} (جـ) {٢ ، −١} (د) (٢ ، −١)

---

١٥ مجموعة حل المعادلتين : س + ص = صفر ، ص − ٥ = صفر فى ح × ح هى .... (الجيزة ٢٣ - الإسماعيلية ١٦)

(أ) {(−٥ ، ٥)} (ب) {(٥ ، −٥)} (جـ) {(٥ ، ٥)} (د) {(−٥ ، −٥)}

١٦ مجموعة حل المعادلتين : س + ٣ ص = ٥ ، س − ٣ ص = −١ فى ح × ح

هى .... **(المنيا ١٦)**

(أ) {(٢ ، ١)} (ب) {(١ ، ٢)} (جـ) {(٢ ، ٣)} (د) {(٣ ، ٢)}

---

١٧ مجموعة حل المعادلتين : س − ٢ ص = ١ ، ٣ س + ص = ١٠ فى ح × ح

هى .... **(شمال سيناء ١٧)**

(أ) {(٥ ، ٢)} (ب) {(٢ ، ٤)} (جـ) {(١ ، ٣)} (د) {(٣ ، ١)}

---

١٨ عددان موجبان مجموعهما ٨ ، حاصل ضربهما ١٥ فإن العددين

هما .... **(السويس ١٦)**

(أ) ٢ ، ٦ (ب) ٣ ، ٥ (جـ) ٤ ، ٤ (د) ١ ، ١٥

---

١٩ المنحنى ص = أ س^{٢} + ب س + جـ يقطع محور الصادات فى النقطة .... حيث

أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية ، أ ≠ ٠ **(المنيا ١٨)**

(أ) (٠ ، ب) (ب) (ب ، ٠) (جـ) (جـ ، ٠) (د) (٠ ، جـ)

---

٢٠ إذا كان منحنى الدالة التربيعية د لا يقطع محور السينات فى أى نقطة فإن عدد حلول

المعادلة : د (س) = ٠ فى ح هو .... **(أسوان ٢٥)**

(أ) حلان. (ب) عدد لا نهائى من الحلول.

(جـ) صفر. (د) حل وحيد.

---

٢١ إذا كان منحنى الدالة التربيعية د يمر بالنقاط (−١ ، ٠) ، (٠ ، −٤) ، (٤ ، ٠)

فإن مجموعة حل المعادلة : د (س) = ٠ فى ح هى .... **(الغربية ١٩)**

(أ) {−١ ، ٠} (ب) {−٤ ، ٠} (جـ) {−١ ، ٤} (د) {٤ ، −٤}

---

٢٢ إذا كانت مجموعة حل المعادلة : س^{٢} − أ س + ٤ = ٠ فى ح هى {−٢}

فإن : أ = ... **(الغربية ١٧)**

(أ) −٢ (ب) −٤ (جـ) ٢ (د) ٤

٢٣ القانون العام لحل معادلة الدرجة الثانية : $أ س^٢ + ب س + ح = ٠$ حيث أ ، ب ، ح أعداد حقيقية ، $أ \neq ٠$ هو س = ... (دمياط ١٨)

(أ) $\frac{-ب^٢ \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ ح}}{٢ أ}$ (ب) $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ ح}}{٢ أ}$

(جـ) $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٢ أ ح}}{٤ أ}$ (د) $\frac{-ب \pm \sqrt{ح^٢ - ٤ أ ح}}{٢ ح}$

٢٤ فى المعادلة : $أ س^٢ + ب س + ح =$ صفر حيث أ ، ب ، ح أعداد حقيقية ، $أ \neq ٠$

إذا كان : $ب^٢ - ٤ أ ح >$ صفر فإن عدد جذور المعادلة فى ح هو .... (الفيوم ١٩)

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) لا نهائى.

٢٥ إذا كان : ص = ٣ ، $س^٢ =$ ص + ٦ فإن : س = ... (القليوبية ٢٥)

(أ) ١٠ (ب) ٣ (جـ) ‎-٣ (د) $\pm$ ٣

٢٦ أحد حلول المعادلتين : س − ص = ٢ ، $س^٢ + ص^٢ = ٢٠$ فى ح × ح هو .... (القليوبية ١٩ - قنا ١٧)

(أ) (‎-٤ ، ٢) (ب) (٢ ، ‎-٤) (جـ) (٣ ، ١) (د) (٤ ، ٢)

٢٧ إذا كانت : س = ص + ١ ، $(ص - س)^٢ +$ ص = ٣

فإن : س = ... (المنوفية ١٦)

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) ٢

٢٨ إذا كان : أ ب = ٣ ، $أ ب^٢ = ١٢$ فإن : ب = ... (دمياط ١٩ - كفر الشيخ ١٧ - قنا ١٦)

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ‎-٢ (د) $\pm$ ٢

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد جبريًا فى ح × ح مجموعة حل المعادلتين فى كل مما يأتى :

١ س − ص = ٤ ، ٢ س + ص = ٥ (الغربية ٢٢)

٢ س + ص = ٤ ، ٢ س − ص = ٢ (بنى سويف ١٧ - أسوان ١٧ - أسيوط ١٦)

٣ س + ٢ ص = ٤ ، ٣ س − ص = ٥ (الجيزة ١٩)

٤ ٢ س − ص = ٣ ، س + ٢ ص = ٤ (الأقصر ٢٣ - جنوب سيناء ١٨ - قنا ١٧)

٥ ٣ س − ص + ٤ = ٠ ، ص = ٢ س + ٣ (أسيوط ١٩ - الإسماعيلية ١٨)

٢ أوجد فى ح × ح مجموعة حل المعادلتين الآتيتين بيانيًا :

١ س + ٢ ص = ٤ ، س − ص = ١ (كفر الشيخ ٢٣)

٢ ص = ٢ س − ٣ ، س + ٢ ص = ٤ (كفر الشيخ ٢٢ - دمياط ١٩ - الأقصر ١٦ - قنا ١٦)

٣ ٢ س + ص = ١ ، س + ٢ ص = ٥ (الإسكندرية ١٦)

٤ ٣ س + ص = ٣ ، ٢ س − ص = ٧ (بنى سويف ١٩)

٥ ٣ س − ص + ٤ = ٠ ، ص = ٢ س + ٣ (الفيوم ١٩)

---

٣ أوجد مجموعة حل المعادلتين الآتيتين معًا فى ح × ح :

١ س + ص = ١١ ، س − ٢ ص = ٢ (القاهرة ١٨)

٢ س − ص = ٤ ، ٣ س + ٢ ص = ٧ (قنا ٢٢ - الشرقية ١٧)

٣ ٣ س + ٢ ص = ٤ ، س − ٣ ص = ٥ (الجيزة ٢٥)

٤ ٢ س = ١ − ص ، س + ٢ ص = ٥ (القليوبية ١٧)

٥ ٢ س − ص = ٢ ، س + ٢ ص = ١١ (القاهرة ٢٣)

٦ س = ص + ٤ ، ٣ س + ٤ ص = ٥ (الدقهلية ١٨)

٧ ٣ س − ص = −٤ ، ص − ٢ س = ٣ (أسوان ١٩)

---

٤ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية باستخدام القانون العام :

١ $س^2$ + ٣ س − ٣ = ٠ (مقربًا الناتج لأقرب رقم عشرى واحد) (دمياط ٢٢)

٢ ٢ $س^2$ − ٦ س + ١ = ٠ (مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين) (القليوبية ٢٥)

٣ ٣ $س^2$ + ١ = ٥ س (مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين) (كفر الشيخ ١٩)

٤ س (س + ٣) = ١ (مقربًا الناتج لأقرب رقم عشرى واحد) (الإسماعيلية ٢٣)

٥ س + $\frac{١}{س}$ + ٣ = ٠ حيث س ≠ ٠ (مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين) (مطروح ١٩)

٦ $\frac{س}{٣} = \frac{١}{٥ - س}$ (مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين) (الغربية ١٦)

٧ $س^2$ − ٣ س + ١ = ٠ (متخذًا $\sqrt{٥}$ ≈ ٢,٢٤) (السويس ١٧ - الشرقية ١٦)

٨ ٢ $س^2$ − س − ٢ = ٠ (حيث $\sqrt{١٧}$ ≈ ٤,١٢) (الأقصر ١٩)

٩ $س^2$ + ٢ س − ٤ = ٠ (بدون استخدام حاسبة الجيب) (الغربية ١٩)

٥ أوجد مجموعة حل المعادلتين الآتيتين فى ح × ح :

١ س − ٣ = صفر ، $س^٢ + ص^٢ = ٢٥$ (القاهرة ١٩)

٢ س − ص = صفر ، س ص = ١٦ (الجيزة ٢٥)

٣ ٢ س − ص = ٤ ، س ص = ٦ (الفيوم ١٨)

٤ س + ص = ٥ ، $س^٢ + ص^٢ = ١٣$ (الجيزة ٢٢)

٥ س − ص = ٢ ، $س^٢ − ٥ ص = ٤$ (شمال سيناء ١٧)

٦ س − ص = ١ ، $س^٢ −$ س ص = ٠ (جنوب سيناء ١٧)

٧ ص − س = ٢ ، $س^٢ +$ س ص − ٤ = ٠ (القليوبية ١٨ - المنوفية ١٨ - الأقصر ١٦)

٨ س − ص = صفر ، $س^٢ +$ س ص + $ص^٢ = ٢٧$ (القليوبية ١٩ - الإسكندرية ١٩)

٩ س − ٢ ص − ١ = ٠ ، $س^٢ −$ س ص = ٠ (كفر الشيخ ١٩)

---

٦ أوجد قيمتى أ ، ب علمًا بأن (١ ، −١) حل للمعادلتين :

أ س + ب ص = ٧ ، أ س − ب ص = ٣ (الشرقية ١٦)

---

٧ أوجد قيمتى أ ، ب علمًا بأن (١ ، ٢) حل للمعادلتين :

أ س + ب ص = −٥ ، ٢ أ س + ب ص = ٢ (الدقهلية ٢٥)

---

٨ أوجد قيمتى أ ، ب علمًا بأن (٣ ، −١) حل للمعادلتين :

أ س + ب ص − ٥ = ٠ ، ٣ أ س + ب ص = ١٧ (الغربية ٢٥)

---

٩ إذا كان (أ ، ٢ ب) حلًا للمعادلتين : ٣ س − ص = ٥ ، س + ص = −١

فأوجد قيمتى : أ ، ب (الدقهلية ١٧)

---

١٠ إذا كان : (٢ أ + ب ، ٣) = (١٨ ، أ − ب) فأوجد قيمتى : أ ، ب موضحًا خطوات الحل. (المنوفية ١٧)

---

١١ عددان حقيقيان مجموعهما ٤٠ ، الفرق بينهما ١٠ أوجد العددين. (القاهرة ١٩)

١٢ زاويتان متكاملتان قياس إحداهما أربعة أمثال الأخرى فما قياس كل منهما ؟ (قنا ٢٥)

---

١٣ عددان نسبيان مجموعهما ١٢ ، وثلاثة أمثال أصغرهما يزيد عن ضعف أكبرهما بمقدار واحد. أوجد العددين. (البحيرة ١٧)

---

١٤ عدد مكون من رقمين مجموعهما ١١ وإذا عكس (بدل) وضع الرقمين فإن العدد الناتج يزيد عن العدد الأصلى بمقدار ٢٧ ما هو العدد الأصلى ؟ (كفر الشيخ ١٦)

---

١٥ عددان إذا أضيف ثلاثة أمثال العدد الأول إلى ضعف العدد الثانى كان الناتج ١٣ وإذا أضيف العدد الأول إلى ثلاثة أمثال العدد الثانى كان الناتج ١٦ فما العددان ؟ (بورسعيد ١٧)

---

١٦ مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٥ سم ، ومحيطه ١٨ سم ، أوجد كلًا من بعدى المستطيل. (الدقهلية ١٦)

---

١٧ عددان حاصل ضربهما ١٠ ، والفرق بينهما ٣ أوجد العددين. (الإسماعيلية ١٩)

---

١٨ عددان حقيقيان موجبان الفرق بينهما ١ ومجموع مربعيهما ٢٥ أوجد العددين. (بنى سويف ٢٢)

---

١٩ مستطيل محيطه ١٨ سم ومساحته ١٨ سم^{٢} ، أوجد كلًا من بعديه. (الوادى الجديد ١٦)

---

٢٠ مستطيل يزيد طوله عن عرضه بمقدار ٣ سم ، مساحته تساوى ٢٨ سم^{٢}. أوجد محيطه. (الدقهلية ٢٥)

الأسئلة الهامة على الوحدة الثانية
دوال الكسور الجبرية والعمليات عليها

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

١ مجموعة أصفار الدالة د حيث د (س) = −٣ س هى .... (المنوفية ٢٣)

(أ) {٠}　(ب) {٣}　(جـ) ∅　(د) ح

٢ مجموعة أصفار الدالة د حيث د (س) = ٢ س − ٦ هى .... (الإسماعيلية ١٩)

(أ) {١}　(ب) {٣}　(جـ) {٥}　(د) {٧}

٣ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = س (س − ١) هى .... (الغربية ٢٢)

(أ) {٠ ، ١}　(ب) {٠ ، −١}　(جـ) {−١ ، ١}　(د) {١}

٤ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = صفر هى .... (بورسعيد ٢٥ - القاهرة ١٩)

(أ) ح − {صفر}　(ب) ∅　(جـ) {صفر}　(د) ح

٥ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = ٩ هى .... (المنوفية ٢٥ - السويس ١٦)

(أ) {٩}　(ب) {٠}　(جـ) ∅　(د) ح − {٩}

٦ إذا كان : ص (د) = ∅　فإن : د (س) يمكن أن تكون .... (الشرقية ٢٥)

(أ) $س^2 + ٤$　(ب) س − ٤　(جـ) $س^2 - ٤$　(د) س + ٤

٧ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = $س^2 - ١٦$ هى .... (الإسكندرية ٢٢)

(أ) {−٤}　(ب) {٤}　(جـ) {٤ ، −٤}　(د) ∅

٨ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = $(س - ١)^2 (س + ٢)$ هى .... (السويس ١٧)

(أ) {١ ، −٢}　(ب) {−١ ، ٢}　(جـ) {−١ ، −٢}　(د) {١ ، ٢}

٩ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = $\frac{س - ٢}{٧}$ هى .... (القاهرة ١٦)

(أ) {٧}　(ب) {٢ ، ٧}　(جـ) {٢}　(د) ∅

١٠ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = $\frac{س - ٣}{س + ٢}$ هى .... (الغربية ٢٣)

(أ) {٣} (ب) {-٢} (جـ) ع - {-٢} (د) ∅

---

١١ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = $\frac{س^٣ + س}{س^٣ - س}$ هى .... (البحر الأحمر ١٦)

(أ) {٠ ، ١} (ب) {١} (جـ) {٠} (د) ∅

---

١٢ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = $\frac{س^٢ - س - ٢}{س^٢ + ٤}$ هى .... (الغربية ١٧)

(أ) {٢ ، -٢} (ب) {-٢ ، -١} (جـ) {٢ ، -١} (د) {١ ، -١}

---

١٣ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = $\frac{(س + ١)(س - ٣)}{س^٢ - ٤}$ هى .... (المنيا ١٨)

(أ) {٣ ، -٣} (ب) {-٣ ، -١} (جـ) {٣ ، -١} (د) {٢ ، -٢}

---

١٤ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = $\frac{س^٢ - ٩}{س - ٢}$ هى .... (البحر الأحمر ٢٣)

(أ) {٢} (ب) ع - {٢} (جـ) {٣ ، -٣} (د) {٣ ، -٣ ، ٢}

---

١٥ مجال الدالة د حيث د (س) = $\frac{٧}{س - ٥}$ هو .... (الجيزة ١٦)

(أ) ع (ب) ع - {٠} (جـ) ع - {٥} (د) ع - {٠ ، ٥}

---

١٦ مجال الدالة د : د (س) = ٩ هو .... (القاهرة ٢٥)

(أ) ع (ب) ع - {٩} (جـ) {٩} (د) ع - {-٩}

---

١٧ مجال الدالة د حيث د (س) = $\frac{س - ٧}{٣ (س + ١)}$ هو .... (البحيرة ١٦)

(أ) ع (ب) ع - {-١} (جـ) ع - {١} (د) ع - {-١ ، ٣}

---

١٨ مجال الدالة د حيث د (س) = $\frac{س + ٢}{٥ س}$ هو .... (القليوبية ١٧)

(أ) ع - {٥} (ب) ع - {-٥} (جـ) ع (د) ع - {٠}

---

١٩ مجال الدالة ن : ن (س) = $\frac{س - ١}{س^٢ - ٩}$ هو .... (الجيزة ٢٥)

(أ) ع (ب) ع - {١} (جـ) ع - {٩} (د) ع - {٣ ، -٣}

٢٠ إذا كان : $ن_١ (س) = \frac{س_١ (س)}{د_١ (س)}$ ، $ن_٢ (س) = \frac{س_٢ (س)}{د_٢ (س)}$

فإن المجال المشترك للدالتين $ن_١$ ، $ن_٢$ هو .... **(الوادى الجديد ١٧)**

(أ) ح − (ص ($د_١$) ∪ ص ($د_٢$)) (ب) ح − (ص ($د_١$) ∩ ص ($د_٢$))

(جـ) ص ($د_١$) ∪ ص ($د_٢$) (د) ص ($د_١$) ∩ ص ($د_٢$)

---

٢١ المجال المشترك للكسرين $\frac{٢}{س - ٣}$ ، $\frac{٧}{٢ س - ٦}$ هو .... **(الغربية ١٦)**

(أ) ح (ب) ح − {٠ ، ٣} (جـ) ح − {٣} (د) ح − {٣ ، −٣}

---

٢٢ المجال المشترك للكسرين $\frac{س}{س + ١}$ ، $\frac{س + ٢}{س^٢ + ٤}$ هو .... **(الإسماعيلية ١٦)**

(أ) {−١} (ب) {−١ ، −٤}

(جـ) ح − {−١} (د) ح − {−١ ، ٢ ، −٢}

---

٢٣ أبسط صورة للدالة د : د (س) = $\frac{٣ - س}{س - ٣}$ ، س ≠ ٣ هى .... **(السويس ١٦)**

(أ) ٣ (ب) ١ (جـ) −١ (د) صفر

---

٢٤ أبسط صورة للدالة ن حيث ن (س) = $\frac{٤ س^٢ - ٢ س}{٢ س}$ ، س ≠ ٠

هى .... **(جنوب سيناء ١٨)**

(أ) ٤ $س^٢$ (ب) ٤ س (جـ) ٢ س (د) ٢ س − ١

---

٢٥ إذا كانت : ص (د) = {٣} ، د (س) = ٢ س + أ فإن : أ = ... **(الفيوم ١٦)**

(أ) صفر (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) −٦

---

٢٦ إذا كانت : ص (د) = {٢} ، د (س) = $س^٣$ − م فإن : م = ... **(أسيوط ١٨)**

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

---

٢٧ إذا كانت : س = ٣ أحد أصفار الدالة د : د (س) = $\frac{س^٢ - ٢ س - ك}{س^٢ - ٢٥}$

فإن : ك = ... **(كفر الشيخ ١٨)**

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) −٣ (د) −٦

٢٨ إذا كانت : د (س) = $\frac{\text{س} + ٧}{\text{س} - ٧}$ حيث س ∈ ح - {٧ ، -٧}

فإن : د (-٢) = ... (الدقهلية ١٦)

(أ) $\frac{-١}{\text{د} (-٢)}$ (ب) $\frac{-١}{\text{د} (٢)}$ (جـ) $\frac{١}{\text{د} (٢)}$ (د) $\frac{١}{\text{د} (-٢)}$

---

٢٩ إذا كان مجال الدالة ن حيث ن (س) = $\frac{\text{س} - ٢}{\text{س}^٢ + \text{أ}}$ هو ح

فإن : أ .... صفر. (الدقهلية ١٦)

(أ) = (ب) < (جـ) ≥ (د) >

---

٣٠ إذا كانت : د (س) = $\frac{\text{س} + ٣}{\text{س} - ٢}$ فإن مجال المعكوس الجمعى للدالة هو .... (الشرقية ٢٢)

(أ) ح - {٢} (ب) ح - {٢ ، -٣}

(جـ) ح - {-٣} (د) ح

---

٣١ المعكوس الجمعى للكسر الجبرى $\frac{٣}{\text{س}^٢ + ١}$ هو .... (الإسكندرية ١٧)

(أ) $\frac{-٣}{\text{س}^٢ + ١}$ (ب) $\frac{\text{س}^٢ + ١}{٣}$ (جـ) $\frac{\text{س}^٢ + ١}{-٣}$ (د) $\frac{٣}{\text{س}^٢ - ١}$

---

٣٢ إذا كانت : س ∈ ح - {٠ ، ١} فإن : $\frac{١ - \text{س}}{\text{س}} \div \frac{\text{س} - ١}{\text{س}}$ (فى أبسط صورة)

هى .... (بورسعيد ٢٥ - سوهاج ١٨)

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) س - ١ (د) س

---

٣٣ إذا كان : ن (س) = $\frac{\text{س} - ١}{\text{س} + ٣}$ فإن : مجال $\text{ن}^{-١}$ هو .... (مطروح ١٦)

(أ) ح - {-٣} (ب) ح - {١}

(جـ) ح - {-٣ ، ١} (د) {-٣ ، ١}

---

٣٤ إذا كان : ن (س) = $\frac{\text{س}}{\text{س}^٢ + ٩}$ فإن : مجال $\text{ن}^{-١}$ هو .... (الشرقية ١٦)

(أ) ∅ (ب) ح - {-٣ ، ٣}

(جـ) ح (د) ح - {٠}

٣٥ إذا كان للدالة د : د $(س) = \frac{س^٢ - ٩}{س}$ معكوس ضربى فإن مجالهما المشترك هو .... (المنوفية ١٦)

(أ) ح - {٠} (ب) ح - {٠ ، ٣}

(جـ) ح - {٠ ، -٣ ، ٣} (د) ح

---

٣٦ إذا كان : $ن^{-١}(س) = س$ حيث س ≠ صفر فإن : ن (٢) = ... (القاهرة ٢٥)

(أ) -٢ (ب) $-\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ٢

---

٣٧ إذا كان للكسر الجبرى $\frac{س - أ}{س + ٥}$ معكوس ضربى هو $\frac{س + ٥}{س + ٣}$

فإن : أ = ... (دمياط ١٧)

(أ) ٣ (ب) -٥ (جـ) -٣ (د) ٥

---

٣٨ مجال المعكوس الضربى للكسر الجبرى $\frac{س - ٢}{س^٣ + ٢٧}$ هو .... (بورسعيد ١٧)

(أ) ح - {٢} (ب) ح - {-٣ ، ٢}

(جـ) ح - {٢ ، -٣ ، ٣} (د) ح - {٣ ، -٣}

---

٣٩ إذا كان : ن $(س) = \frac{س^٢ - ٥ س}{س - ٣}$ فإن مجال $ن^{-١}$ هو .... (الشرقية ١٨)

(أ) ح - {-٣ ، ٥} (ب) ح - {٠ ، ٥}

(جـ) ح - {-٣} (د) ح - {٠ ، ٥ ، ٣}

---

٤٠ إذا كان : ن $(س) = \frac{س^٢ - ٢ س}{(س - ٢)(س^٢ + ٢)}$ فإن مجال $ن^{-١}$ هو .... (الفيوم ١٩)

(أ) ح (ب) ح - {٢} (جـ) ح - {٠} (د) ح - {٠ ، ٢}

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ إذا كانت : د $(س) = س^٣ - ٢ س^٢ - ٧٥$

فأثبت أن : العدد ٥ أحد أصفار هذه الدالة. (جنوب سيناء ١٨)

٢ إذا كانت {−٣ ، ٣} هى مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = س^{٢} + أ

فأوجد : قيمة أ (قنا ١٨)

---

٣ إذا كانت مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = أ س^{٢} + س + ب هى {صفر ، ١}

أوجد : قيمتى الثابتين أ ، ب (الإسكندرية ١٧)

---

٤ إذا كان مجال الدالة د حيث د (س) = $\frac{س + ب}{س + أ}$ هو ح − {−٢} وكانت د (٠) = ٣

فأوجد : قيمة كل من أ ، ب (الفيوم ١٦)

---

٥ إذا كان مجال الدالة ن حيث ن (س) = $\frac{س - ١}{س^{٢} - أ س + ٩}$ هو ح − {٣}

فأوجد : قيمة أ (الإسماعيلية ١٩ - بنى سويف ١٧ - السويس ١٦)

---

٦ إذا كانت مجموعة أصفار الدالة د حيث د (س) = $\frac{س^{٢} - أ س + ٩}{ب س + ٤}$ هى {٣} ومجالها هو ح − {٢} **فأوجد :** قيمتى أ ، ب (المنوفية ١٩)

---

٧ إذا كانت : ن (س) = $\frac{س + \frac{١}{س}}{٤ س + \frac{٤}{س}}$ **فأوجد :** ن (س) فى أبسط صورة موضحًا المجال. (دمياط ١٧)

---

٨ إذا كانت : د (س) = $\frac{س^{٢} - ٩}{س + ب}$ ، د (٤) = ١ **فأوجد :** قيمة ب (البحيرة ١٧)

---

٩ عين المجال للدالة الكسرية الآتية

ثم أوجد : ن (صفر) ، ن (٢) حيث : ن (س) = $\frac{س^{٢} - ١}{س^{٢} + ١}$ (البحر الأحمر ١٨)

---

١٠ **أوجد المجال المشترك للكسرين الجبريين :** $\frac{س - ٤}{س^{٢} - ٥ س + ٦}$ ، $\frac{٢ س}{س^{٣} - ٩ س}$ (الأقصر ١٩)

---

١١ إذا كان : $ن_{١}$ (س) = $\frac{س^{٢} + س - ١٢}{س^{٢} + ٥ س + ٤}$ ، $ن_{٢}$ (س) = $\frac{س^{٢} - ٢ س - ٣}{س^{٢} + ٢ س + ١}$

فأثبت أن : $ن_{١}$ (س) = $ن_{٢}$ (س) لجميع قيم س التى تنتمى إلى المجال المشترك ، وأوجد هذا المجال. (بنى سويف ١٦)

---

١٢ إذا كان : $ن_{١}$ (س) = $\frac{س^{٢}}{س^{٣} - س^{٢}}$ ، $ن_{٢}$ (س) = $\frac{س^{٣} + س^{٢} + س}{س^{٤} - س}$

أثبت أن : $ن_{١}$ = $ن_{٢}$ (القليوبية ٢٢ - المنيا ١٩ - الإسكندرية ١٨ - أسيوط ١٧)

١٣ إذا كان : $ن_١ (س) = \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ + س - ٦}$ ، $ن_٢ (س) = \frac{س^٣ - س^٢ - ٦ س}{س^٣ - ٩ س}$

بين ما إذا كان : $ن_١ = ن_٢$ أم لا ، مع ذكر السبب (الفيوم ١٩)

---

١٤ إذا كانت : $ن_١ (س) = \frac{س}{س^٢ - س}$ ، $ن_٢ (س) = \frac{س^٢ + س + ١}{س^٣ - ١}$

فبيِّن هل : $ن_١ = ن_٢$ أم لا ، مع ذكر السبب (الغربية ٢٥)

---

١٥ **أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن حيث :**

$ن (س) = \frac{س - ٥}{س^٢ - ٧ س + ١٠} + \frac{س^٢ + ٢ س + ٤}{س^٣ - ٨}$ (الإسماعيلية ١٦)

---

١٦ **أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن حيث :**

$ن (س) = \frac{٣ س}{س^٢ - س - ٢} + \frac{س - ١}{١ - س^٢}$ (مطروح ١٩)

---

١٧ **أوجد ن (س) فى أبسط صورة موضحًا المجال :**

$ن (س) = \frac{س^٢ + ٤ س}{س^٢ - ١٦} + \frac{٤ س + ٨}{س^٢ - ٢ س - ٨}$ (القليوبية ٢٥)

---

١٨ **أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن حيث :** $ن (س) = \frac{س}{س + ١} + \frac{٢ س^٢}{س^٣ - س}$

(سوهاج ١٧)

---

١٩ **ضع فى أبسط صورة :** $ن (س) = \frac{س^٢ - ٩}{س^٢ - س - ٦} + \frac{٤ س - س^٢}{س^٢ - ٢ س - ٨}$

ثم أوجد إن أمكن : ن (٣) (الدقهلية ١٦)

---

٢٠ **أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن حيث :** $ن (س) = \frac{س + ٣}{س^٢ + ٦ س + ٩} + \frac{س + ٢}{س + ٣}$

ثم أوجد : ن (−٣) ، ن (٢٠١٦) إن أمكن ذلك. (الشرقية ١٦)

---

٢١ إذا كان مجال ن : $ن (س) = \frac{ب}{س - ٢} + \frac{٦}{٢ س + أ}$ هو ح − {٢} وكان : ن (٥) = ٨

فأوجد : قيمتى أ ، ب (المنوفية ١٦)

---

٢٢ إذا كان مجال الدالة ن : $ن (س) = \frac{ب}{س} - \frac{٩}{س + أ}$ هو ح − {٠ ، −٤} ، ن (٥) = ٢

فأوجد : قيمة كل من أ ، ب (كفر الشيخ ٢٢)

٢٣ إذا كان مجال الدالة ن حيث ن (س) = $\frac{٤}{س + أ}$ + $\frac{ب}{٢ س}$ هو ح − {٠ ، −٥} وكان :
ن (٣) = ١ فأوجد : قيمتى أ ، ب (المنوفية ١٧)

---

٢٤ اختصر ن (س) إلى أبسط صورة حيث : ن (س) = $\frac{٣ س}{س^٢ - ٢ س}$ − $\frac{١٢}{س^٢ - ٤}$ مبينًا المجال.
(البحيرة ١٧)

---

٢٥ أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن حيث :
ن (س) = $\frac{س + ٢}{س^٢ + ٣ س + ٢}$ − $\frac{س^٢ - س}{١ - س^٢}$ (الجيزة ٢٥)

---

٢٦ أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن حيث :
ن (س) = $\frac{٣ س - ٤}{س^٢ - ٥ س + ٦}$ − $\frac{٢ س + ٦}{٦ - س - س^٢}$ (الشرقية ١٨)

---

٢٧ أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن :
ن (س) = $\frac{س^٢ + ٢ س}{س^٢ - ٤}$ − $\frac{٢ س - ٦}{س^٢ - ٥ س + ٦}$ (دمياط ٢٣)

---

٢٨ أوجد ن (س) فى أبسط صورة موضحًا مجال ن حيث :
ن (س) = $\frac{٣ س - ٦}{س^٢ - ٤}$ − $\frac{٩}{٢ - س - س^٢}$ ثم أوجد : ن (١) إن أمكن. (الدقهلية ١٨)

---

٢٩ أوجد ن (س) فى أبسط صورة موضحًا المجال :
ن (س) = $\frac{س^٢ - ٣ س - ٤}{س^٢ - ١}$ × $\frac{س^٢ - س}{س^٢ + ٣ س}$ (القليوبية ١٦)

---

٣٠ أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن :
ن (س) = $\frac{س + ١}{س^٢ - س - ٢}$ × $\frac{س^٢ + ٣ س - ١٠}{٣ س^٢ + ١٦ س + ٥}$ (أسوان ٢٥)

---

٣١ إذا كان : ن (س) = $\frac{س - ٢}{س^٢ - ٥ س + ٦}$ × $\frac{س^٢ - ٩}{س + ٣}$
أوجد : ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن ثم أوجد : ن (٠) (الإسماعيلية ١٦)

٣٢ أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن حيث :

$$ن(س) = \frac{س^٣ - ١}{س^٢ + ٢س + ١} \times \frac{٢س + ٢}{س^٢ + س + ١}$$

ثم أوجد : ن (١) ، ن (–١) إن أمكن (الإسماعيلية ١٨)

---

٣٣ إذا كان : $ن(س) = \frac{س^٢ - ٣س}{س^٢ - ٩} \div \frac{٢س}{س + ٣}$

أوجد ن (س) فى أبسط صورة موضحًا مجال ن (أسوان ١٧ - سوهاج ١٧ - كفر الشيخ ١٧)

---

٣٤ أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن حيث :

$$ن(س) = \frac{س^٢ - ٢س - ١٥}{س^٢ - ٩} \div \frac{٢س - ١٠}{س^٢ - ٦س + ٩}$$ (الغربية ١٨ - الإسكندرية ١٦)

---

٣٥ أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن حيث :

$$ن(س) = \frac{س^٢ - ٣س}{٢س^٢ - س - ٦} \div \frac{٢س^٢ - ٣س}{٤س^٢ - ٩}$$ (الأقصر ١٩)

---

٣٦ إذا كانت : $ن(س) = \frac{س^٣ - ٨}{س^٢ - ٦س + ٥} \div \frac{س^٣ + ٢س^٢ + ٤س}{٢س^٢ - ٥س - ٣}$

أوجد : ن (س) فى أبسط صورة مبينًا المجال

ثم أوجد : ن (١) ، ن (٠) إن أمكن (المنوفية ١٦)

---

٣٧ إذا كان : $ن(س) = \frac{س}{س + ٣}$

١ أوجد : $ن^{-١}(س)$ موضحًا مجال $ن^{-١}$

٢ إذا كان : $ن^{-١}(س) = ٤$ أوجد : قيمة س (القاهرة ١٩)

---

٣٨ إذا كان : $ن(س) = \frac{س - ٢}{س + ١}$

فأوجد : ١ مجال $ن^{-١}$ ٢ $ن^{-١}(٣)$ (القليوبية ١٧ - الإسكندرية ١٦)

---

٣٩ إذا كان للكسر الجبرى : $\frac{س + ٢}{س^٢ - ٤}$ معكوس ضربى هو $\frac{س - ٢}{هـ}$

فأوجد : قيمة هـ (السويس ١٧)



الأسئلة الهامة على الوحدة الثالثة
الاحتمـــال

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

١ إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية

فإن : ل (أ ∩ ب) = ... (قنا ٢٥)

(أ) {٠} (ب) صفر (جـ) ل (أ) (د) ل (ب)

---

٢ إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما وكان : ل (أ) = $\frac{٣}{٥}$

، ل (ب) = $\frac{٢}{٥}$ فإن : ل (أ ∩ ب) = ... (القاهرة ١٨)

(أ) صفر (ب) $\frac{١}{٥}$ (جـ) ١ (د) ∅

---

٣ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان : ب ⊂ أ ، ب ≠ أ

فإن : ل (أ ∩ ب) = ... (دمياط ٢٣ - السويس ١٨)

(أ) صفر (ب) ل (أ) (جـ) ل (ب) (د) ل (أ ∪ ب)

---

٤ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة ف ، أ ⊂ ب

فإن : ل (أ ∪ ب) = ... (الأقصر ٢٥)

(أ) ل (ب) (ب) ل (أ) (جـ) ل (أ ∩ ب) (د) صفر

---

٥ إذا ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة فإن احتمال ظهور عدد زوجي وظهور عدد فردى

معًا يساوى .... (الإسكندرية ١٦)

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) صفر (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) ١

---

٦ فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة فإن احتمال ظهور عدد أقل من ٣

يساوى .... (الجيزة ١٦ - القليوبية ١٦)

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

---

٧ إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية

فإن : ل (أ − ب) = ... (بنى سويف ٢٣)

(أ) ل (ب) (ب) ل (أ) (جـ) ل (أ') (د) ل (ب')

٨ إذا كان : ٢ ، ب حدثين من فضاء عينة ف وكان : ٢ ⊂ ب ، ل (٢) = ٠,٢
، ل (ب) = ٠,٦ فإن : ل (ب − ٢) = ... (الأقصر ١٩)

(أ) ٠,٢ (ب) ٠,٤ (جـ) ٠,٦ (د) ٠,٨

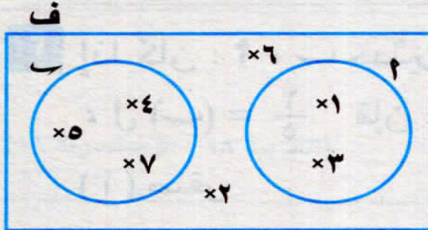
---

٩ إذا كان : ٢ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما وكان : ل (٢) = ٠,٧
، ل (٢ − ب) = ٠,٥ فإن : ل (٢ ∩ ب) = ... (الغربية ١٦)

(أ) ٠,٦ (ب) ٠,٤ (جـ) ٠,٣ (د) ٠,٢

---

١٠ فى الشكل المقابل :



إذا كان : ٢ ، ب حدثين من فضاء عينة ف لتجربة عشوائية
فإن : ل (ب − ٢) = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٥}{٧}$
(جـ) $\frac{٢}{٧}$ (د) $\frac{٣}{٧}$ (كفر الشيخ ١٩)

---

١١ إذا سحبت بطاقة عشوائيًا من بين ٢٠ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٢٠
فإن احتمال أن تحمل هذه البطاقة عددًا مضاعفًا للعدد ٧ هو .... (البحيرة ١٧)

(أ) ١٠٪ (ب) ١٥٪ (جـ) ٢٠٪ (د) ٢٥٪

---

١٢ إذا كان : ٢َ هو الحدث المكمل للحدث ٢ فى فضاء عينة لتجربة عشوائية
فإن : ل (٢) + ل (٢َ) = ... (الأقصر ١٧)

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) صفر

---

١٣ إذا كان : س ⊂ ف ، سَ هو الحدث المكمل للحدث س
فإن : ل (س ∩ سَ) = ... (أسيوط ١٩)

(أ) صفر (ب) ف (جـ) ∅ (د) ١

---

١٤ إذا كان : ٢َ هو الحدث المكمل للحدث ٢ فإن : ٢َ ∪ ٢ = ... (بورسعيد ٢٥)

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) ف (د) ∅

---

١٥ إذا كان : ل (٢) = ل (٢َ) فإن : ل (٢) = ... (دمياط ١٧)

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) صفر

١٦ إذا كان : ل (أ) = ٠,٦ فإن : ل (أَ) = ... (الإسكندرية ٢٥)

(أ) ٠,٤ (ب) ٠,٦ (جـ) ٠,٥ (د) ١

١٧ إذا كان : ل (أ) = ٤ ل (أَ) فإن : ل (أ) = ... حيث أ حدث من فضاء عينة لتجربة عشوائية. (الوادى الجديد ١٧)

(أ) ٠,٨ (ب) ٠,٦ (جـ) ٠,٤ (د) ٠,٢

١٨ إذا كان احتمال نجاح طالب هو ٩٥٪ فإن احتمال عدم نجاحه هو .... (أسوان ١٧)

(أ) ٢٠٪ (ب) ٥٪ (جـ) ١٠٪ (د) صفر

١٩ إذا كان احتمال رسوب طالب فى امتحان ما هو ٠,٤ فإن احتمال نجاحه هو .... (شمال سيناء ١٧)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) $\frac{٣}{٥}$

٢٠ إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة لتجربة عشوائية وكان : ل (أ) = ٠,٣ ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٦ فإن : ل (بَ) = ... (الفيوم ٢٥)

(أ) ٠,٣ (ب) ٠,٦ (جـ) ٠,٧ (د) ٠,٩

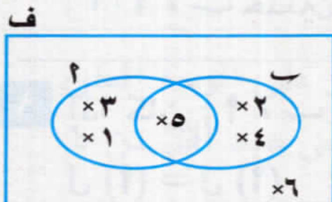
ثانيًا الأسئلة المقالية

١ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان :

ل (أ) = ٠,٤ ، ل (ب) = ٠,٥ ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٧

أوجد : ل (أ ∩ ب) (دمياط ١٧)

٢ باستخدام شكل ﭬن المقابل :



أوجد :

١ ل (أ ∩ ب)

٢ ل (أ ∪ ب) (جنوب سيناء ١٧)

٣ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية ما وكان :

ل (أ) = ٠,٤ ، ل (ب) = ٠,٥ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٢

أوجد : ١ ل (أ ∪ ب) ٢ احتمال عدم وقوع أ (الإسكندرية ٢٥)

---

٤ إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين من تجربة عشوائية ما ، وكان :

ل (أ) = $\frac{١}{٣}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٧}{١٢}$ فأوجد : ل (ب) (أسوان ٢٥ ، دمياط ٢٥)

---

٥ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما وكان :

ل (أ) = $\frac{٣}{٨}$ ، ل (ب) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٥}{٨}$

أوجد : احتمال وقوع أ ، ب معًا (الشرقية ١٨)

---

٦ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان : ل (أ) = $\frac{١}{٤}$ ، ل (ب) = $\frac{٢}{٣}$

أوجد ل (أ ∪ ب) إذا كان :

١ ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٦}$ ٢ أ ⊂ ب (الدقهلية ١٨)

---

٧ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان :

ل (ب) = $\frac{١}{١٢}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{١}{٣}$ أوجد ل (أ) فى كل حالة مما يأتى :

١ أ ، ب حدثان متنافيان. ٢ ب ⊂ أ (الأقصر ١٧ - كفر الشيخ ١٧)

---

٨ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما وكان :

ل (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (ب) = $\frac{١}{٣}$ أوجد ل (أ ∪ ب) إذا كان :

١ ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٨}$

٢ أ ، ب حدثين متنافيين. (أسيوط ٢٣ - أسوان ١٧)

---

٩ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان :

ل (أ) = ل (أ̄) ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{١٦}$ ، ل (ب) = $\frac{٥}{٨}$ ل (أ)

أوجد : ١ ل (ب) ٢ ل (أ ∪ ب) (الفيوم ١٩)

١٠ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما ،

ل (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (ب) = $\frac{٢}{٣}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٣}$

فأوجد : ١ ل (أ ∩ $ب'$) ٢ ل (أ ∪ ب) (القاهرة ٢٥)

---

١١ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان :

ل (أ) = ٠,٦ ، ل (ب) = ٠,٥ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٣

أوجد : ١ ل ($أ'$) ٢ ل (أ ∪ ب)

٣ ل (ب − أ) (الفيوم ٢٥)

---

١٢ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما وكان :

ل (أ) = $\frac{٣}{٨}$ ، ل (ب) = $\frac{٥}{٨}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٤}$

١ أوجد : ل (أ ∪ ب) ٢ أثبت أن : ل ($أ'$) = ل (ب) (القاهرة ١٨)

---

١٣ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما وكان :

ل (أ) = ٠,٦ ، ل (ب) = ٠,٥ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٣

فأوجد : ١ ل (أ ∪ ب) ٢ ل (أ − ب)

٣ ل ($أ'$) (البحر الأحمر ٢٣)

---

١٤ إذا كان ف فضاء عينة لتجربة عشوائية نواتجها متساوية الإمكانات وكان أ ، ب حدثين من ف وكان عدد النواتج التى تؤدى إلى وقوع الحدث أ يساوى ١٣ وعدد النواتج الممكنة للتجربة العشوائية يساوى ٢٤ وكان : ل (أ ∪ ب) = $\frac{٥}{٦}$ ، ل (ب) = $\frac{٥}{١٢}$

أوجد : ١ احتمال وقوع الحدث أ

٢ احتمال وقوع الحدثين أ ، ب معًا (المنيا ١٧)

---

١٥ فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى إذا كان أ هو حدث الحصول على عدد أولى ، ب حدث الحصول على عدد أقل من ٥

فأوجد : ١ احتمال وقوع الحدث أ

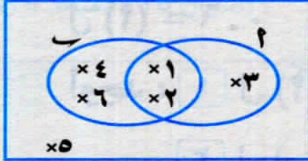
٢ احتمال وقوع الحدثين أ ، ب معًا (الوادى الجديد ١٧)

١٦ فصل دراسى به ٤٠ طالبًا نجح منهم ٣٠ طالبًا فى الرياضيات ، ٢٤ طالبًا فى العلوم ، ٢٠ طالبًا فى الامتحانين معًا ، اختير طالب عشوائيًا . **أوجد احتمال أن يكون الطالب المختار :**

١ ناجحًا فى الرياضيات. ٢ ناجحًا فى العلوم فقط.

٣ ناجحًا فى أحدهما على الأقل. (الأقصر ١٩)

١٧ **باستخدام شكل ڤن المقابل احسب احتمال كل من :**



١ عدم وقوع الحدث أ

٢ وقوع الحدث أ أو ب (بورسعيد ١٧)

١٨ إذا كانت : ف = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨} ، أ = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨}

، ب = {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧}

فأوجد : ١ ل (أ) ، ل (بَ) ٢ ل (أ ∪ ب) (أسيوط ١٩)

١٩ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة ف لتجربة عشوائية ، ل (أ) = $\frac{١}{٢}$

، ٢ ل (ب) = ل (بَ) **أوجد ل (أ ∪ ب) فى كل من الحالتين الآتيتين :**

١ ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٦}$ ٢ أ ، ب حدثان متنافيان. (كفر الشيخ ١٩)

٢٠ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما وكان :

ل (أ) = ٠,٧ ، ل (ب) = ٠,٦ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٤

أوجد : ١ احتمال عدم وقوع الحدث أ

٢ احتمال وقوع الحدث أ دون وقوع الحدث ب

٣ احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل. (المنوفية ١٦)

المراجعة النهائيـة

فى الجبر والاحتمال





مراجعة سريعة
لأهم قواعد وقوانين الجبر والاحتمال

تذكر كيفية حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين

يمكن فى ح × ح حل المعادلتين :

٢ س − ص = ٥ ، س + ٣ ص + ١ = ٠

بيانيًا — جبريًا (طريقة التعويض ، طريقة الحذف)

أولًا بيانيـــًا

ارسم فى المستوى الديكارتى الخطين المستقيمين الممثلين للمعادلتين ليكونا $ل_1$ ، $ل_2$ فتكون مجموعة الحل هى نقط تقاطع المستقيمين.

∵ $ل_1$: ص = ٢ س − ٥

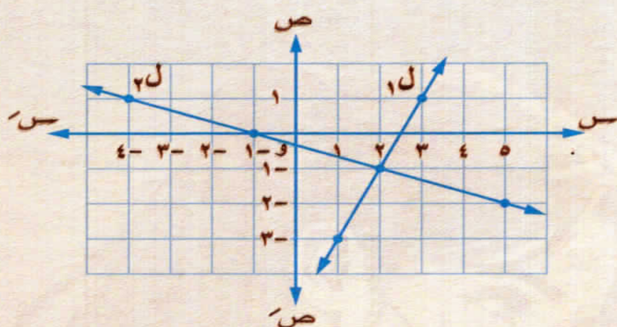
∴

س	١	٢	٣
ص	−٣	−١	١

∵ $ل_2$: س = −٣ ص − ١

∴

س	−١	−٤	٥
ص	٠	١	−٢



من الرسم : مجموعة الحل = {(٢ ، −١)}

لاحظ أنه إذا كان :

- $ل_1$ ، $ل_2$ متوازيين فإن : م.ح = ∅
- $ل_1$ ، $ل_2$ منطبقين فإنه : يوجد عدد لا نهائى من الحلول.

ثانيًا جـبريًا

١ باستخدام طريقة التعويض :

① اجعل أحد المتغيرين فى إحدى المعادلتين فى طرف مستقل على أن يكون معامله الواحد.

∵ ٢ س − ص = ٥

∴ ص = ٢ س − ٥

٢ عوض عن قيمة ص فى المعادلة الثانية واحصل على قيمة س

س + ٣ (٢ س − ٥) + ١ = ٠
∴ س + ٦ س − ١٥ + ١ = ٠
∴ ٧ س = ١٤ ∴ س = ٢

٣ عوض عن قيمة س فى المعادلة الناتجة من الخطوة الأولى واحصل على قيمة ص

ص = ٢ × ٢ − ٥ ∴ ص = −١

∴ مجموعة الحل = {(٢ ، −١)}

٢ باستخدام طريقة الحذف :

١ اكتب كلًا من المعادلتين على الصورة : أ س + ب ص = جـ

٢ س − ص = ٥ (١)
، س + ٣ ص = −١ (٢)

٢ اجعل معامل أحد المتغيرين س أو ص فى إحدى المعادلتين معكوسًا جمعيًا لمعامل نفس المتغير فى المعادلة الأخرى.

بضرب المعادلة (٢) فى −٢ :
∴ −٢ س − ٦ ص = ٢ (٣)

٣ اجمع المعادلتين (١) ، (٣) وأوجد قيمة ص

٢ س − ص = ٥ (١)
−٢ س − ٦ ص = ٢ (٣)
−٧ ص = ٧
∴ ص = −١

٤ عوض عن قيمة ص فى إحدى المعادلتين وأوجد قيمة س

بالتعويض فى المعادلة (١) :
∴ ٢ س − (−١) = ٥
∴ ٢ س + ١ = ٥
∴ ٢ س = ٤ ∴ س = ٢

∴ مجموعة الحل = {(٢ ، −١)}

تذكر كيفية حل معادلتين فى متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية

لحل المعادلتين : ص − س = ٣ ، $س^٢$ + $ص^٢$ − س ص = ١٣ فى ح × ح اتبع طريقة التعويض كما يلى :

١ من معادلة الدرجة الأولى اجعل أحد المتغيرين فى طرف مستقل.

∴ ص − س = ٣
∴ ص = س + ٣

٢ عوض عن قيمة ص فى معادلة الدرجة الثانية فتحصل على معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد.

∴ $س^٢$ + $(س + ٣)^٢$ − س (س + ٣) = ١٣
∴ $س^٢$ + $س^٢$ + ٦ س + ٩ − $س^٢$ − ٣ س − ١٣ = ٠
∴ $س^٢$ + ٣ س − ٤ = ٠

٣ حل المعادلة التى حصلت عليها عن طريق التحليل أو القانون العام فتحصل على قيم لأحد المتغيرين.

∴ (س + ٤) (س − ١) = ٠
∴ س + ٤ = ٠ ومنها س = −٤
أو س − ١ = ٠ ومنها س = ١

٤ أوجد قيم المتغير الآخر بالتعويض فى معادلة الدرجة الأولى الناتجة فى الخطوة (١)

عند س = −٤ :
∴ ص = −٤ + ٣ ∴ ص = −١
، عند س = ١ :
∴ ص = ١ + ٣ ∴ ص = ٤

∴ مجموعة الحل = {(−٤ ، −١) ، (١ ، ٤)}

تذكر حل معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد

أولًا بيانيًا

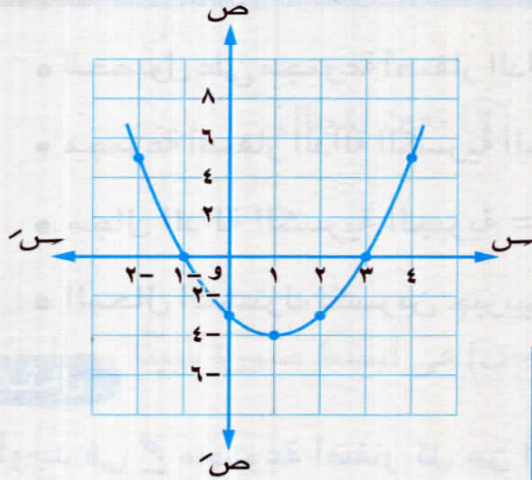
ضع المعادلة على الصورة : أ $س^٢$ + ب س + حـ = ٠ ثم ارسم منحنى الدالة المرتبطة بالمعادلة فتكون مجموعة الحل هى الإحداثيات السينية لنقط تقاطع المنحنى مع محور السينات.

فمثلًا :

لإيجاد مجموعة حل المعادلة : $س^٢$ − ٢ س = ٣ بيانيًا فى ح مستعينًا بالفترة [−٢ ، ٤]

• نضع المعادلة على الصورة : $س^٢$ − ٢ س − ٣ = ٠

● نفرض أن : د (س) = س^2 − ٢ س − ٣



∴

س	−٢	−١	٠	١	٢	٣	٤
ص	٥	٠	−٣	−٤	−٣	٠	٥

من الرسم : مجموعة الحل = {٣ ، −١}

لاحظ أنه

- إذا كان المنحنى يمس محور السينات فى نقطة واحدة فإن للمعادلة حل وحيد فى ح
- إذا كان المنحنى لا يقطع محور السينات فإن مجموعة الحل للمعادلة فى ح هى ∅

ثانيًا باستخدام القانون العام

إذا كانت : أ س^2 + ب س + حـ = ٠ حيث أ ، ب ، حـ أعداد حقيقية ، أ ≠ ٠

فإن : $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤ أ حـ}}{٢ أ}$

فمثلًا :

لإيجاد مجموعة حل المعادلة : س^2 − ٦ س + ٧ = ٠ فى ح

فإن : أ = ١ ، ب = −٦ ، حـ = ٧

∴ $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤ أ حـ}}{٢ أ} = \frac{٦ \pm \sqrt{٣٦ - ٤ \times ١ \times ٧}}{٢ \times ١} = \frac{٦ \pm \sqrt{٨}}{٢}$

$= \frac{٦ \pm ٢\sqrt{٢}}{٢} = ٣ \pm \sqrt{٢}$

∴ $س = ٣ + \sqrt{٢}$ أو $س = ٣ - \sqrt{٢}$

∴ مجموعة الحل = $\{٣ + \sqrt{٢} ، ٣ - \sqrt{٢}\}$

تذكر **كيفية الحصول على أصفار الدالة والمجال والمجال المشترك للكسور الجبرية**

- للحصول على مجموعة أصفار الدالة كثيرة الحدود نضع د (س) = ٠ ونحل المعادلة الناتجة.
- مجموعة أصفار الدالة الكسرية الجبرية = مجموعة أصفار البسط – مجموعة أصفار المقام.
- مجال الدالة الكسرية الجبرية = ح – مجموعة أصفار المقام.
- المجال المشترك لكسرين جبريين أو أكثر = ح – مجموعة أصفار مقامات هذه الكسور.

مثال

أوجد فى ح مجموعة أصفار كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية :

(١) د (س) = ٣ $س^٢$ – ١٥ س

(٢) د (س) = $س^٢$ + ٤

(٣) د (س) = $\frac{س^٢ - ٩}{س^٢ - س - ٦}$ ثم عيِّن مجال د

(٤) د (س) = صفر ، ن (س) = ٥

الحل

(١) بوضع ٣ $س^٢$ – ١٥ س = ٠ ∴ ٣ س (س – ٥) = ٠

∴ س = ٠ أ، س = ٥ ∴ ص (د) = {٠ ، ٥}

(٢) بوضع $س^٢$ + ٤ = ٠

∴ $س^٢$ = –٤ ∴ س = ± $\sqrt{-٤}$

، ∵ $\sqrt{-٤}$ ∉ ح ∴ ص (د) = ∅

(٣) ∵ د (س) = $\frac{(س - ٣)(س + ٣)}{(س - ٣)(س + ٢)}$

∴ مجال د = ح – {٣ ، –٢}

، ص (د) = {٣ ، –٣} – {٣ ، –٢} = {–٣}

(٤) ص (د) = ح ، ص (ن) = ∅

تذكر **كيفية اختزال الكسر الجبرى**

لاختزال الكسر الجبرى نتبع ما يلى :

(١) نحلل كلاً من البسط والمقام تحليلاً تامًا. (٢) نعين المجال.

(٣) نحذف العوامل المشتركة بين البسط والمقام.

مثال

إذا كان : ن (س) = $\frac{س^2 - ٣ س - ١٠}{س^2 - ٢٥}$ **فأوجد :** ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن

الحل

ن (س) = $\frac{(س - ٥)(س + ٢)}{(س - ٥)(س + ٥)}$ ، مجال ن = ح - {٥ ، -٥}

، ن (س) = $\frac{س + ٢}{س + ٥}$

تذكر **تساوى كسرين جبريين**

نقول إن الدالتين $ن_1$ ، $ن_2$ متساويتان إذا تحقق الشرطان الآتيان معًا :

(١) مجال $ن_1$ = مجال $ن_2$

(٢) $ن_1$ (س) = $ن_2$ (س) لكل س ∈ المجال المشترك

مثال

إذا كان : $ن_1$ (س) = $\frac{٣ س}{٣ س + ١٢}$ ، $ن_2$ (س) = $\frac{س^2 + ٤ س}{س^2 + ٨ س + ١٦}$

أثبت أن : $ن_1$ = $ن_2$

الحل

∵ $ن_1$ (س) = $\frac{٣ س}{٣ (س + ٤)}$ ∴ مجال $ن_1$ = ح - {-٤} ، $ن_1$ (س) = $\frac{س}{س + ٤}$

، ∵ $ن_2$ (س) = $\frac{س (س + ٤)}{(س + ٤)^2}$ ∴ مجال $ن_2$ = ح - {-٤} ، $ن_2$ (س) = $\frac{س}{س + ٤}$

∴ مجال $ن_1$ = مجال $ن_2$ ، $ن_1$ (س) = $ن_2$ (س) ∴ $ن_1$ = $ن_2$

ملاحظة

لأى دالتين $ن_1$ ، $ن_2$ إذا كان : $ن_1 (س) = ن_2 (س)$

بينما مجال $ن_1 \neq$ مجال $ن_2$ فإن : $ن_1 = ن_2$ فقط فى المجال المشترك للدالتين $ن_1$ ، $ن_2$

أى أن : المجال الذى تتساوى فيه الدالتان هو المجال المشترك لهاتين الدالتين.

فمثلاً : إذا كان : $ن_1 (س) = \frac{س^2 + 2 س}{س^2 - 4}$ ، $ن_2 (س) = \frac{س^2 - س}{س^2 - 3 س + 2}$

فإن : $ن_1 (س) = \frac{س (س + 2)}{(س + 2)(س - 2)} = \frac{س}{س - 2}$

، مجال $ن_1 = ح - \{2 ، -2\}$

، $ن_2 (س) = \frac{س (س - 1)}{(س - 2)(س - 1)} = \frac{س}{س - 2}$

، مجال $ن_2 = ح - \{2 ، 1\}$

أى أن : $ن_1 (س) = ن_2 (س)$ بينما مجال $ن_1 \neq$ مجال $ن_2$

ولذلك يكون : $ن_1 = ن_2$ فقط فى المجال المشترك وهو $ح - \{2 ، -2 ، 1\}$

تذكر خطوات إجراء العمليات على الكسور الجبرية

الجمع و الطرح - **الضرب** - **القسمة**

١ - ترتيب حدود بسط ومقام كل كسر على حدة تنازليًا أو تصاعديًا حسب قوى أى رمز.
٢ - تحليل بسط ومقام كل كسر إن أمكن.

الجمع و الطرح:
٣ - إيجاد المجال المشترك.
٤ - اختزال كل كسر على حدة.
٥ - توحيد المقامات.
٦ - إجراء الجمع أو الطرح لحدود البسوط.
٧ - تبسيط الناتج.

الضرب:
٣ - إيجاد المجال المشترك.
٤ - حذف العوامل المشتركة بين بسط ومقام أى كسرين.
٥ - إجراء عملية الضرب.
٦ - تبسيط الناتج.

القسمة:
٣ - إيجاد المجال المشترك بين المقسوم والمعكوس الضربى للمقسوم عليه.
٤ - تحويل القسمة إلى ضرب بقلب المقسوم عليه.
٥ - حذف العوامل المشتركة بين بسط ومقام الكسرين.
٦ - إجراء عملية الضرب.
٧ - تبسيط الناتج.

ملاحظات

(١) مجال كل من ($ن_١ + ن_٢$) أو ($ن_١ - ن_٢$) أو ($ن_١ \times ن_٢$) هو المجال المشترك للكسرين $ن_١$ ، $ن_٢$

(٢) مجال ($ن_١ \div ن_٢$) هو المجال المشترك للكسرين $ن_١$ ، $ن_٢^{-١}$

(٣) العدد «**صفر**» هو المحايد الجمعى لأى كسر جبرى.
، العدد «**واحد**» هو المحايد الضربى لأى كسر جبرى.

(٤) مجال الكسر الجبرى = مجال معكوسه الجمعى.

ولإيجاد المعكوس الجمعى للكسر الجبرى نغير إشارة بسط أو مقام ذلك الكسر.

فمثلًا : المعكوس الجمعى للكسر $\frac{٢}{س - ١}$ هو : $- \frac{٢}{س - ١} = \frac{-٢}{س - ١} = \frac{٢}{١ - س}$

(٥) إذا كان : $ن (س) = \frac{ق (س)}{ك (س)} \neq ٠$

فإن المعكوس الضربى للكسر ن هو $ن^{-١}$ حيث $ن^{-١} (س) = \frac{ك (س)}{ق (س)}$

ويكون مجال $ن^{-١}$ هو ح − مجموعة أصفار بسط ومقام أى من الكسرين.

فمثلًا : إذا كان : $ن (س) = \frac{س + ١}{س - ٥}$ فإن : $ن^{-١} (س) = \frac{س - ٥}{س + ١}$

حيث مجال ن = ح − {٥} ، مجال $ن^{-١}$ = ح − {٥ ، −١}

تذكر احتمالات بعض الأحداث والعمليات عليها

التعبير اللفظى عن الحدث	احتمال الحدث	تمثيل الحدث بشكل ڤن
احتمال وقوع الحدث المؤكد = ١	ل (ف) = ١	ف
احتمال وقوع الحدث المستحيل = صفر	ل (∅) = صفر	ف

احتمال وقوع الحدث أ	$\text{ل}(\text{أ}) = \frac{\text{ن}(\text{أ})}{\text{ن}(\text{ف})}$
الحدث المكمل احتمال الحدث المكمل للحدث أ أو احتمال عدم وقوع الحدث أ	$\text{ل}(\text{أَ}) = \frac{\text{ن}(\text{أَ})}{\text{ن}(\text{ف})} = ١ - \text{ل}(\text{أ})$
تقاطع حدثين (أ ∩ ب) احتمال وقوع الحدثين أ و ب معًا	$\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب}) = \frac{\text{ن}(\text{أ} \cap \text{ب})}{\text{ن}(\text{ف})}$
	* إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين فإن : $\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب}) = \text{صفر}$
	* إذا كان : $\text{أ} \subset \text{ب}$ فإن : $\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب}) = \text{ل}(\text{أ})$
اتحاد حدثين (أ ∪ ب) * احتمال وقوع الحدثين أ أو ب أو كلاهما * احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل * احتمال وقوع أى من الحدثين.	$\text{ل}(\text{أ} \cup \text{ب}) = \frac{\text{ن}(\text{أ} \cup \text{ب})}{\text{ن}(\text{ف})}$ ويكون : $\text{ل}(\text{أ} \cup \text{ب}) = \text{ل}(\text{أ}) + \text{ل}(\text{ب}) - \text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب})$
	* إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين فإن : $\text{ل}(\text{أ} \cup \text{ب}) = \text{ل}(\text{أ}) + \text{ل}(\text{ب})$
	* إذا كان : $\text{أ} \subset \text{ب}$ فإن : $\text{ل}(\text{أ} \cup \text{ب}) = \text{ل}(\text{ب})$

الفرق بين حدثين (أ − ب)		
* احتمال وقوع الحدث أ وعدم وقوع الحدث ب	ل (أ − ب) = ن (أ − ب) / ن (ف) ويكون : ل (أ − ب) = ل (أ) − ل (أ ∩ ب)	ف ب أ
* احتمال وقوع الحدث أ فقط	* إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين فإن : ل (أ − ب) = ل (أ)	ف ب أ
	* إذا كان : أ ⊂ ب فإن : ل (أ − ب) = ل (∅) = صفر	ف ب أ

ملاحظات

① ل (أ ∩ أَ) = صفر

② إذا كان : ل (أ) = ل (أَ)   فإن : ل (أ) = $\frac{1}{2}$ ، ل (أَ) = $\frac{1}{2}$

③ احتمال عدم وقوع الحدثين أ و ب معًا = ل (أ ∩ ب)َ = ١ − ل (أ ∩ ب)

④ احتمال عدم وقوع أى من الحدثين أ و ب = ل (أ ∪ ب)َ = ١ − ل (أ ∪ ب)

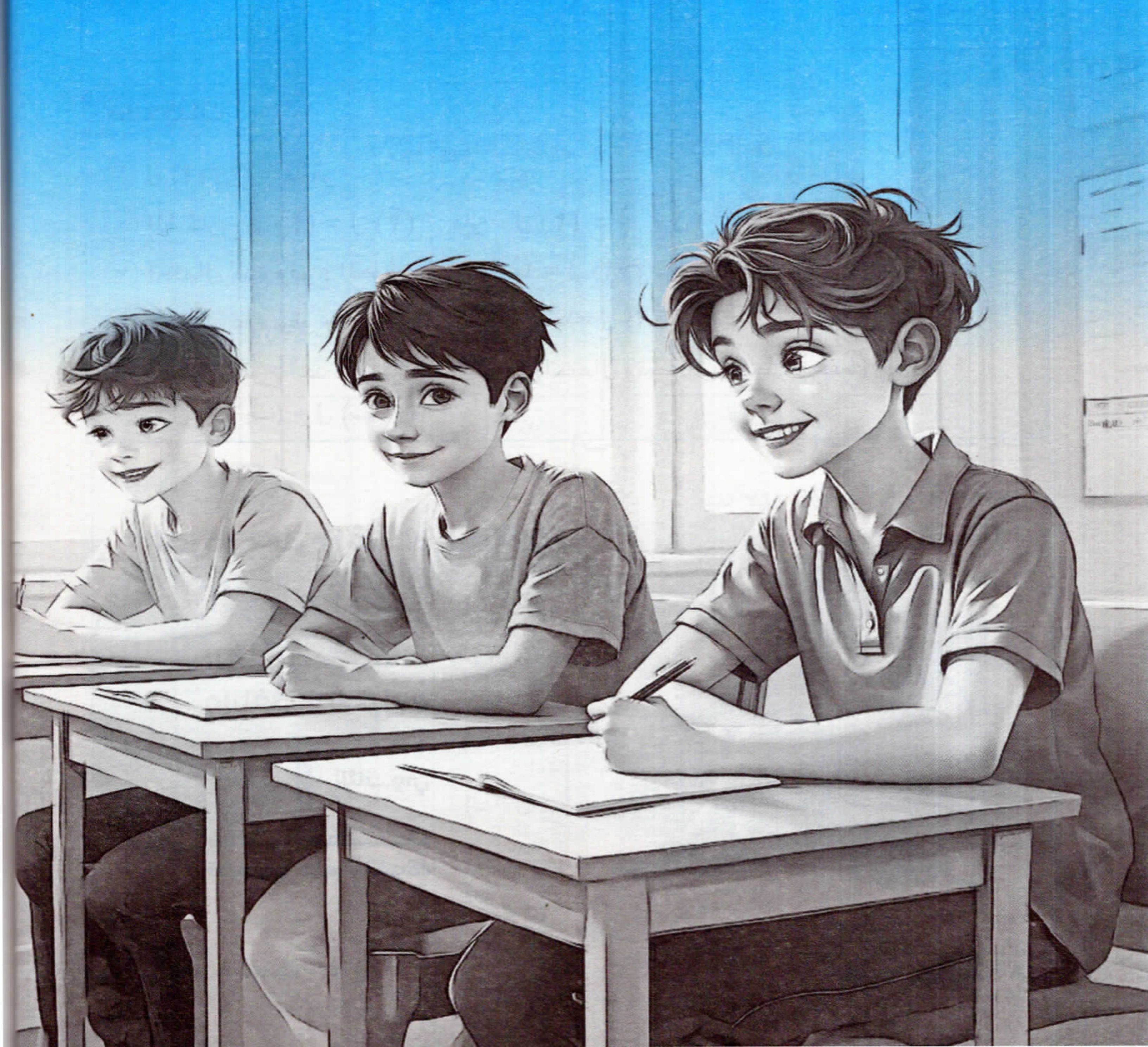
⑤ احتمال وقوع أحد الحدثين دون الآخر (احتمال وقوع أحد الحدثين فقط)
= ل (أ − ب) + ل (ب − أ)



الامتحانات النهائية

فى الجبر والاحتمال

- نماذج امتحانات الكتاب المدرسى.
- امتحانات بعض المحافظات.





نماذج امتحانات الكتاب المدرسى فى الجبـر والاحتمال

نمـــوذج ١

أجب عن الأسئلة الآتية : **(يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)**

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ مجال الدالة ن : ن (س) = $\frac{س}{س - ١}$ هو ....

(أ) ح - {صفر} (ب) ح - {١}

(جـ) ح - {صفر ، ١} (د) ح - {-١}

٢ عدد حلول المعادلتين : س + ص = ٢ ، ص + س = ٣ معًا فى ح × ح هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٣ إذا كان : س ≠ صفر فإن : $\frac{٥ س}{س^٢ + ١} \div \frac{س}{س^٢ + ١} =$ ....

(أ) -٥ (ب) -١ (جـ) ١ (د) ٥

٤ إذا كانت النسبة بين محيطى مربعين ١ : ٢ فإن النسبة بين مساحتيهما تساوى ....

(أ) ١ : ٢ (ب) ٢ : ١ (جـ) ١ : ٤ (د) ٤ : ١

٥ معادلة محور تماثل منحنى الدالة د حيث د (س) = $س^٢ - ٤$ هى ....

(أ) س = -٤ (ب) س = صفر (جـ) ص = صفر (د) ص = -٤

٦ إذا كانت : أ ⊂ ف لتجربة عشوائية ما وكان ل (أَ) = ٢ ل (أ)

فإن : ل (أ) = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) ١

---

٢ (أ) باستخدام القانون العام أوجد مجموعة حل المعادلة الآتية فى ح :

٢ $س^٢$ - ٥ س + ١ = صفر مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد.

(ب) أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن حيث :

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س} - ٣}{\text{س}^٢ - ٧\,\text{س} + ١٢} - \frac{٤}{\text{س}^٢ - ٤\,\text{س}}$$

---

٣ **(أ)** أوجد فى ح × ح مجموعة حل المعادلتين الآتيتين :

$$\text{س} - \text{ص} = \text{صفر} \quad ، \quad \text{س}^٢ + \text{س}\,\text{ص} + \text{ص}^٢ = ٢٧$$

(ب) أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن حيث :

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢ + ٤\,\text{س} + ٣}{\text{س}^٣ - ٢٧} \div \frac{\text{س} + ٣}{\text{س}^٢ + ٣\,\text{س} + ٩}$$

ثم أوجد : ن (٢) ، ن (−٣) إن أمكن.

---

٤ **(أ)** مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٤ سم فإذا كان محيط المستطيل ٢٨ سم أوجد مساحة المستطيل.

(ب) إذا كان : $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢ - ٢\,\text{س}}{\text{س}^٢ - ٣\,\text{س} + ٢}$

فأوجد : **١** $\text{ن}^{-١}(\text{س})$ فى أبسط صورة وعين مجال $\text{ن}^{-١}$

٢ قيمة س إذا كان : $\text{ن}^{-١}(\text{س}) = ٣$

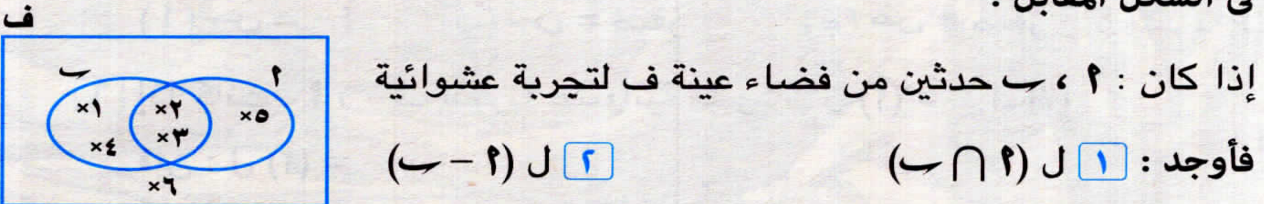
---

٥ **(أ)** إذا كان : $\text{ن}_١(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢}{\text{س}^٣ - \text{س}^٢}$ ، $\text{ن}_٢(\text{س}) = \frac{\text{س}^٣ + \text{س}^٢ + \text{س}}{\text{س}^٤ - \text{س}}$

فأثبت أن : $\text{ن}_١ = \text{ن}_٢$

(ب) فى الشكل المقابل :

إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة ف لتجربة عشوائية



فأوجد : **١** ل (أ ∩ ب) **٢** ل (أ − ب)

٣ احتمال عدم وقوع الحدث أ

نمـــوذج ٢

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ مجموعة حل المعادلتين : س = ٣ ، ص = ٤ فى ح × ح هى ....

(أ) {(٣ ، ٤)} (ب) {(٤ ، ٣)} (جـ) ح (د) ∅

٢ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = $س^{٢}$ + ٤ فى ح هى ....

(أ) {٢} (ب) {٢ ، −٢} (جـ) ح (د) ∅

٣ إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية

فإن : ل (أ ∩ ب) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٠,٥ (د) ∅

٤ مجال المعكوس الضربى للدالة د : د (س) = $\frac{س + ٢}{س - ٣}$ هو ....

(أ) {٣} (ب) ح − {−٢ ، ٣} (جـ) ح − {٣} (د) ح

٥ المستقيمان : ٣ س + ٥ ص = صفر ، ٥ س − ٣ ص = صفر يتقاطعان فى ....

(أ) الربع الأول. (ب) الربع الثانى. (جـ) نقطة الأصل. (د) الربع الثالث.

---

٢ (أ) أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة : ٣ $س^{٢}$ − ٥ س + ١ = صفر

باستخدام القانون العام مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

(ب) اختصر لأبسط صورة مبينًا مجال ن : ن (س) = $\frac{س^{٣} - ٨}{س^{٢} + س - ٦} \times \frac{س + ٣}{س^{٢} + ٢ س + ٤}$

---

٣ (أ) أوجد فى ح × ح مجموعة حل المعادلتين الآتيتين معًا :

س − ص = ١ ، $س^{٢}$ + $ص^{٢}$ = ٢٥

(ب) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية

، وكان : ل (أ) = ٠,٣ ، ل (ب) = ٠,٦ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٢

أوجد : [١] ل (أ ∪ ب) [٢] ل (أ − ب)

---

٤ (أ) حل المعادلتين الآتيتين معًا فى ح × ح :

٢ س − ص = ٣ ، س + ٢ ص = ٤

(ب) أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن :

$$ن(س) = \frac{س^2 + ٢ س}{س^2 - ٩} \div \frac{٢ س}{س + ٣}$$

---

٥ (أ) أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن :

$$ن(س) = \frac{س^2 + ٢ س}{س^2 - ٤} + \frac{س + ٣}{س^2 - ٥ س + ٦}$$

(ب) ارسم الشكل البيانى للدالة د : د (س) = $س^2$ − ١ فى الفترة [−٣ ، ٣]

ومن الرسم أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة : $س^2$ − ١ = صفر

نموذج امتحان للطلاب المدمجين

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ أكمل ما يأتى :

١ احتمال الحدث المستحيل يساوى ....

٢ أبسط صورة للكسر الجبرى $\frac{س - ٣}{س^٢ - ٥ س + ٦}$ هى ....

٣ إذا كانت : أ ⊂ ف لتجربة عشوائية ما وكان ل (أ) = $\frac{١}{٣}$ فإن : ل (أَ) = ...

٤ المعادلة : ٣ س − $س^٢$ + ١ = صفر من الدرجة ....

٥ نقطة تقاطع المستقيمين : س = −١ ، ص = ١ تقع فى الربع ....

٦ مجموعة أصفار الدالة د حيث د (س) = س − ٥ هى ....

---

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ مجموعة حل المعادلتين : س = ٢ ، س ص = ٦ فى ح × ح هى ....

(أ) {(٢ ، ٣)} (ب) {٢ ، ٣} (جـ) {(٣ ، ٢)} (د) {٣}

٢ يكون للدالة د حيث د (س) = $\frac{س - ٢}{س - ٥}$ معكوس جمعى فى المجال ....

(أ) ح − {٢} (ب) ح − {٥} (جـ) ح (د) {٢ ، ٥}

٣ المعكوس الضربى للكسر الجبرى $\frac{٣}{س^٢ + ١}$ هو ....

(أ) − $\frac{-٣}{س^٢ + ١}$ (ب) $\frac{س^٢ + ١}{-٣}$ (جـ) $\frac{س^٢ + ١}{٣}$ (د) $\frac{س^٢ - ١}{٣}$

٤ مجال الدالة ن حيث ن (س) = $\frac{س + ٢}{س - ١}$ هو ....

(أ) ح − {−٢} (ب) ح − {١} (جـ) ح − {١ ، −٢} (د) ح − {٢}

٥ إذا كان : ص = ٢ ، $س^٢$ − $ص^٢$ = ٥ فإن : س = ...

(أ) −٣ (ب) ٣ (جـ) ± ٣ (د) ٩

٦ المستقيمان : س + ٢ ص = ١ ، ٢ س + ٤ ص = ٦ يكونان ....

(أ) متوازيين. (ب) متقاطعين. (جـ) متعامدين. (د) منطبقين.

٣ ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (✗) أمام العبارة الخطأ :

١ فى المعادلة : ٢ س^2 − ٥ س − ٤ = صفر ، أ = ١ ، ب = −٥ ، حـ = ٤ ( )

٢ أبسط صورة للدالة ن : ن (س) = $\frac{س}{س + ١}$ + $\frac{١}{س + ١}$ هى س + ١ ( )

٣ $\frac{س − ١}{٥}$ × $\frac{س + ١}{س^2 − ١}$ = $\frac{١}{٥}$ ، س ≠ ± ١ ( )

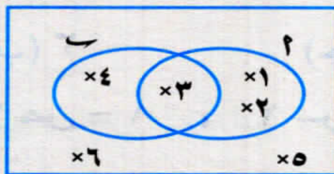
٤ إذا كان عددان مجموعهما ٣ ، مجموع مربعيهما ٥ ، فإن العددين هما ١ ، ٢ ( )

٥ إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة لتجربة عشوائية فإن : ل (أ ∩ ب) = ١ ( )

٦ إذا كان احتمال فوز أحد الفرق هو ٠,٧ فإن احتمال عدم فوزه هو ٠,٣ ( )

---

٤ صل من العمود (أ) بما يناسبه من العمود (ب) :

العمود (أ)	العمود (ب)
١ مجموعة حل المعادلتين : س = ٢ ، ص − ١ = ٠ فى ح × ح هى	• {(٢ ، ١)}
٢ حل المعادلة : أ س^2 + ب س + حـ = صفر فى ح هو .... حيث أ ≠ ٠ ، أ ، ب ، حـ ∈ ح	• $\frac{س}{س^2 + ٤}$
٣ إذا كان : ن (س) = $\frac{س − ١}{س + ١}$ فإن : مجال ن$^{-1}$ هو	• $\frac{−ب ± \sqrt{ب^2 − ٤ أ حـ}}{٢ أ}$
٤ إذا كان : ن$_1$ = ن$_2$ وكان ن$_1$ (س) = $\frac{٥ س}{٥ س^2 + ٢٠}$ فإن : ن$_2$ (س) = ...	• ح − {١ ، −١}
٥ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = $\frac{س − ٥}{س}$ هى	• $\frac{١}{٣}$
٦ فى الشكل المقابل : ل (أ − ب) = ... 	• {٥}



امتحانات بعض المحافظات فى الجبر والاحتمال



١ محافظة القاهرة

أجب عن الأسئلة الآتية :

المجموعة الأولى

◄ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كانت : أ ∈ ح - {صفر} ، ن عددًا صحيحًا موجبًا فإن : $أ^{ن} \times أ^{-ن}$ = ...

(أ) - أ (ب) صفر (جـ) ١ (د) أ

٢ إذا كان المستقيمان الممثلان لمعادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين منطبقين فإنه : .... للمعادلتين معًا.

(أ) لا يوجد حل (ب) يوجد حل واحد فقط

(جـ) يوجد حلان (د) يوجد عدد لا نهائى من الحلول

٣ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية ، فإن حدث وقوع أ ، ب معًا يساوى ....

(أ) أ ∩ ب (ب) أ ∪ ب (جـ) أ - ب (د) ب - أ

٤ إذا كان العدد ك ∈]٢ ، ٧[فإن : ك يمكن أن تساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٧ (د) ٩

٥ أبسط صورة للدالة د : د (س) = $\frac{٣ - س}{س - ٣}$ هى .... حيث س ≠ ٣

(أ) -٣ (ب) -١ (جـ) ١ (د) ٤

٦ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = $\frac{س - ٤}{س + ١}$ هى ....

(أ) {٤ ، -١} (ب) {-١} (جـ) {٤} (د) ح

٧ إذا كان الزوج المرتب (٢ ، ٣) يحقق المعادلة : ك س - ص = ٧

فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٥

٨ مجال الدالة د : د (س) = ٩ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٩} (جـ) {٩} (د) ح − {−٩}

٩ إذا كان : $ن^{-1}$ (س) = س حيث س ≠ صفر فإن : ن (٢) = ...

(أ) −٢ (ب) $-\frac{1}{2}$ (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) ٢

المجموعة الثانية

◄ **أجب عن جميع الأسئلة الآتية موضحًا خطوات الحل :**

١٠ أوجد جبريًا فى ح × ح مجموعة حل المعادلتين الآتيتين معًا :

٢ س − ص = ٣ ، س + ص = ٩

١١ عددان موجبان س ، ص الفرق بينهما ٢ ، حاصل ضربهما ٢٤ ، أوجد العددين.

١٢ إذا كان : $ن_1$ (س) = $\frac{س^2 - 9}{س + 3}$ ، $ن_2$ (س) = $\frac{2 س - 6}{2}$

فأثبت أن : $ن_1$ (س) = $ن_2$ (س) لجميع قيم س التى تنتمى للمجال المشترك ، واذكر هذا المجال.

١٣ أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا المجال :

ن (س) = $\frac{1}{س + 2}$ + $\frac{س + 2}{س^2 + 4 س + 4}$

١٤ باستخدام القانون العام أوجد مجموعة حل المعادلة الآتية فى ح :

٣ $س^2$ − ٥ س + ١ = صفر (مقربًا الناتج لأقرب رقم عشرى واحد)

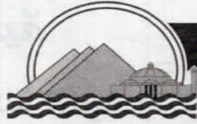
١٥ أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا المجال :

ن (س) = $\frac{س^2 + س - 6}{س^3 - 8}$ × $\frac{س^2 + 2 س + 4}{س + 3}$

١٦ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما

، ل (أ) = $\frac{1}{2}$ ، ل (ب) = $\frac{2}{3}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{1}{3}$

فأوجد : ① ل (أ ∩ ب)َ ② ل (أ ∪ ب)



٢ محافظة الجيـزة

أجب عن الأسئلة الآتية :

المجموعة الأولى

◄ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كانت : ٢ < ب < صفر < حـ فإن : ٢ب .... ب حـ

(أ) < (ب) = (جـ) ≤ (د) >

٢ $\sqrt{100 - 36}$ = ١٠ − ....

(أ) ٢ (ب) ٦ (جـ) ٤ (د) ٣

٣ إذا كان : ٢ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان ب ⊂ ٢
فإن : ل (٢ ∩ ب) = ...

(أ) ١ (ب) ل (٢) (جـ) ل (ب) (د) صفر

٤ يكون للكسر ن (س) = $\frac{س + ٣}{س - ٤}$ معكوس جمعى فى المجال ....

(أ) ح − {−٣} (ب) ح − {٤}

(جـ) ح − {−٢ ، ٢} (د) ح − {−٣ ، ٤}

٥ إذا كانت : د (س) = س + ك ، وكانت : ص (د) = {٥} فإن : ك = ...

(أ) −٥ (ب) ٥ (جـ) ± ٥ (د) صفر

٦ عددان مجموعهما ٨ ، وحاصل ضربهما ١٥ فإن العددين هما ....

(أ) ٢ ، ٦ (ب) ٣ ، ٥ (جـ) ٧ ، ١ (د) ٤ ، ٤

٧ المنحنى ص = ٢ $س^٢$ + ب س + حـ يقطع محور الصادات فى النقطة ....

(أ) (٠ ، ب) (ب) (٠ ، حـ) (جـ) (ب ، ٠) (د) (حـ ، ٠)

٨ مجال الدالة د : د (س) = $\frac{س - ١}{س^٢ - ٩}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {١}

(جـ) ح − {٩} (د) ح − {٣ ، −٣}

٩ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = $\frac{س - ٢}{٥}$ هى ....

(أ) {٥} (ب) $\{\frac{٢}{٥}\}$ (جـ) {٢} (د) $\{\frac{-٢}{٥}\}$

المجموعة الثانية

◀ أجب عن الأسئلة الآتية :

١٠ أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا المجال حيث :

$$ن(س) = \frac{س + ٢}{س^٢ + ٣س + ٢} - \frac{س^٢ - س}{١ - س^٢}$$

١١ أوجد فى ح × ح مجموعة الحل للمعادلتين : س − ص = صفر ، س ص = ١٦

١٢ أوجد باستخدام القانون العام مجموعة الحل فى ح للمعادلة : $س^٢ - ٦س + ٤ = $ صفر مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد.

١٣ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية

، وكان : ل (أ) = ٠,٧ ، ل (ب) = ٠,٥ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٣

أوجد :

(١) ل (أ ∪ ب) (٢) ل (ب − أ)

١٤ إذا كان : $ن_١(س) = \frac{٥س}{٥س + ٢٥}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ + ٥س}{س^٢ + ١٠س + ٢٥}$

أثبت أن : $ن_١ = ن_٢$

١٥ أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا المجال حيث :

$$ن(س) = \frac{س^٣ - ٨}{س^٢ + س - ٦} \times \frac{٢س + ٦}{س^٢ + ٢س + ٤}$$

١٦ أوجد جبريًا مجموعة الحل للمعادلتين الآتيتين فى ح × ح (موضحًا خطوات الحل) :

٣س + ٢ص = ٤ ، س − ٣ص = ٥



٣ محافظة الإسكندرية

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ مجموعة حل المعادلتين : س − ٣ = ٠ ، ص + ٢ = ٠ فى ح × ح هى ....

(أ) {٣ ، ٢} (ب) {−٣ ، −٢}

(جـ) {(٣ ، −٢)} (د) {(−٢ ، ٣)}

٢ مجال الدالة د : $د(س) = \frac{س + ٢}{س - ١}$ هو ....

(أ) {١ ، −٢} (ب) ح − {١}

(جـ) ح − {١ ، −٢} (د) {٢ ، −١}

٣ إذا كان : ل (أ) = ٠,٦ فإن : ل (أَ) = ...

(أ) ٠,٤ (ب) ٠,٦ (جـ) ٠,٥ (د) ١

٤ أوجد جبريًا فى ح × ح مجموعة حل المعادلتين :

س + ص = ٧ ، س − ص = ٣

٥ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = $\frac{س - ٢}{س^٢ - ٤}$ هى ....

(أ) {٢} (ب) {−٢} (جـ) {−٢ ، ٢} (د) ∅

٦ مجموعة حل المعادلتين : س = ٣ ، $س^٢ + ص^٢$ = ٢٥ فى ح × ح هى ....

(أ) {(٣ ، ٤)} (ب) {(٣ ، ٤) ، (٣ ، −٤)}

(جـ) {(٣ ، −٤)} (د) {(٤ ، −٣)}

٧ عدد حلول المعادلتين : س + ص = ٣ ، س + ص = −٣ هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٨ أوجد باستخدام القانون العام مجموعة حل المعادلة : $س^٢$ − ٥ س + ٢ = صفر فى ح

متخذا $\sqrt{١٧}$ ≃ ٤,١٢

٩ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان أ ⊂ ب

فإن : ل (أ ∪ ب) = ...

(أ) ل (أ) (ب) ل (ب) (جـ) ١ (د) صفر

١٠ المعكوس الجمعى للدالة د : د (س) = $\frac{س - ٣}{س + ٢}$ هو ....

(أ) $\frac{س + ٣}{س - ٢}$ (ب) $\frac{٣ - س}{س + ٢}$ (جـ) $\frac{- س - ٣}{س + ٢}$ (د) $\frac{- س - ٣}{- س - ٢}$

١١ [٣ ، ٥] − {٣ ، ٥} = ...

(أ)]٣ ، ٥[(ب) [٣ ، ٥] (جـ) [٣ ، ٥[(د)]٣ ، ٥]

١٢ أوجد ن (س) فى أبسط صورة موضحًا المجال حيث :

ن (س) = $\frac{س^٢ + ٤ س}{س^٢ - ١٦} + \frac{س - ٣}{س^٢ - ٧ س + ١٢}$

١٣ إذا كان : $ن_١$ (س) = $\frac{س^٢}{س^٢ - س}$ ، $ن_٢$ (س) = $\frac{س^٣ - س^٢}{س^٣ - ٢ س^٢ + س}$

برهن أن : $ن_١ = ن_٢$

١٤ أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا المجال : ن (س) = $\frac{س - ٥}{س^٢ - ٢ س - ١٥} \div \frac{٨}{٢ س + ٦}$

15 إذا كان : ن $(س) = \frac{٣س - ٩}{س^٢ - ٥س + ٦}$ أوجد $ن^{-١}(س)$ فى أبسط صورة مبينًا مجال $ن^{-١}$ ثم أوجد $ن^{-١}(٣)$ إن أمكن.

١٦ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما ، وكان : ل (أ) = ٠,٤ ، ل (ب) = ٠,٥ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٢

أوجد كلًا من : ① ل (أ ∪ ب) ② احتمال عدم وقوع أ



٤ محافظة القليوبيـة

أجب عن الأسئلة الآتية :

المجموعة الأولى

◄ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان : $\sqrt{ص} = ٢$ فإن قيمة : ٣ ص = ...

(أ) ١٢ (ب) ٦ (جـ) ٤ (د) ٢

٢ إذا كان : ل م = ٥ ، ل $م^٢$ = ٢٠ فإن : م = ...

(أ) ١٠٠ (ب) ٢٥ (جـ) ٤ (د) $\frac{١}{٢}$

٣ إذا كان للمعادلتين : ٢س - ٣ص = ٢ ، ٦س - ٩ص = ك عدد لا نهائى من الحلول فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٢

٤ مجموعة أصفار الدالة د : د(س) = $س^٢$ - ٤ هى ....

(أ) {٢} (ب) {-٢} (جـ) {-٢ ، ٢} (د) {-٢ ، ٠}

٥ إذا كانت : ص = ٣ ، $س^٢$ = ص + ٦ فإن : س = ...

(أ) ١٠ (ب) ٣ (جـ) -٣ (د) ± ٣

٦ مجال الدالة د : د(س) = $\frac{س - ٤}{٥}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح - {٤} (جـ) {٥} (د) ح - {٥}

٧ أبسط صورة للدالة د : د(س) = $\frac{س}{٢س + ٢} + \frac{١}{٢س + ٢}$ هى ....

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) $\frac{س + ١}{س + ٢}$ (د) $\frac{٢س}{س + ١}$

٨ إذا كان : ن (س) = $\frac{٣}{٢ س}$ + $\frac{١}{٢ س}$ فإن : $ن^{-١}$ (س) = ... س ≠ صفر

(أ) $\frac{-٤}{س}$ (ب) $\frac{٤}{س}$ (جـ) $\frac{س}{٤}$ (د) $\frac{س}{٢}$

٩ عند إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة فإن احتمال ظهور عدد أكبر من ٤ هو ....

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٦}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{١}{٢}$

المجموعة الثانية

◄ أجب عن الأسئلة الآتية :

١٠ أوجد مجموعة حل المعادلتين الآتيتين فى ح × ح : س + ٢ ص = ٥ ، ٢ س + ص = ١

١١ أوجد مجموعة حل المعادلة الآتية باستخدام القانون العام فى ح :
٢ $س^٢$ − ٦ س + ١ = صفر مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

١٢ أوجد مجموعة حل المعادلتين الآتيتين فى ح × ح : س = ٢ ص ، $س^٢$ + $ص^٢$ = ٢٠

١٣ إذا كان : $ن_١$ (س) = $\frac{٢}{٢ س + ٦}$ ، $ن_٢$ (س) = $\frac{س^٢ - ٣ س + ٩}{س^٣ + ٢٧}$

أثبت أن : $ن_١$ = $ن_٢$

١٤ أوجد ن (س) فى أبسط صورة موضحًا المجال : ن (س) = $\frac{س^٢ + ٤ س}{س^٢ - ١٦}$ + $\frac{٤ س + ٨}{س^٢ - ٢ س - ٨}$

١٥ أوجد ن (س) فى أبسط صورة موضحًا المجال : ن (س) = $\frac{س + ١}{س - ٢}$ × $\frac{س^٢ + س - ٢}{س^٢ - ١}$

١٦ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية
، وكان : ل (أ) = ٠,٥ ، ل (ب) = ٠,٦ ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٩

أوجد : ١ ل (أ ∩ ب) ٢ ل (أ − ب) ٣ ل (أ َ) + ل (ب َ)

٥ محافظة الشرقية



أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول

(أ) أوجد ن (س) فى أبسط صورة موضحًا المجال : ن (س) = $\frac{س^٣ - ٨}{س^٢ - ٩}$ × $\frac{س + ٣}{س^٢ + ٢ س + ٤}$

(ب) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان :
ل (أ َ) = ٠,٤ ، ل (ب) = ٠,٥ ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٨

فأوجد كلًا من : ١ ل (أ) ٢ ل (أ ∩ ب)

السؤال الثانى

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

1 مجال المعكوس الضربى للدالة د : د (س) = $\frac{س - ١}{س^٢ + ٤}$ هو ....

(أ) ح - {١ ، ٢ ، -٢} (ب) ح - {٢ ، -٢}

(جـ) ح (د) ح - {١}

2 إذا كانت : $٢^{س} = ٣$ فإن : $٨^{-س} = $ ....

(أ) -٢٧ (ب) ٨١ (جـ) $\frac{١}{٢٧}$ (د) $\frac{١}{٨١}$

3 المجال المشترك للدالتين $د_١$: $د_١$ (س) = $\frac{س}{س - ٣}$

، $د_٢$: $د_٢$ (س) = $\frac{س + ٣}{٢}$ هو ....

(أ) ح - {٢ ، ٣} (ب) ح - {٠ ، ٣} (جـ) ح - {٣} (د) ح - {٢}

(ب) أوجد مجموعة حل المعادلة الآتية فى ح :

٢ $س^٢$ - ٤ س + ١ = ٠ مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

السؤال الثالث

(أ) أوجد ن (س) فى أبسط صورة موضحًا المجال :

ن (س) = $\frac{س^٢ - ٣ س + ٢}{س^٢ - ٤} - \frac{٣ س - س^٢}{س^٢ - س - ٦}$

(ب) أوجد فى ح × ح مجموعة حل المعادلتين الآتيتين: س - ص = ٣ ، ٢ س + ص = ٦

السؤال الرابع

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

1 $\sqrt{٢٥ - ٩}$ = ٥ - ....

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ١ (د) -١

2 إذا كانت : ص (د) = ∅ فإن : د (س) يمكن أن تكون ....

(أ) $س^٢$ + ٤ (ب) س - ٤ (جـ) $س^٢$ - ٤ (د) س + ٤

3 إذا كان المستقيمان : س - ٣ ص = ٢ ، س + ك ص = ٥ متوازيين

فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) -٣ (جـ) ٥ (د) ٣

(ب) إذا كان : $ن_١ (س) = \frac{٥ س}{٥ س + ١٠}$ ، $ن_٢ (س) = \frac{س^٢ + ٢ س}{س^٢ + ٤ س + ٤}$

فأثبت أن : $ن_١ = ن_٢$

السؤال الخامس

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ أبسط صورة للدالة د : $د (س) = \frac{س}{٢ - س} + \frac{٢}{س - ٢}$ هى ....

(أ) س − ٢ (ب) س (جـ) ٢ (د) −١

٢ إذا كان : $\frac{س}{ص} = ٣$ ، $ص^٢ = ٤$ فإن : س = ...

(أ) ± ٦ (ب) −٦ (جـ) ٦ (د) ٣

٣ إذا كان : أ ⊃ ب فإن : ل (أ − ب) = ...

(أ) ل (ب) (ب) صفر (جـ) ل (أ) (د) ١

(ب) أوجد فى ح × ح مجموعة حل المعادلتين : س − ص = ١ ، $ص^٢ + س = ٧$



٦ محافظة المنوفية

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

السؤال الأول

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = ٩ هى ....

(أ) {٩} (ب) {٠} (جـ) ∅ (د) ح − {٩}

٢ إذا كان : $٥^{ص} = ١$ فإن : ص = ...

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) $\frac{١}{٥}$ (د) صفر

٣ يقال للحدثين أ ، ب إنهما متنافيان إذا كان : أ ∩ ب = ...

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) {٠} (د) ∅

(ب) أوجد مجموعة حل المعادلتين الآتيتين فى ح × ح : س − ص = ٧ ، س ص = ١٨

السؤال الثانى

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] إذا كان : $أ^٢ - ب^٢ = ١٥$ ، $أ - ب = ٣$ فإن : $أ + ب =$ ....

(أ) ٥ (ب) ١ (جـ) ٣ (د) ١٢

[٢] إذا كان المستقيمان : س + ٢ ص = ٤ ، ٢ س + ك ص = ١١ متوازيين

فإن : ك = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

[٣] إذا كان : $ن(س) = \frac{س - ١}{س + ٣}$ فإن : مجال $ن^{-١}$ هو ....

(أ) ح - {٣} (ب) ح - {١}

(جـ) ح - {-٣ ، ١} (د) {-٣ ، ١}

(ب) أوجد ن (س) فى أبسط صورة حيث : $ن(س) = \frac{س^٢ + ٢ س + ٤}{س^٣ - ٨} + \frac{س^٢ + س - ٢}{س^٢ - ٤}$

مبينًا مجال ن

السؤال الثالث

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] إذا كان : أ ⊂ ف ، ل (أ) = ل (أ‘) فإن : ل (أ) = ...

(أ) ٠,٢ (ب) ٠,٥ (جـ) ٠,٣ (د) ٠,٦

[٢] إذا كان منحنى الدالة التربيعية د يمر بالنقاط (-١ ، ٠) ، (٠ ، -٤) ، (٤ ، ٠)

فإن مجموعة حل المعادلة د (س) = صفر فى ح هى ....

(أ) {-١ ، ٠} (ب) {-٤ ، ٠} (جـ) {-١ ، ٤} (د) {٤ ، -٤}

[٣] مجال الدالة د : $د(س) = \frac{س - ٧}{٣ (س + ١)}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح - {-١}

(جـ) ح - {١} (د) ح - {-١ ، ٣}

(ب) إذا كان : $ن_١(س) = \frac{٢ س}{٢ س + ٨}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ + ٤ س}{س^٢ + ٨ س + ١٦}$

أثبت أن : $ن_١ = ن_٢$

السؤال الرابع

(أ) إذا كان : ٢ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، ل (٢) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (ب) = $\frac{١}{٤}$ ، ل (٢ ∩ ب) = $\frac{١}{٨}$

أوجد كلًا من : ١ ل (٢ ∪ ب) ٢ ل (٢ − ب) ٣ ل (بَ)

(ب) أوجد فى أبسط صورة : ن (س) = $\frac{٢ س^٢ + ٤ س}{س^٢ - ٤} \times \frac{س - ٢}{٢ س + ٦}$ مبينًا مجال ن

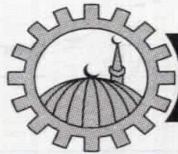
السؤال الخامس

(أ) أوجد مجموعة حل المعادلتين الآتيتين فى ح × ح جبريًا :

٢ س − ص = ٣ ، س + ٢ ص = ٤

(ب) أوجد مجموعة حل المعادلة الآتية فى ح باستخدام القانون العام :

$س^٢$ − ٢ س − ٤ = صفر (مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين).



٧ محافظة الغربية

أجب عن الأسئلة الآتية :

المجموعة الأولى

◄ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان : س + ص = ٢ فإن : ٢ س + ٢ ص + ١ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٥

٢ $\sqrt{١٦ + ٩}$ = ٤ + ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) ٥

٣ إذا كان المستقيمان : س + ٢ ص = ١ ، ٢ س + ٢ ص = ٥ متوازيين

فإن : ٢ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) صفر

٤ إذا كان منحنى الدالة التربيعية د لا يقطع محور السينات فإن عدد حلول المعادلة د (س) = ٠ فى ح هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى.

٥ إذا كان : ن (س) = $\frac{٧}{س} + \frac{س}{٧}$ فإن مجال ن هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٠}

(جـ) ح − {٧} (د) ح − {٠ ، ٧}

٦ مجموعة أصفار الدالة ن : ن (س) = $\frac{س}{س - ٥} + \frac{٤}{٥ - س}$ هى ....

(أ) {٥} (ب) {−٥} (جـ) {٤} (د) {−٤}

٧ إذا كان للكسر الجبرى $\frac{س + ٢}{س + ١}$ معكوس ضربى هو $\frac{س + ١}{س - أ}$ فإن : أ = ...

(أ) −٢ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) −١

٨ المجال المشترك للكسرين : $\frac{٣}{س - ٦}$ ، $\frac{٩}{٢ س - ١٢}$ هو ....

(أ) ∅ (ب) ح − {٦}

(جـ) ح − {١٢} (د) ح − {٦ ، ١٢}

٩ إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من تجربة عشوائية ما ، وكان ل (أ) = $\frac{١}{٣}$

، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٧}{١٢}$ فإن : ل (ب) = ...

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{١٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٣}$

المجموعة الثانية

◄ أجب عن الأسئلة الآتية موضحًا خطوات الحل :

١٠ باستخدام القانون العام أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة : ٢ $س^٢$ − ٤ س + ١ = ٠
مقربًا الناتج لرقمين عشريين.

١١ أوجد قيمتى أ ، ب علمًا بأن (٣ ، −١) حل للمعادلتين :

أ س + ب ص − ٥ = صفر ، ٣ أ س + ب ص = ١٧

١٢ أوجد مجموعة حل المعادلتين الآتيتين فى ح × ح : س + ص = ٣ ، س ص = ٢

١٣ إذا كانت : $ن_١$ (س) = $\frac{س}{س^٢ - س}$ ، $ن_٢$ (س) = $\frac{س^٢ + س + ١}{س^٣ - ١}$

فبين هل : $ن_١$ = $ن_٢$ أم لا ، مع ذكر السبب.

١٤ أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا المجال :

ن (س) = $\frac{س^٢ - ٣ س}{س^٢ - ٥ س + ٦} - \frac{٢ س + ٤}{س^٢ - ٤}$

١٥ أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن ، ثم أوجد : ن (−٢) إن أمكن

ن (س) = $\frac{س^٢ + ٢ س}{س^٣ - ٢٧} \div \frac{س + ٢}{س^٢ + ٣ س + ٩}$

١٦ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما ، وكان : ل (أ') = ٠,٣ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٣ أوجد : ل (أ) ، ل (أ − ب)



٨ محافظة الدقهلية

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

السؤال الأول

(أ) أوجد : ن (س) فى أبسط صورة مبينًا المجال حيث :

$$ن(س) = \frac{س^٢ - ٢س + ٤}{س^٣ + ٨} + \frac{س^٢ - ١}{س^٢ + س - ٢}$$

(ب) إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية ، وكان : ل (أ) = ٠,٥ ، ل (ب) = ٠,٤ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,١

أوجد : ١ ل (أ ∪ ب)   ٢ ل (ب − أ)

السؤال الثانى

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ المعادلة س ص = ٣ من الدرجة .... فى متغيرين.

(أ) الصفرية   (ب) الأولى   (جـ) الثانية   (د) الثالثة

٢ إذا كان مجال الدالة د : د (س) = $\frac{٣}{س + ك}$ هو ح − {−٢} فإن : ك = ...

(أ) ٢   (ب) ٣   (جـ) −٣   (د) −٢

٣ أبسط صورة للدالة ن : ن (س) = $\frac{٣ - س}{س - ٣}$ حيث س ≠ ٣ هى ....

(أ) ٣   (ب) −٣   (جـ) ١   (د) −١

(ب) أوجد قيمة كل من أ ، ب علمًا بأن (١ ، ٢) حل للمعادلتين :

أ س + ب ص = −٥ ، ٢ أ س + ب ص = ٢

السؤال الثالث

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة ف لتجربة عشوائية

فإن : أ ∩ ب = ...

(أ) صفر   (ب) ف   (جـ) ١   (د) ∅

٢ إذا كان : $س + ٣ ص = ٧$ فإن : $س + ٣ (ص + ٥) =$ ....

(أ) ٢٢ (ب) ٢١ (جـ) ٧ (د) ٣

٣ المجال المشترك للكسرين الجبريين $ن_١ (س) = \frac{٣}{س^٢ - ١}$ ، $ن_٢ (س) = \frac{٤ س}{س^٢ - س}$ هو ....

(أ) ح - {١} (ب) ح - {٠ ، ١}

(جـ) ح - {٠ ، ١ ، -١} (د) ح - {-١ ، ١}

(ب) باستخدام القانون العام أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة :

$س^٢ - ٦ س + ٤ = ٠$ مقربًا الناتج لثلاثة أرقام عشرية.

السؤال الرابع

(أ) إذا كان : $ن (س) = \frac{س^٢ - ٢ س}{(س - ٢) (س^٢ + ٢)}$

١ أوجد : $ن^{-١} (س)$ وعين مجال $ن^{-١}$

٢ إذا كان : $ن^{-١} (س) = ٣$ فأوجد : قيمة س

(ب) مستطيل يزيد طوله عن عرضه بمقدار ٣ سم ، ومساحته تساوى ٢٨ $سم^٢$ ، أوجد محيطه.

السؤال الخامس

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان للمعادلتين : $٣ س + م ص = ٥$ ، $ك س + ٦ ص = ١٥$ عدد لا نهائى من الحلول فى ح × ح فإن : $ك م =$ ....

(أ) ١٨ (ب) ١٢ (جـ) ٦ (د) ٣

٢ مجموعة أصفار الدالة د حيث $د (س) = س^٢ + ٢٥$ هى ....

(أ) {٥} (ب) {-٥} (جـ) {-٥ ، ٥} (د) ∅

٣ إذا كان : $(س - ٤ ، ٥) = (٣ ، ص + ٢)$ فإن : $س + ص =$ ....

(أ) ١٢ (ب) ١٠ (جـ) ٨ (د) ٦

(ب) إذا كان : $ن_١$ ، $ن_٢$ كسرين جبريين حيث :

$ن_١ (س) = \frac{٢ س}{٢ س + ٤}$ ، $ن_٢ (س) = \frac{س^٢ + ٢ س}{س^٢ + ٤ س + ٤}$ أثبت أن : $ن_١ = ن_٢$



٩ محافظة الإسماعيلية

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

المجموعة الأولى

◄ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية

فإن : ل (أ ⋂ ب) = ...

(أ) $\emptyset$ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٠,٥

٢ إذا كان المقدار (س^{٢} + ١٠ س + ل) مربعًا كاملًا فإن : ل = ...

(أ) ٢٥ (ب) ١٦ (جـ) ٩ (د) ١

٣ إذا كان : ن (س) = $\frac{س^{٢} - ٩}{س}$ فإن : مجال ن$^{-١}$ هو ....

(أ) ح - {٠}
(ب) ح - {٠ ، ٣}
(جـ) ح - {٠ ، -٣ ، ٣}
(د) ح

٤ نقطة تقاطع المستقيمين : س + ٣ = صفر ، ص = ٥ هى ....

(أ) (٣ ، ٥) (ب) (-٣ ، ٥) (جـ) (-٣ ، -٥) (د) (٣ ، -٥)

٥ إذا كان س عددًا سالبًا فإن أكبر الأعداد التالية هو ....

(أ) ٥ + س (ب) ٥ س (جـ) $\frac{٥}{س}$ (د) ٥ - س

٦ إذا كان للمعادلتين : س + ٤ ص = ٧ ، ٣ س + ك ص = ٢١ عدد لا نهائى من الحلول فى ح × ح فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) ٧ (جـ) ١٢ (د) ٢١

٧ إذا كانت : ن (س) = $\frac{س + ك}{س^{٢} + ١}$ ، ن (٢) = ١ فإن : ك = ...

(أ) -١ (ب) صفر (جـ) ٣ (د) ٤

٨ مجموعة أصفار الدالة د حيث د (س) = س^{٢} + ٤ فى ح هى ....

(أ) {٢} (ب) {-٢ ، ٢} (جـ) ح (د) $\emptyset$

٩ أبسط صورة للدالة د : د (س) = $\frac{١٠ - ٢ س}{س - ٥}$ ، س ≠ ٥ هى ....

(أ) -١ (ب) -٢ (جـ) ١ (د) ٢

المجموعة الثانية

◀ أجب عن الأسئلة الآتية :

[١٠] أوجد جبريًا فى ح × ح مجموعة حل المعادلتين الآتيتين معًا :

$٢ س + ص = ٩$ ، $٣ س - ص = ٦$

[١١] أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا المجال حيث :

$$ن(س) = \frac{س^٢ + ٢ س}{س^٢ - ٤} + \frac{س - ٣}{س^٢ - ٥ س + ٦}$$

[١٢] إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان : ل (أ) = ٠,٣ ، ل (ب) = ٠,٥ ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٧ أوجد :

(١) ل (أ ∩ ب) (٢) ل (ب - أ)

[١٣] أوجد مجموعة حل المعادلتين فى ح × ح معًا : $س - ص = ١$ ، $س^٢ + ص^٢ = ٢٥$

[١٤] إذا كان : $ن_١(س) = \frac{١}{س - ١}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ + س + ١}{س^٣ - ١}$

أثبت أن : $ن_١ = ن_٢$

[١٥] باستخدام القانون العام أوجد مجموعة حل المعادلة :

$س^٢ + ٣ س + ١ = ٠$ فى ح مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

[١٦] أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا المجال حيث :

$$ن(س) = \frac{س^٢ - ٦ س + ٩}{س - ٣} \times \frac{١٥}{٥ س - ١٥}$$

١٠ محافظة بورسعيد



أجب عن الأسئلة الآتية :

المجموعة الأولى

◀ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] $٣ \times ٤ - ٤ \div ٢ = $ ....

(أ) صفر (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ١٠

٢ إذا كان : $\bar{أ}$ هو الحدث المكمل للحدث أ فإن : $\bar{أ} \cup أ$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) ف (د) $\varnothing$

٣ مجال الدالة $ن^{-١}$ حيث ن (س) = $\frac{س + ٤}{س - ٤}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح - {٤}

(جـ) ح - {٤ ، -٤} (د) {٤ ، -٤}

٤ إذا كانت : س ∈ ح - {٠ ، ١} فإن : $\frac{١ - س}{س} \div \frac{س - ١}{س}$ = ...

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) س - ١ (د) س

٥ إذا كانت : د (س) = $\frac{س + ٧}{س - ٣}$ فإن : د ليست معرفة عندما س = ...

(أ) ٣ (ب) ٧ (جـ) -٣ (د) -٧

٦ عددان موجبان مجموعهما ٨ والفرق بينهما ٢ فإن العددين هما ....

(أ) ٢ ، ٦ (ب) ٣ ، ٥ (جـ) ٦ ، ٤ (د) ٢ ، ٤

٧ $ح_+ \cap ح_-$ = ...

(أ) {صفر} (ب) ح (جـ) $\varnothing$ (د) $ح_+$

٨ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = صفر هى ....

(أ) ح - {صفر} (ب) $\varnothing$ (جـ) {صفر} (د) ح

٩ إذا كان منحنى الدالة التربيعية د متماثلاً حول محور الصادات ويمر بالنقطة (٢ ، ٠)
فإن مجموعة حل المعادلة د (س) = صفر فى ح هى ....

(أ) {٢ ، -٢} (ب) {٢} (جـ) {٢ ، صفر} (د) (٢ ، -٢)

المجموعة الثانية

◄ أجب عن الأسئلة الآتية :

١٠ أوجد : ن (س) فى أبسط صورة مع ذكر المجال حيث :

$$ن (س) = \frac{س^٢ + ٣ س}{س^٢ - ٩} \times \frac{س - ٣}{٢ س}$$

١١ أثبت أن $ن_١ = ن_٢$ حيث : $ن_١ (س) = \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ - ٤ س + ٤}$ ، $ن_٢ (س) = \frac{س + ٢}{س - ٢}$

١٢ إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان
ل (أ) = $\frac{٣}{٥}$ ، ل (ب) = $\frac{١}{٥}$ أوجد : ل (أ ∩ ب) ، ل (أ ∪ ب)

١٣ أوجد ن (س) فى أبسط صورة مع ذكر المجال حيث : ن (س) = $\frac{٢ س}{س + ٢} + \frac{٤}{س + ٢}$

١٤ أوجد جبريًا فى ح × ح مجموعة حل المعادلتين الآتيتين :

س − ٢ ص = ٠ ، س ص = ٨

١٥ باستخدام القانون العام أوجد مجموعة حل المعادلة الآتية فى ح :

س^٢ − ٥ س + ٣ = ٠ (مقربًا الناتج لأقرب رقم عشرى واحد)

١٦ أوجد جبريًا فى ح × ح مجموعة حل المعادلتين الآتيتين :

س + ص = ٥ ، س − ص = ١



١١ محافظة دمياط

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية ، وكان ل (أ) = ٠,٧ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٥ فإن : ل (أ − ب) = ...

(أ) ٠,٧ (ب) ٠,٥ (جـ) ٠,٣ (د) ٠,٢

٢ إذا كان منحنى الدالة التربيعية د يمر بالنقاط (٤ ، ٠) ، (٠ ، −٨) ، (−٢ ، ٠) فإن مجموعة الحل للمعادلة د (س) = صفر فى ح هى ....

(أ) {٤ ، صفر} (ب) {٨ ، صفر} (جـ) {−٢ ، ٤} (د) {−٢ ، ٨}

٣ إذا كانت : د (س) = (س + ٢) / س فإن مجال المعكوس الضربى للدالة د هو ....

(أ) ح − {٢} (ب) ح − {−٢ ، صفر}

(جـ) ح − {صفر} (د) ح

(ب) أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن :

ن (س) = ٢ س / (س^٢ − ٢ س) − (س + ٢) / (س^٢ − ٤)

السؤال الثانى

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ قيمة س التى تحقق المعادلة : س^٢ = ٩ حيث س ∈ ط هى ....

(أ) −٣ (ب) ٣ (جـ) ± ٣ (د) √٣

[٢] مجموعة حل المعادلتين : س − ص = صفر ، س ص = ٩ فى ح × ح هى ....

(أ) {(٠ ، ٠)} (ب) {(−٣ ، ٣)}

(جـ) {(٣ ، ٣)} (د) {(−٣ ، −٣) ، (٣ ، ٣)}

[٣] مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = −٣ س هى ....

(أ) {صفر} (ب) {−٣} (جـ) {٣} (د) ح

(ب) أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن :

$$ن (س) = \frac{س^٢ + ٢ س}{س^٣ - ٢٧} \div \frac{س + ٢}{س^٢ + ٣ س + ٩}$$

السؤال الثالث

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] إذا كان : $\sqrt{٦٤ + ٣٦}$ = ٨ + س فإن : س = ...

(أ) ١٠ (ب) ٩ (جـ) ٦ (د) ٢

[٢] المستقيمان : ٢ س + ص = ١ ، ٤ س + ٢ ص = ٧ يكونان ....

(أ) متوازيين. (ب) منطبقين.

(جـ) متقاطعين وغير متعامدين. (د) متعامدين.

[٣] المجال المشترك للدالتين $ن_١$ ، $ن_٢$ حيث $ن_١ (س) = \frac{٧}{س - ٥}$

، $ن_٢ (س) = \frac{٨}{س - ٣}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٥ ، ٣} (جـ) ح − {٥} (د) {٥ ، ٣}

(ب) إذا كان : $ن_١ (س) = \frac{س + ٥}{س^٢ - ٢٥}$ ، $ن_٢ (س) = \frac{٣}{٣ س - ١٥}$ بين ما إذا كانت

$ن_١ = ن_٢$ أم لا ، مع ذكر السبب.

السؤال الرابع

(أ) أوجد فى ح × ح مجموعة حل المعادلتين الآتيتين معًا (جبريًا) :

س + ص = ١ ، س − ص = ٣

(ب) إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما ، وكان :

ل (أ) = $\frac{١}{٣}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٧}{١٢}$ فأوجد : ل (ب)

السؤال الخامس

(أ) أوجد فى ح × ح مجموعة حل المعادلتين الآتيتين معًا :

س − ٢ ص = صفر ، $س^٢ + ص^٢ = ٢٠$

(ب) باستخدام القانون العام أوجد مجموعة حل المعادلة الآتية فى ح :

$س^٢ − ٤ س + ١ =$ صفر (علمًا بأن : $\sqrt{٣} \simeq ١,٧$)



١٢ محافظة كفر الشيخ

أجب عن الأسئلة الآتية : *(يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)*

المجموعة الأولى

◄ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

١ إذا كان : س = ٢ أحد حلول المعادلة : $م س^٢ + ٢ س + ٨ = ٠$ فإن : م = ...

(أ) −٣ (ب) ٤ (جـ) −٢ (د) ٣

٢ إذا كان : ن (س) = $\frac{س}{س^٢ + ١}$ فإن مجال ن هو ....

(أ) ح − {٠} (ب) ح (جـ) ح − {١ ، −١} (د) ∅

٣ إذا كان : $س^٢ + ك س + ٩$ مقدار مربعًا كاملًا فإن : ك = ...

(أ) ± ٩ (ب) ± ١ (جـ) ± ٤ (د) ± ٦

٤ إذا كانت {٣ ، −٣} هى مجموعة أصفار الدالة د حيث د (س) = $س^٢ + ك$

فإن : ك = ...

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) ٩ (د) −٩

٥ إذا كان : $ن^{-١}$ (س) = $\frac{س − ٣}{س − ٥}$ فإن المعكوس الجمعى للكسر الجبرى ن (س)

هو ....

(أ) $\frac{٥ − س}{س − ٣}$ (ب) $\frac{٥ + س}{س + ٣}$ (جـ) $\frac{س − ٥}{س + ٣}$ (د) $\frac{س − ٥}{س − ٣}$

٦ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان : ل (أ ∩ ب) = ٠,٢

، ل (أ) = ٠,٦

فإن : ل (أ − ب) = ...

(أ) ٠,٤ (ب) ٠,٦ (جـ) ٠,٢ (د) ٠,٨

٧ إذا كان : $س^٣ ص^٣ = ٨$ فإن : $س^٢ ص^٢$ = ...

(أ) ٢ (ب) ١٦ (جـ) ٤ (د) ١٢

٨ إذا كان مجال ن : ن (س) = $\frac{\text{س} - ٥}{٢\text{س} - \text{ب}}$ هو ح − {٣} فإن : ب = ...

(أ) −٣ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) −٦

٩ إذا كانت المعادلتان : ب س + ٤ ص = ٧ ، ٣ س + أ ص = ٢١ لهما عدد لا نهائى من الحلول فى ح × ح فإن : أ ب = ...

(أ) ١٢ (ب) ٧ (جـ) ٢١ (د) ٩

المجموعة الثانية

أجب عن الأسئلة الآتية :

١٠ باستخدام القانون العام أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة : س (س − ٥) = ٧ مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد.

١١ إذا كان : ن (س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٢}$

(١) أوجد : $\text{ن}^{-١}$ (س) فى أبسط صورة موضحًا مجال $\text{ن}^{-١}$

(٢) أوجد قيمة س إذا كان : $\text{ن}^{-١}$ (س) = ٣

١٢ أوجد فى ح × ح مجموعة حل المعادلتين الآتيتين جبريًا : ٣ س + ٢ ص = ٧ ، ٢ س + ص = ٤

١٣ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية حيث ل (أ) = ٠,٥ ، ل (بَ) = ٠,٧ ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٦ أوجد : ل (ب) ، ل (أ ∩ ب)

١٤ إذا كان : $\text{ن}_{١}$ (س) = $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢}}$ ، $\text{ن}_{٢}$ (س) = $\frac{\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س}}{\text{س}^{٤} - \text{س}}$

أثبت أن : $\text{ن}_{١} = \text{ن}_{٢}$

١٥ أوجد فى ح × ح مجموعة حل المعادلتين : س − ص = ١ ، $\text{ص}^{٢} = ١٣ - \text{س}^{٢}$

١٦ إذا كان : ن (س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٣\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٩} - \frac{١ - \text{س}}{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٣}$

أوجد : ن (س) فى أبسط صورة موضحًا مجال ن



أجب عن الأسئلة الآتية :

المجموعة الأولى

◀ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ درجة المقدار الجبرى : ٣ س + ٤ ص + س^{٢} ص هى ....

(أ) الأولى. (ب) الثالثة. (جـ) الثانية. (د) الرابعة.

٢ إذا كان هناك حل وحيد للمعادلتين س + ٤ ص = ٥ ، ٣ س + ك ص = ١٢

فإن : ك ≠ ....

(أ) ١٢ (ب) –٤ (جـ) ٤ (د) –١٢

٣ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = صفر هى ....

(أ) ح – {٠} (ب) ∅ (جـ) ح (د) {٠}

٤ مجال المعكوس الضربى للكسر الجبرى $\frac{س + ٢}{س - ٣}$ هو ....

(أ) ح – {–٢} (ب) ح – {–٢ ، ٣} (جـ) ح – {٣} (د) {–٢ ، ٣}

٥ إذا كان س حدثًا من فضاء عينة لتجربة عشوائية ف ، وكان : ل (س َ) = ٢ ل (س)

فإن : ل (س) = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) ١ (د) $\frac{٢}{٣}$

٦ إذا كانت : د (س) = $\frac{س - ٥}{٥ - س}$ ، س ≠ ٥ فإن : د (س) فى أبسط صورة هى ....

(أ) –١ (ب) ١ (جـ) ٥ (د) –٥

٧ إذا كان : $\sqrt{س^{٢}}$ = ٢٥ فإن : س = ...

(أ) ٥ (ب) ± ٥ (جـ) ٢٥ (د) ± ٢٥

٨ إذا كان : $\frac{١}{س} + \frac{١}{ص} + \frac{١}{س ص} = \frac{ك}{س ص}$ فإن : ك = ...

(أ) س ص (ب) س + ص

(جـ) ٣ (د) س + ص + ١

٩ المنحنى ص = أ س^{٢} + ب س + جـ يقطع محور الصادات عند النقطة ....

(أ) (٠ ، جـ) (ب) (٠ ، ب) (جـ) (جـ ، ٠) (د) (ب ، ٠)

المجموعة الثانية

◄ أجب عن الأسئلة الآتية :

[١٠] أوجد جبريًا مجموعة حل المعادلتين الآتيتين فى ح × ح :

٣ س + ص = ٩ ، ٢ س − ص = ١

[١١] أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا المجال حيث :

$$ن (س) = \frac{س^٢ + ٦ س + ٨}{س^٢ - ٤} - \frac{س^٢ - ٥ س}{س^٢ - ٧ س + ١٠}$$

[١٢] أوجد مجموعة الحل فى ح للمعادلة :

$س^٢ + ٢ س - ٤ = $ صفر (مقربًا الناتج لرقمين عشريين)

[١٣] أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا المجال حيث :

$$ن (س) = \frac{س^٢ - ٥ س + ٦}{س^٣ - ٨} \div \frac{س - ٣}{س^٢ + ٢ س + ٤}$$

[١٤] أوجد مجموعة حل المعادلتين الآتيتين فى ح × ح :

س − ص = ١ ، $س^٢ - س ص = ٣$

[١٥] إذا كان : $ن_١ (س) = \frac{س^٢}{س^٣ - س^٢}$ ، $ن_٢ (س) = \frac{س^٣ + س^٢ + س}{س^٤ - س}$

فأثبت أن : $ن_١ = ن_٢$

[١٦] إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان : ل (أ) = ٠,٧ ، ل (ب) = ٠,٦ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٤ أوجد كلًا من :

① ل (أَ) ② ل (أ ∪ ب) ③ ل (أ − ب)



١٤ محافظة الفيوم

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

السؤال الأول

◄ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] أبسط صورة للدالة د : $د (س) = \frac{س - ٧}{٧ - س}$ ، س ≠ ٧ هى ....

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) −٧ (د) ٧

[٢] إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة لتجربة عشوائية

، وكان : ل (أ) = ٠,٣ ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٦ فإن : ل (بَ) = ...

(أ) ٠,٣ (ب) ٠,٦ (جـ) ٠,٧ (د) ٠,٠٩

٣ إذا كانت : $٣^{س} = ٩$ فإن : $٣^{س + ١} = ...$

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٢٧ (د) ٨١

٤ إذا كان : $\sqrt{٦٤ + ٣٦} = ٨ + س$ فإن : س = ...

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ٢ (د) ١٠

٥ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = $\frac{س - ٣}{س + ٢}$ هى ....

(أ) {٣} (ب) {-٢} (جـ) {-٣} (د) {٢}

٦ مجال الدالة د : د (س) = $٢ س^{-٣}$ هو ....

(أ) {٢} (ب) {-٢} (جـ) ح - {-٣} (د) ح - {٠}

السؤال الثانى

(أ) أوجد فى ح × ح مجموعة حل المعادلتين :

٢ ص = س - ٥ ، ٤ س = ٢ - ص

(ب) أوجد باستخدام القانون العام مجموعة حل المعادلة الآتية فى ح :

$س^{٢} = ٤ + ٢ س$ مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

السؤال الثالث

(أ) أوجد د (س) فى أبسط صورة موضحًا المجال حيث :

د (س) = $\frac{٢ س - ٦}{س^{٢} - ٩} - \frac{٨}{٣ - س^{٢} - ٢ س}$

(ب) أوجد فى ح × ح مجموعة حل المعادلتين الآتيتين جبريًا :

ص - س = -٣ ، $س^{٢} + ص^{٢} = ٥$

السؤال الرابع

(أ) أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا المجال :

ن (س) = $\frac{٣ س^{٢} - ٦ س}{س^{٢} - ٤} \div \frac{س^{٢} + س}{س^{٢} + ٣ س + ٢}$

(ب) إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية ، وكان :

ل (أ) = ٠,٦ ، ل (ب) = ٠,٥ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٣

فأوجد : ١ ل (أ) ٢ ل (أ ∪ ب) ٣ ل (ب - أ)

السؤال الخامس

(أ) إذا كان : $ن_١(س) = \frac{٢س}{٢س + ٤}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ + ٢س}{س^٢ + ٤س + ٤}$

هل $ن_١ = ن_٢$ ؟

(ب) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان : $ن(س) = \frac{س - ٣}{س + ٢}$ فإن مجال $ن^{-١}$ هو ....

(أ) {−٣} (ب) {−٢}

(جـ) ع − {−٣ ، ٢} (د) ع − {−٢ ، ٣}

٢ إذا كانت مجموعة الحل للمعادلة : $س^٢ - أس + ٤ = ٠$ فى ع هى ∅

فإن أ يمكن أن تساوى ....

(أ) −٥ (ب) صفر (جـ) ٤ (د) ٥

٣ المستقيمان س + ٥ = ٠ ، ٢ص + ٦ = ٠ يتقاطعان فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

١٥ محافظة بنى سويف



أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

السؤال الأول

◄ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان : $\sqrt{س} = \sqrt[٣]{٨}$ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ١٦ (د) ٦٤

٢ إذا كان المستقيمان الممثلان للمعادلتين : س + ٣ص = ٥ ، س + ك ص = ٩ متوازيين فإن : ك = ...

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٩

٣ إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية

فإن : ل (أ ∩ ب) = ...

(أ) ١ (ب) ٠,٥ (جـ) صفر (د) ∅

٤ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = ٢ س (س^{٢} − ٢ س + ١) هى ....

(أ) {صفر} (ب) {صفر ، ١}

(جـ) {صفر ، −١} (د) {صفر ، ١ ، −١}

٥ إذا كان منحنى الدالة التربيعية د يمر بالنقاط (−١ ، ٠) ، (٠ ، −٤) ، (٤ ، ٠) فإن مجموعة حل المعادلة د (س) = صفر فى ح هى ....

(أ) {صفر ، −١} (ب) {−١ ، −٤} (جـ) {−١ ، ٤} (د) {٤ ، −٤}

٦ إذا كان : ن (س) = $\frac{س - ٥}{س + ٢}$ فإن : مجال ن$^{-١}$ = ...

(أ) ح − {−٢} (ب) ح − {٥}

(جـ) ح − {٢ ، −٥} (د) ح − {٥ ، −٢}

السؤال الثانى

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان : س^{٢} − ص^{٢} = ٢ (س + ص) حيث س + ص ≠ صفر

فإن : س − ص = ...

(أ) ٨ (ب) ٦ (جـ) ٤ (د) ٢

٢ أبسط صورة للدالة د : د (س) = $\frac{٣ - س}{س - ٣}$ حيث س ≠ ٣ هى ....

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٣

٣ إذا كان المجال المشترك للدالتين ن$_{١}$ ، ن$_{٢}$ حيث ن$_{١}$ = (س) = $\frac{٣}{س}$

، ن$_{٢}$ (س) = $\frac{٥}{س + ك}$ هو ح − {٠ ، ٢} فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) −٣ (د) −٥

(ب) أوجد فى ح × ح مجموعة حل المعادلتين :

ص − س = ٢ ، س^{٢} + س ص − ٤ = صفر

السؤال الثالث

(أ) أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال الدالة ن حيث :

$$ن (س) = \frac{س - ٢}{س^{٢} - ٤} + \frac{٢ س + ٦}{س^{٢} + ٥ س + ٦}$$

(ب) أوجد جبريًا فى ح × ح مجموعة حل المعادلتين :

س = ٣ ص + ٧ ، س + ٢ ص = ١٢

السؤال الرابع

(أ) إذا كانت : ن (س) = $\frac{س^2 + 14 س + 49}{س^3 - 8} \div \frac{س + 7}{س - 2}$

فأوجد : ن (س) فى أبسط صورة وعين المجال ، **ثم أوجد :** ن (−1)

(ب) باستخدام القانون العام أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة : $س^2 = 5 - 2 س$ مقربًا الناتج لرقمين عشريين.

السؤال الخامس

(أ) إذا كان : $ن_1$ (س) = $\frac{3}{س - 1} - \frac{2}{س - 1}$ ، $ن_2$ (س) = $\frac{س^2}{س^3 - س^2}$

فأثبت أن : $ن_1$ (س) = $ن_2$ (س) لجميع قيم س التى تنتمى للمجال المشترك وأوجد هذا المجال.

(ب) إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان : ل (أ) = ٠,٧

، ل (أ − ب) = ٠,٥ **أوجد :** ل (أَ) ، ل (أ ∩ ب)

١٦ محافظة أسيوط



أجب عن الأسئلة الآتية : ***(يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)***

السؤال الأول

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كانت : $٢^{س} = ٣$ فإن : $٨^{س} = $ ....

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ٢٧

٢ إذا كان المستقيمان الممثلان للمعادلتين : س + ٣ ص = ١٤ ، ٢ س + ك ص = ٥ متوازيين فإن : ك = ...

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ١٢

٣ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = $\frac{س^2 - س - 2}{س^2 + 4}$ هى ....

(أ) ∅ (ب) ح (جـ) {٢ ، −١} (د) {−٢ ، ٢}

٤ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، أ ⊂ ب

فإن : ل (أ ∪ ب) = ...

(أ) ل (أ) (ب) ل (ب) (جـ) ل (أ ∩ ب) (د) صفر

٥ المجال المشترك للكسرين $\frac{٢ س}{س - ٣}$ ، $\frac{٧ س + ١}{٢ س - ٦}$ هو ....

(أ) ح
(ب) ح - {٠ ، ٣}
(جـ) ح - {٣}
(د) ح - {٣ ، -٣}

٦ إذا كان للكسر الجبرى $\frac{س - أ}{س + ٥}$ معكوس ضربى هو $\frac{س + ٥}{س + ٣}$

فإن : أ = ...

(أ) ٣
(ب) -٥
(جـ) -٣
(د) ٥

السؤال الثانى

(أ) أوجد ن (س) فى أبسط صورة موضحًا المجال حيث :

$$ن (س) = \frac{س^{٣} - ٢٧}{س^{٢} - ٥ س + ٦} \div \frac{س^{٢} + ٣ س + ٩}{س - ٢}$$

(ب) أوجد فى ح باستخدام القانون العام مجموعة حل المعادلة :

$س^{٢} + ٣ س = ١$ (مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد)

السؤال الثالث

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ عدد حلول المعادلتين : س - ٢ ص = ١ ، ٣ س + ص = ١٠ معًا فى ح × ح هو ....

(أ) صفر
(ب) ١
(جـ) ٢
(د) عدد لا نهائى من الحلول.

٢ إذا كانت : ن (س) = $\frac{س - ١}{س + ٣}$ فإن : مجال $ن^{-١}$ هو ....

(أ) ح - {-٣}
(ب) ح - {١}
(جـ) ح - {١ ، -٣}
(د) ح

٣ $\sqrt{١٤٤ + ٢٥}$ = ١٢ + ...

(أ) -٢
(ب) ١
(جـ) ٤
(د) ٥

(ب) أوجد فى ح × ح مجموعة حل المعادلتين الآتيتين :

س = ٣ ، $س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$

السؤال الرابع

(أ) إذا كان : $ن_١ (س) = \frac{١}{س}$ ، $ن_٢ (س) = \frac{س^٢ + ٤}{س^٣ + ٤ س}$ **أثبت أن :** $ن_١ = ن_٢$

(ب) إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما ، وكان : ل (أ) = ٠,٦ ، ل (ب) = ٠,٥ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٢

أوجد : [١] ل (أ) [٢] ل (أ ∪ ب) [٣] ل (ب − أ)

السؤال الخامس

(أ) **أوجد ن (س) فى أبسط صورة موضحًا المجال حيث :**

$$ن (س) = \frac{س^٢ + س}{س^٢ - ١} - \frac{س - ٥}{س^٢ - ٦ س + ٥}$$

(ب) **أوجد مجموعة حل المعادلتين الآتيتين فى ح × ح :**

٢ س + ص = ١٠ ، س − ص = ٢



١٧ محافظة سوهاج

أجب عن الأسئلة الآتية : ***(يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)***

المجموعة الأولى

◄ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

[١] مجموعة حل المعادلة : $س^٢ - س$ = صفر فى ح هى ....

(أ) {١} (ب) {٠ ، ١} (جـ) {−١} (د) {٠ ، −١}

[٢] المستقيمان : ٣ س + ٥ ص = ٠ ، ٥ س − ٣ ص = ٠ يتقاطعان فى ....

(أ) نقطة الأصل. (ب) الربع الأول. (جـ) الربع الثانى. (د) الربع الرابع.

[٣] يكون للدالة د حيث $د (س) = \frac{س - ٢}{س - ٥}$ معكوس جمعى فى المجال ....

(أ) ح − {−٥} (ب) ح − {٥}

(جـ) ح (د) ح − {٢ ، ٥}

[٤] إذا كانت : س ∈ ح − {٠ ، ١} فإن : $\frac{١ - س}{س} \div \frac{س - ١}{س}$ (فى أبسط صورة) هى ....

(أ) ١ (ب) س (جـ) −١ (د) س − ١

5 إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة لتجربة عشوائية ما ، وكان :

ل (أ) = $\frac{٣}{٥}$ ، ل (ب) = $\frac{٢}{٥}$ فإن : ل (أ ∩ ب) = ...

(أ) ∅ (ب) $\frac{١}{٥}$ (جـ) ١ (د) صفر

6 إذا كان : $٥^{س} = ٣$ فإن : $٥^{س+١}$ = ...

(أ) ٨ (ب) ١٥ (جـ) ١١ (د) ٣٠

7 إذا كانت {−٣ ، ٣} هى مجموعة أصفار الدالة د حيث د (س) = $س^٢$ + أ

فإن : قيمة أ = ...

(أ) ٩ (ب) −٩ (جـ) −٣ (د) ٣

8 عدد مكون من رقمين ، رقم آحاده = رقم عشراته = س هو ....

(أ) ١٠ $س^٢$ (ب) ١٠ س (جـ) ١١ س (د) ١١ $س^٢$

9 إذا كانت : $ن_١$ (س) = $\frac{س + ١}{س - ٢}$ ، $ن_٢$ (س) = $\frac{س^٢ + س}{س^٢ - ٢ س}$ فإن المجال المشترك الذى تتساوى فيه $ن_١$ ، $ن_٢$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٢}

(جـ) ح − {٠ ، ٢} (د) ح − {−١ ، ٢}

المجموعة الثانية

◄ أجب عن الأسئلة الآتية :

10 أوجد مجموعة حل المعادلتين الآتيتين معًا فى ح × ح :

س − ص = ٤ ، ٣ س + ٢ ص = ٧

11 إذا كانت : ن (س) = $\frac{س + ١}{س^٢ - س - ٢}$ × $\frac{س^٢ + ٣ س - ١٠}{٣ س^٢ + ١٦ س + ٥}$.

أوجد : (١) ن (س) فى أبسط صورة مبينًا المجال.

(٢) ن (٠) ، ن (−١) إن أمكن ذلك.

12 إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية ما ، وكان :

ل (أ) = ٠,٦ ، ل (ب) = ٠,٥ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٣ فأوجد :

(١) احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل. (٢) ل (ب − أ) (٣) ل (أ̄)

١٣ أوجد باستخدام القانون العام مجموعة الحل فى ح للمعادلة :

$س^٢ - ٦ س + ٤ = ٠$ (مقربًا الناتج لرقمين عشريين)

١٤ إذا كان : $ن(س) = \frac{س^٢ + ٢ س + ٤}{س^٣ - ٨} + \frac{س^٢ - ٩}{س^٢ + س - ٦}$

أوجد : ن (س) فى أبسط صورة مبينًا المجال.

١٥ أوجد مجموعة حل المعادلتين الآتيتين معًا فى ح × ح :

$س - ص = ٢$ ، $س^٢ + ص^٢ = ١٠$

١٦ إذا كان : $ن(س) = \frac{س^٢ - ٢ س}{(س - ٢)(س^٢ + ٢)}$

① أوجد : $ن^{-١}(س)$ فى أبسط صورة وعين المجال $ن^{-١}$.

② إذا كان : $ن^{-١}(س) = ٣$ أوجد قيمة س



١٨ محافظة قنا

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

السؤال الأول

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان : $س - ص = ٣$ ، $س^٢ - ص^٢ = ١٢$ فإن : س + ص = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ١٢

٢ إذا كان : $ن(س) = \frac{س - ٣}{٧}$ فإن : مجال $ن^{-١}(س)$ هو ....

(أ) ح (ب) ح - {٧}

(جـ) ح - {٣} (د) ح - {٧ ، ٣}

٣ المجال المشترك للكسرين $\frac{س - ٣}{٣}$ ، $\frac{س + ٢}{س}$ هو ....

(أ) ح - {٣} (ب) ح - {٠}

(جـ) ح - {٣ ، -٢} (د) ح - {٠ ، ٣}

(ب) إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية ، وكان : ل (أ) = ٠,٥

، ل (ب) = ٠,٧ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٤ فأوجد : ل (ب - أ)

السؤال الثانى

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

1 عدد حلول المعادلتين : س + ص = ٥ ، ٢ س + ٢ ص = ١٠ معًا فى ح × ح هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى.

2 مجموعة أصفار الكسر الجبرى $\frac{س - ٣}{٥}$ هى ....

(أ) ح (ب) ∅ (جـ) {٣} (د) ح − {٣}

3 إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة لتجربة عشوائية ف

فإن : ل (أ ∩ ب) = ...

(أ) {٠} (ب) صفر (جـ) ل (أ) (د) ل (ب)

(ب) أوجد ن (س) فى أبسط صورة موضحًا المجال حيث :

$$ن (س) = \frac{س^٣ - ٨}{س^٢ + س - ٦} \div \frac{س^٢ + ٢ س + ٤}{٣ س + ٩}$$

السؤال الثالث

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

1 إذا كان : أ ب = ١ ، ب حـ = ٤ ، أ حـ = ٩ حيث أ ، ب ، حـ أعداد حقيقية موجبة

فإن : أ ب حـ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

2 الزوج الذى يحقق المعادلتين : س ص = ٤ ، س = ص معًا هو ....

(أ) (٢ ، ٢) (ب) (−٢ ، ٢) (جـ) (٢ ، −٢) (د) (٤ ، ١)

3 إذا كان : ن (س) = $\frac{٣ س - ٦}{س - ٣}$ فإن : $ن^{-١}$ (٢) = ...

(أ) صفر (ب) ٦ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) غير معرف.

(ب) إذا كان : $ن_١ (س) = \frac{س^٢ - س}{س^٣ - ٢ س^٢}$ ، $ن_٢ (س) = \frac{س^٢ - ٣ س + ٢}{س^٣ - ٤ س^٢ + ٤ س}$

فأثبت أن : $ن_١ = ن_٢$

السؤال الرابع

(أ) باستخدام القانون العام أوجد فى ح مقربًا لأقرب رقمين عشريين مجموعة الحل للمعادلة :

$٢ س^{٢} + ٥ س - ١ = ٠$ حيث $\sqrt{٣٣} \simeq ٥,٧٤$

(ب) حل فى ح × ح المعادلتين : س ص = ٣ ، س + ص = ٤

السؤال الخامس

(أ) أوجد المجال المشترك للكسرين الآتيين : $\frac{س}{٤ - س^{٢}}$ ، $\frac{٥}{س + ٢}$

(ب) زاويتان متكاملتان قياس إحداهما أربعة أمثال الأخرى فما قياس كل منهما ؟



١٩ محافظة الأقصر

أجب عن الأسئلة الآتية :

المجموعة الأولى

◄ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ مجال المعكوس الضربى للدالة د : د (س) = $\frac{س - ٢}{س + ١}$ هو ....

(أ) {-١}　　(ب) ح - {-١ ، ٢}

(جـ) ح - {٢}　　(د) ح - {-١}

٢ عدد حلول المعادلة : ٢ س - ص = ٣ فى ح × ح هو ....

(أ) صفر　　(ب) ٢　　(جـ) ١　　(د) عدد لا نهائى.

٣ إذا كان : $(٢^{س} ، ص^{٣}) = (٨ ، -٢٧)$　فإن : س + ص = ...

(أ) -٦　　(ب) ٦　　(جـ) صفر　　(د) ٥

٤ إذا كانت : $(س + ٥)^{٢} = س^{٢} + ك س + ٢٥$　فإن : ك = ...

(أ) ٥　　(ب) ٧　　(جـ) ١٠　　(د) ١

٥ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، أ ⊂ ب حيث أ ≠ ب

فإن : ل (أ ∪ ب) = ...

(أ) ل (ب)　　(ب) ل (أ)　　(جـ) ل (أ ∩ ب)　　(د) صفر

٦ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = ٥ س هى ....

(أ) $\{\frac{١}{٥}\}$ (ب) {صفر} (جـ) {٥} (د) ∅

٧ إذا كانت : ص (د) = {٤ ، –٤} ، د (س) = $س^٢$ + أ فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) –٢ (جـ) ± ٢ (د) –١٦

٨ أحد حلول المعادلتين : س – ص = ٠ ، س ص = ٩ فى ح × ح هو ....

(أ) (٣ ، –٣) (ب) (–٣ ، ٣) (جـ) (٣ ، ٣) (د) (٩ ، ١)

٩ مجال الدالة د حيث د (س) = $\frac{٥}{س - ١}$ هو ....

(أ) {١} (ب) {٥} (جـ) ح – {١} (د) ح – {٥}

المجموعة الثانية

◄ أجب عن الأسئلة الآتية :

١٠ إذا كان : ن (س) = $\frac{س^٢ - س}{س^٢ - ٣ س + ٢}$

① أوجد : $ن^{-١}$ (س) فى أبسط صورة. ② عين مجال $ن^{-١}$

١١ مستخدمًا القانون العام أوجد فى ح حل المعادلة :

$س^٢$ – ٤ س + ٢ = ٠ مقربًا الناتج لرقمين عشريين.

١٢ ضع ن (س) فى أبسط صورة مبينًا المجال :

ن (س) = $\frac{س^٢ - ٧ س + ١٠}{س^٢ - ٦ س + ٥}$ ÷ ($س^٢$ – ٢ س)

١٣ مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٢ سم ومحيطه ٢٨ سم ، أوجد مساحة المستطيل.

١٤ حل المعادلتين الآتيتين معًا فى ح × ح :

س – ص = ٣ ، س ص = ١٠

١٥ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان : ل (أ) = $\frac{٢}{٥}$

، ل (ب) = $\frac{١}{٣}$ أوجد ل (أ ∪ ب) فى كل من الحالتين :

① الحدثان متنافيان. ② ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{١٥}$

١٦ إذا كان : $ن_١$ (س) = $\frac{٥ س^٣ + ١٠ س}{(س^٢ + ٢)(س + ١)}$ ، $ن_٢$ (س) = $\frac{٥ س}{س + ١}$

أثبت أن : $ن_١$ = $ن_٢$



٢٠ محافظة أسوان

أجب عن الأسئلة الآتية :

المجموعة الأولى

◀ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ عدد الحلول للمعادلتين : ٣ س + ص = ٤ ، ٢ ص + ٦ س = ٣ في ح × ح هو ....

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) عدد لا نهائي. (د) $\varnothing$

٢ $\sqrt{٣٦ + ٦٤}$ = ٦ + ...

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ٤ (د) ١٤

٣ إذا كان منحنى الدالة التربيعية د لا يقطع محور السينات في أي نقطة فإن عدد حلول المعادلة د (س) = صفر في ح هو ....

(أ) حلان. (ب) عدد لا نهائي من الحلول.

(جـ) صفر. (د) حل وحيد.

٤ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = ٥ هي ....

(أ) {٥} (ب) {١} (جـ) $\varnothing$ (د) {صفر}

٥ إذا كان أَ هو الحدث المكمل للحدث أ فإن : ل (أ ∩ أَ) = ...

(أ) $\varnothing$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ١ (د) صفر

٦ إذا كان : $٥^{س - ٣}$ = ١ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) صفر (د) ١

٧ مجال الدالة د : د (س) = $\frac{س - ٣}{س^٢ - ٤}$ هو ....

(أ) {٢ ، −٢} (ب) {٣} (جـ) ح − {٢ ، −٢} (د) {٢}

٨ أبسط صورة للدالة د : د (س) = $\frac{س - ٥}{٥ - س}$ ، س ≠ ٥ هي ....

(أ) ٥ (ب) −٥ (جـ) ١ (د) −١

٩ إذا كان : ن (س) = $\frac{س + ٢}{س + ٥}$ فإن : مجال $ن^{-١}$ هو ....

(أ) {-٢ ، -٥}
(ب) {-٢}
(جـ) {-٥}
(د) ح - {-٢ ، -٥}

المجموعة الثانية

◄ أجب عن الأسئلة الآتية :

١٠ أوجد فى ح × ح مجموعة الحل للمعادلتين : س = ص ، $س^٢ + ص^٢ = ٥٠$

١١ إذا كان : $ن_١$ (س) = $\frac{س}{س^٢ - ٤}$ ، $ن_٢$ (س) = $\frac{٢ س}{٢ س^٢ - ٨}$

أثبت أن : $ن_١ = ن_٢$

١٢ إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين من تجربة عشوائية ، وكان : ل (أ) = $\frac{١}{٣}$

، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٧}{١٢}$

أوجد : ل (ب)

١٣ أوجد مجموعة الحل للمعادلة الآتية فى ح (باستخدام القانون العام) :

$٣ س^٢ = ٥ س - ١$ مقربًا الناتج لرقمين عشريين.

١٤ أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا المجال : ن (س) = $\frac{س^٢}{س^٢ + ٢ س} + \frac{٢ س - ٤}{س^٢ - ٤}$

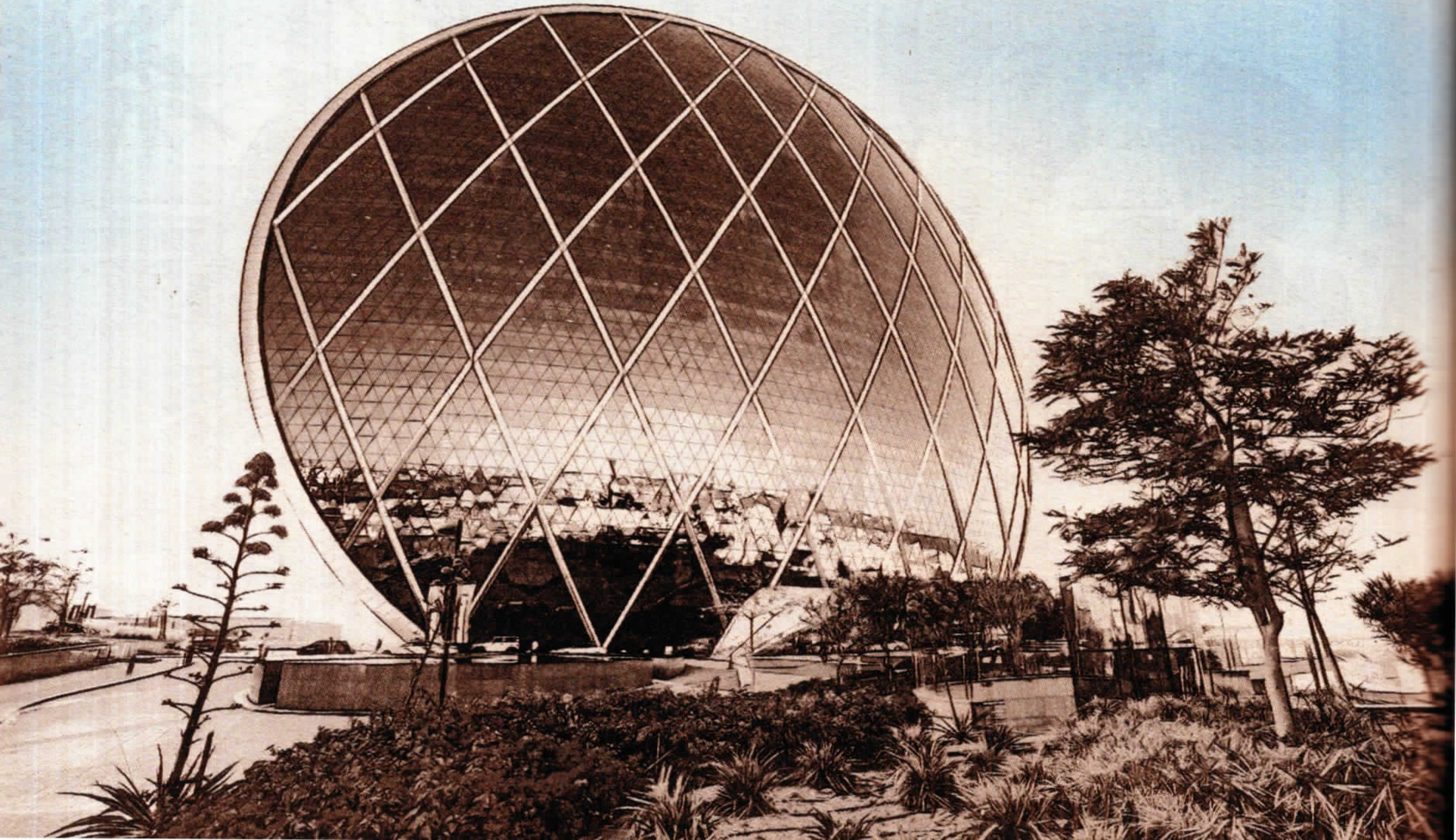
١٥ أوجد فى ح × ح مجموعة الحل للمعادلتين الآتيتين معًا :

٣ س + ص = ٧ ، س + ص = ٣

١٦ أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا المجال :

ن (س) = $\frac{س + ١}{س^٢ - س - ٢} \times \frac{س^٢ + ٣ س - ١٠}{٣ س^٢ + ١٦ س + ٥}$

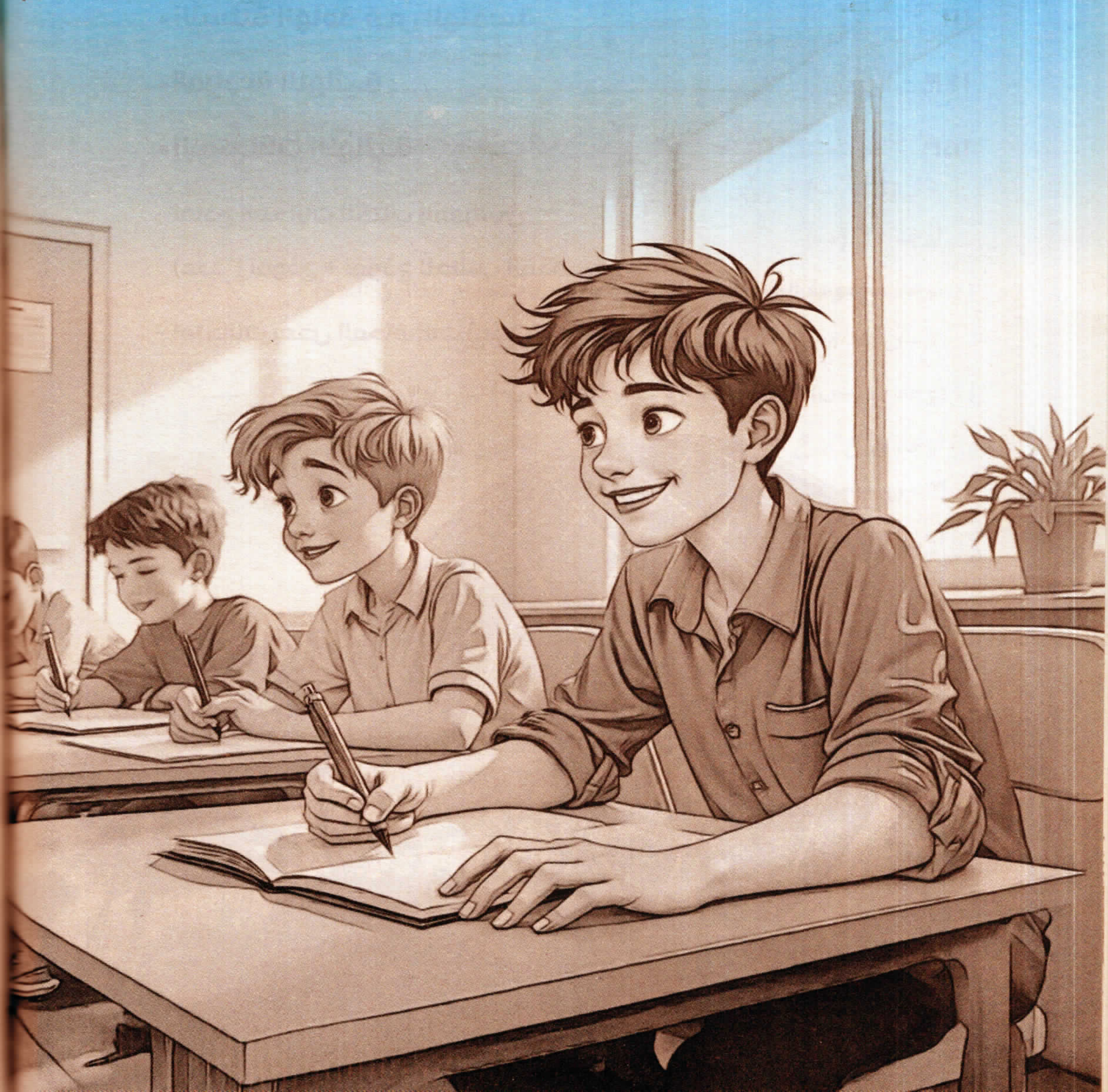
ثانيًا الهندسة



الاختبارات التراكمية

فى الهندسة

من امتحانات المحافظات





اختبارات تراكمية في الهندسة

اختبار تراكمي 1 على الدرس الأول الوحدة الرابعة

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

1 عدد محاور تماثل نصف الدائرة .... (الشرقية ٢٢)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى.

2 طول نصف قطر الدائرة التى مركزها (٧ ، ٤) وتمر بالنقطة (٣ ، ١) يساوى .... (أسوان ١٦)

(أ) ٣ وحدة طول. (ب) ٤ وحدة طول. (جـ) ٥ وحدة طول. (د) ٦ وحدة طول.

3 إذا كانت مساحة دائرة ٩ π سم^2 فإن طول نصف قطرها يساوى .... سم. (القليوبية ١٧)

(أ) ٩ (ب) ٢ (جـ) −٣ (د) ٣

4 فى Δ أ ب جـ إذا كان : أ ب > أ جـ

فإن : ق (∠ ب) .... ق (∠ جـ) (كفر الشيخ ٢٥)

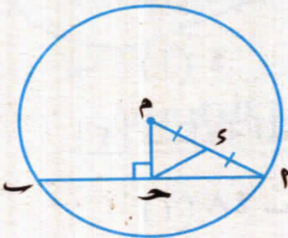
(أ) $\leq$ (ب) > (جـ) = (د) <

5 فى الشكل المقابل : (الغربية ١٩ - الشرقية ١٧)

$\overline{أب}$ وتر فى الدائرة م ، $\overline{مجـ} \perp \overline{أب}$

، ء منتصف $\overline{مأ}$ ، جـ ء = ٣ سم

فإن مساحة سطح الدائرة م تساوى .... π سم^2



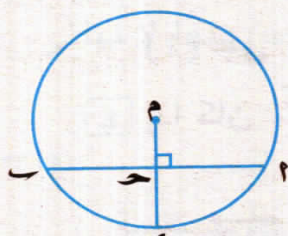
(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ٣٦

6 فى الشكل المقابل : (الوادى الجديد ١٨)

دائرة م طول نصف قطرها ١٣ سم ، $\overline{أب}$ وتر فيها

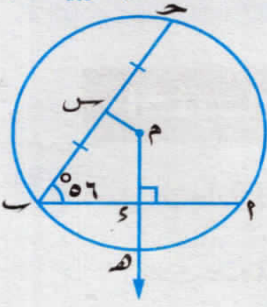
، أ ب = ٢٤ سم ، $\overline{مء} \perp \overline{أب}$ يقطعه فى جـ

فإن : جـ ء = ... سم.



(أ) ٦,٥ (ب) ١٢ (جـ) ٨ (د) ١٠

٢ في الشكل المقابل : (الغربية ١٧)



$\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ وتران في الدائرة م التي طول نصف قطرها ٥ سم

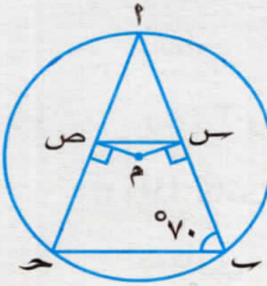
، $\overleftarrow{\text{م ء}} \perp \overline{\text{أب}}$ ويقطع $\overline{\text{أب}}$ في ء ويقطع الدائرة م في هـ

، س منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ ، أب = ٨ سم ، ق (∠ أ ب حـ) = ٥٦°

أوجد : [١] ق (∠ ء م س) [٢] طول $\overline{\text{ء هـ}}$

---

٣ في الشكل المقابل : (أسيوط ١٧)



دائرة م ، $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{م ص}} \perp \overline{\text{أحـ}}$

، ق (∠ ب) = ٧٠°

[١] أثبت أن : $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

[٢] أوجد بالبرهان : ق (∠ ص س م)

اختبـــار تراكمـي ٢ حتى الدرس الثاني الوحدة الرابعة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] إذا كانت النقطة أ ∈ الدائرة م التي طول قطرها ٦ سم

فإن : م أ = ... سم (المنيا ١٦)

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٣ (د) ٨

[٢] مساحة المعين الذي طولا قطريه ٦ سم ، ٨ سم تساوي .... (مطروح ٢٢)

(أ) ٤٨ سم (ب) ٤٨ سم^2 (جـ) ٢٤ سم (د) ٢٤ سم^2

[٣] دائرة مركزها م وطول نصف قطرها نق ، أ نقطة في المستوى فإذا كان : م أ = $\frac{٣}{٢}$ نق

فإن : أ تقع .... الدائرة. (الأقصر ٢٣)

(أ) على (ب) داخل (جـ) خارج (د) على مركز

[٤] إذا كان : $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ∩ الدائرة م = {أ ، ب} فإن : $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ∩ سطح الدائرة م = ...

(المنوفية ١٧)

(أ) $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ (ب) $\overline{\text{أب}}$ (جـ) {أ ، ب} (د) $\overleftarrow{\text{أب}}$

٥ إذا كان : ل مستقيمًا خارج دائرة مركزها نقطة الأصل م (٠ ، ٠) وطول نصف قطرها ٣ سم وكان ل يبعد عن م مسافة س فإن : س ∈ .... (الغربية ١٦)

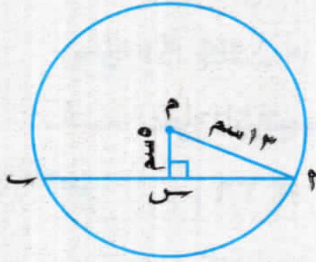
(أ) [٣ ، ٦] (ب)]٣ ، ∞[(جـ) [٦ ، ∞[(د)]-∞ ، -٦]

٦ إذا كان المستقيم ل مماس للدائرة م عند أ بحيث كان م أ = (٢ س + ٣) سم ، طول قطر الدائرة = ١٤ سم فإن : س = ... سم (الجيزة ٢٥)

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) ١ (د) ٢

---

٢ في الشكل المقابل : (الدقهلية ١٦)



$\overline{أب}$ وتر في الدائرة م

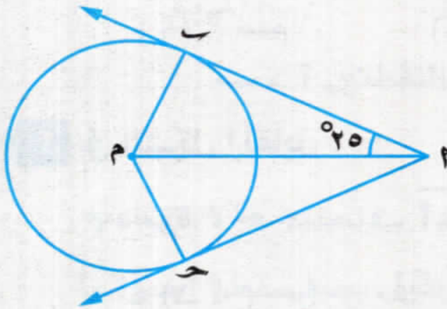
، رسم $\overleftrightarrow{م س} \perp \overline{أب}$ يقطعها في س

فإذا كان : م س = ٥ سم ، م أ = ١٣ سم

أوجد : طول $\overline{أب}$

---

٣ في الشكل المقابل : (بورسعيد ١٧)



$\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أحـ}$ مماسان للدائرة م يمسانها عند ب ، حـ على الترتيب ، ق (∠ب أ م) = ٢٥°

١ أثبت أن : $\overleftrightarrow{م أ}$ ينصف ∠ب م حـ

٢ أوجد : ق (∠ب م حـ)

اختبـــار تراكمـي ٣ حتى الدرس الثالث الوحدة الرابعة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ عدد محاور تماثل دائرتين متطابقتين متماستين من الخارج يساوى .... (الدقهلية ١٦)

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) عددًا لا نهائى.

٢ في Δ أ ب حـ إذا كان : $(أحـ)^2 + (ب حـ)^2 = (أب)^2 + ٥$

فإن : ∠حـ تكون .... (قنا ٢٣)

(أ) منفرجة. (ب) قائمة. (جـ) حادة. (د) مستقيمة.

٣ إذا كان سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = {أ}

فإن الدائرتين م ، ن .... (قنا ٢٥)

(أ) متباعدتان. (ب) متقاطعتان.

(جـ) متماستان من الخارج. (د) متماستان من الداخل.

٤ دائرة طول قطرها ٨ سم فإذا كان المستقيم ل يبعد عن مركزها ٣ سم

فإن المستقيم ل .... (دمياط ١٦)

(أ) يمس الدائرة. (ب) يكون قاطعًا للدائرة.

(جـ) يقع خارج الدائرة. (د) يكون محورًا للدائرة.

٥ إذا كانت م ، ن دائرتين متماستين من الخارج طولا نصفى قطريهما ٢ سم ، ٤ سم

على الترتيب فإن مساحة الدائرة التى قطرها $\overline{مـن}$ تساوى .... سم^2 (الشرقية ١٩)

(أ) ٣٦ π (ب) ٩ π (جـ) ١٦ π (د) ٤ π

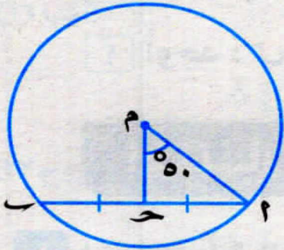
٦ إذا كانت الدائرتان م ، ن متماستين من الخارج وطول نصف قطر إحداهما ٥ سم

، م ن = ٩ سم فإن طول نصف قطر الأخرى يساوى .... (مطروح ٢٢)

(أ) ٣ سم (ب) ٤ سم (جـ) ٧ سم (د) ١٤ سم

---

٢ فى الشكل المقابل : (السويس ١٦)



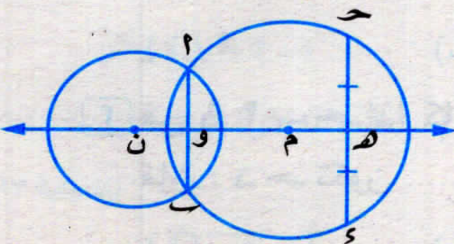
م دائرة ، حـ منتصف $\overline{أب}$

، ق (∠ أ م حـ) = ٥٠°

أوجد بالبرهان : ق (∠ م أ حـ)

---

٣ فى الشكل المقابل : (بورسعيد ١٧ - الجيزة ١٦)



م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب

، $\overline{حـ ء}$ وتر فى الدائرة م يقطع $\overleftrightarrow{مـن}$ فى هـ

فإذا كانت هـ منتصف $\overline{حـ ء}$

أثبت أن : $\overline{أب}$ // $\overline{حـ ء}$

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ وتر طوله ٨ سم فى دائرة طول نصف قطرها ٥ سم فإنه يبعد عن مركزها .... سم. (القاهرة ٢٣)

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ١٠

٢ عدد الدوائر التى يمكن رسمها وتمر بطرفى القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ يساوى .... (القليوبية ٢٢)

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائى.

٣ إذا كانت : أ ، ب نقطتين فى المستوى بحيث كان : أب = ٤ سم فإن طول نصف قطر أصغر دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب يساوى .... سم. (المنوفية ١٦)

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

٤ لا يمكن رسم دائرة تمر برؤوس .... (جنوب سيناء ٢٥)

(أ) المعين. (ب) المثلث. (جـ) المستطيل. (د) المربع.

٥ إذا كان : أب = ٦ سم فإن محيط أصغر دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب يساوى .... (الدقهلية ٢٥)

(أ) ٣ π سم. (ب) ٦ π سم. (جـ) ٩ π سم. (د) ١٢ π سم.

٦ إذا كان سطح الدائرة م $\cap$ سطح الدائرة ن = {أ} وطول نصف قطر إحداهما ٣ سم ، م ن = ٨ سم فإن طول نصف قطر الدائرة الأخرى = ... سم. (الإسكندرية ١٩)

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ١١ (د) ١٦

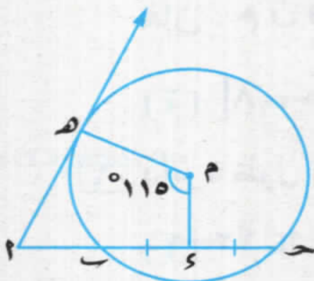
---

٢ فى الشكل المقابل : (الإسكندرية ٢٥)

دائرة مركزها م ، ق (∠ د م هـ) = ١١٥°

، د منتصف $\overline{حـ ب}$ ، $\overleftrightarrow{أهـ}$ مماس للدائرة عند هـ

أوجد بالبرهان : ق (∠ هـ أ د)



٣ باستخدام الأدوات الهندسية ارسم المثلث أ ب ح الذى فيه : (شمال سيناء ١٩)

أ ب = ٣ سم ، ب ح = ٤ سم ، أ ح = ٥ سم

ثم ارسم دائرة تمر برؤوسه – كم دائرة تمر برؤوسه ؟

اختبـار تراكمى ٥ حتى الدرس الخامس الوحدة الرابعة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ قياس زاوية رأس الشكل السداسى المنتظم يساوى .... (المنيا ١٨)

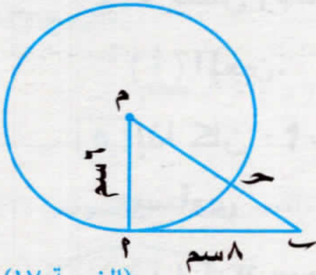
(أ) ٦٠° (ب) ١٠٨° (جـ) ١٢٠° (د) ١٣٥°

٢ إذا كان المثلث أ ب ح قائم الزاوية فى ب وكان أ ب = ٨ سم ، ب ح = ٦ سم

فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب ح = ... سم. (قنا ٢٥)

(أ) ١٠ (ب) ٨ (جـ) ٦ (د) ٥

٣ فى الشكل المقابل : (مطروح ١٦)

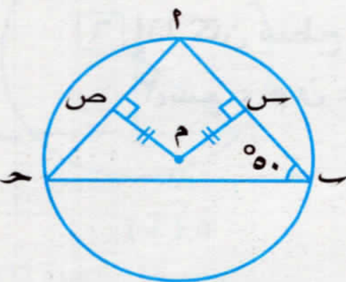


أ ب مماسة للدائرة م فإن : طول ب ح = ...

(أ) ٦ سم (ب) ٤ سم

(جـ) ١٠ سم (د) ٨ سم

٤ فى الشكل المقابل : (الغربية ١٧)



إذا كان : م س = م ص ، ق (∠ ب) = ٥٠°

فإن : ق (∠ أ) = ...

(أ) ٥٠° (ب) ٦٠°

(جـ) ٧٠° (د) ٨٠°

٥ م ، ن دائرتان متقاطعتان ، طولا نصفى قطريهما ٣ سم ، ٥ سم

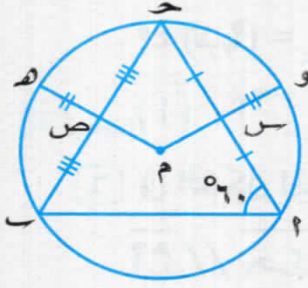
فإن : م ن ∈ .... (المنوفية ٢٢)

(أ)]٨ ، ∞[(ب)]٢ ، ∞[(جـ)]٠ ، ٢[(د)]٢ ، ٨[

٦ دائرة طول أكبر وتر فيها = ١٢ سم فإن محيط الدائرة = ... سم. (الدقهلية ١٩)

(أ) ١٢ π (ب) ٦ π (جـ) ٢٤ π (د) ١٠ π

٢ فى الشكل المقابل : (الشرقية ١٨)



دائرة م ، ق (∠ أ) = ٦٠°

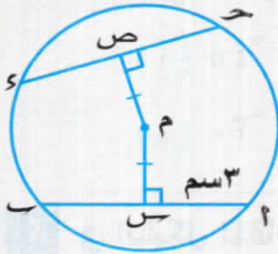
، س منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$ ، ص منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$

، و س = هـ ص

أثبت أن : Δ أ ب حـ متساوى الأضلاع.

---

٣ فى الشكل المقابل : (بنى سويف ١٧)



$\overline{\text{م س}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{م ص}}$ ⊥ $\overline{\text{حـ ء}}$

، م س = م ص ، أ س = ٣ سم

أوجد : طول $\overline{\text{حـ ء}}$

اختبـار تراكمـى ٦ حتى الدرس الأول الوحدة الخامسة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ قياس القوس الذى يمثل $\frac{1}{3}$ قياس الدائرة = ... (الجيزة ٢٥)

(أ) ٦٠°　(ب) ٩٠°　(جـ) ١٢٠°　(د) ٢٤٠°

٢ دائرة طول نصف قطرها ١٢ سم ، فإن طول القوس الذى يقابل زاوية مركزية قياسها ١٢٠° يساوى .... π سم (الشرقية ٢٥)

(أ) ٨　(ب) ١٠　(جـ) ١٦　(د) ٢٠

٣ م ، ن دائرتان طولا نصفى قطريهما ٥ سم ، ٣ سم ، إذا كان : م ن = ٦ سم فإن الدائرتين تكونان .... (دمياط ٢٢)

(أ) متباعدتين.　(ب) متماستين من الخارج.

(جـ) متقاطعتين.　(د) متداخلتين.

٤ أصغر دائرة يمكن رسمها تمر بالنقطتين أ ، ب حيث أ ب = ٨ سم يكون طول نصف قطرها = ... (الإسماعيلية ١٩)

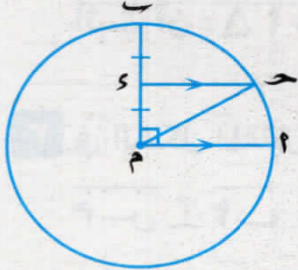
(أ) ١ سم　(ب) ٢ سم　(جـ) ٣ سم　(د) ٤ سم

٥ ∠ ٩ ، ∠ ب زاويتان متتامتان ، ∠ ب ، ∠ حـ زاويتان متكاملتان فإذا كان :

ق (∠ ٩) = ٣٠° فإن : ق (∠ حـ) = ... (الإسكندرية ١٩)

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

٦ فى الشكل المقابل : (سوهاج ١٧)



$\overline{م٩}$ // $\overline{ءحـ}$ ، م ء = ء ب

، ق (∠ ٩ م ب) = ٩٠°

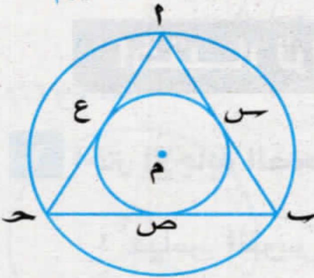
فإن : ق ($\overset{\frown}{٩ حـ}$) = ...

(أ) ٤٥° (ب) ٦٠°

(جـ) ٣٠° (د) ٩٠°

---

٢ فى الشكل المقابل : (الفيوم ١٩)



دائرتان متحدتا المركز م ، طولا نصفى قطريهما ٤ سم ، ٢ سم

، رسم المثلث ٩ ب حـ بحيث تقع رؤوسه على الدائرة الكبرى

وتمس أضلاعه الدائرة الصغرى فى س ، ص ، ع

أثبت أن : المثلث ٩ ب حـ متساوى الأضلاع ، وأوجد مساحته.

---

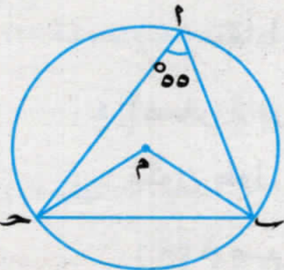
٣ دائرة طول نصف قطرها ٢١ سم أوجد طول القوس المرسوم فيها (الإسكندرية ٢٥)

والذى قياسه يساوى $\frac{٣}{٤}$ قياس الدائرة. ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

اختبــار تراكمــى ٧ حتى الدرس الثانى الوحدة الخامسة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ فى الشكل المقابل : (الدقهلية ١٦)



م دائرة ، ق (∠ ٩) = ٥٥°

فإن : ق (∠ م حـ ب) = ...

(أ) ١١٠° (ب) ٥٥°

(جـ) ٣٥° (د) ٢٥°

٢ مجموع قياسات الزوايا المتجاورة المتجمعة حول نقطة يساوى .... (الأقصر ١٧)

(أ) ٨٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ٣٦٠° (د) ٦٣٠°

٣ قياس الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة يساوى .... (البحيرة ٢٢)

(أ) ٤٥° (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٨٠°

٤ دائرتان م ، ن متماستان من الداخل وطولا نصفى قطريهما ٣ سم ، ٥ سم

فإن : م ن = ... سم (بنى سويف ١٧)

(أ) ٨ (ب) ٦ (جـ) ٤ (د) ٢

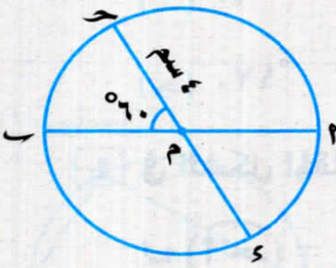
٥ إذا تقاطع وتران فى نقطة داخل الدائرة فإن قياس زاوية تقاطعهما

يساوى .... قياسى القوسين المقابلين لها. (قنا ١٦)

(أ) نصف الفرق بين (ب) نصف مجموع

(جـ) ضعف مجموع (د) ضعف الفرق بين

٦ فى الشكل المقابل : (المنوفية ١٩)



م دائرة ، م حـ = ٤ سم ، ق (∠ حـ م ب) = ٦٠°

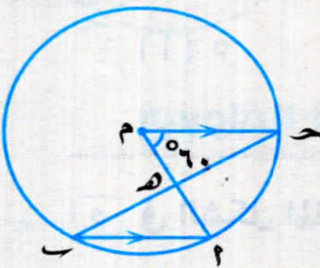
فإن : طول $\overset{\frown}{\text{ب ء}}$ = ... سم

(أ) ٤ π (ب) ٨ π

(جـ) $\frac{٨}{٣}$ π (د) ١٦ π

---

٢ فى الشكل المقابل : (مطروح ١٦)



$\overline{\text{أ ب}}$ وتر فى الدائرة م ، $\overline{\text{حـ م}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$

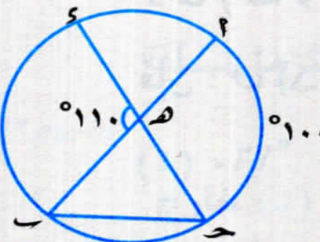
، $\overline{\text{ب حـ}}$ ∩ $\overline{\text{أ م}}$ = {هـ} ، ق (∠ حـ م أ) = ٦٠°

١ أوجد : ق $(\overset{\frown}{\text{أ حـ}})$

٢ أثبت أن : ب هـ > أ هـ

---

٣ فى الشكل المقابل : (الفيوم ٢٥)



ق (∠ ء هـ ب) = ١١٠°

، ق $(\overset{\frown}{\text{أ حـ}})$ = ١٠٠°

أوجد : ق (∠ ء حـ ب)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

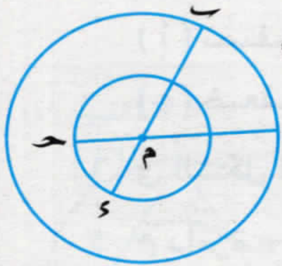
١ الزاوية المحيطية التى تقابل قوس أكبر فى الدائرة تكون .... (الجيزة ٢٥)

(أ) حادة. (ب) قائمة. (جـ) منفرجة. (د) منعكسة.

٢ عدد الدوائر التى مركزها (٧ ، ٤) وتمر بالنقطة (٣ ، ١) هو .... (سوهاج ٢٣)

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) ٥ (د) عدد لا نهائى.

٣ فى الشكل المقابل : (المنوفية ١٧)



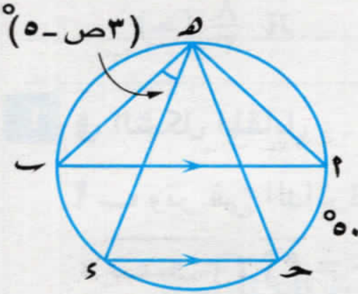
دائرتان متحدتا المركز م ، وطولا نصفى قطريهما ٦ سم ، ٣ سم

فإذا كان : ق (⌒أب) = ٦٠° فإن : ق (⌒ءجـ) = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٣٠°

(جـ) ١٢٠° (د) ٤٠°

٤ فى الشكل المقابل : (الغربية ١٧)



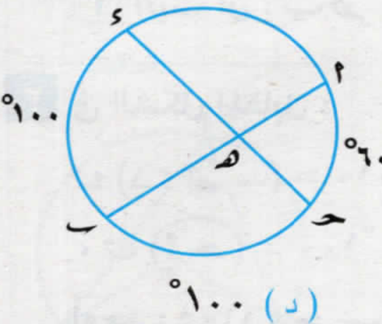
ق (⌒أجـ) = ٥٠° ، $\overline{أب}$ // $\overline{جـء}$

فإن : قيمة ص = ...

(أ) ٥ (ب) ١٠

(جـ) ١٥ (د) ٢٥

٥ فى الشكل المقابل : (السويس ١٦)



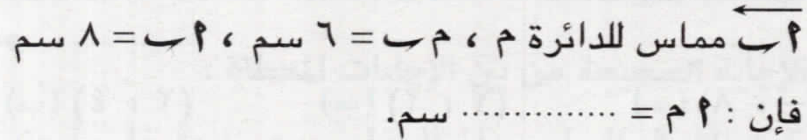
$\overline{أب}$ ∩ $\overline{جـء}$ = {هـ} ، ق (⌒أجـ) = ٦٠°

، ق (⌒بء) = ١٠٠°

فإن : ق (∠ءهـب) = ...

(أ) ١٦٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٨٠° (د) ١٠٠°

٦ في الشكل المقابل : (السويس ١٧)



$\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م ، م ب = ٦ سم ، أ ب = ٨ سم

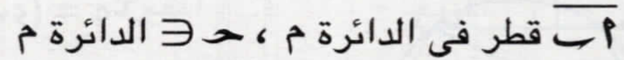
فإن : أ م = ... سم.

(أ) ٥ (ب) ١٠

(جـ) ١٢ (د) ١٣

---

٢ في الشكل المقابل : (كفر الشيخ ١٧)



$\overline{أب}$ قطر في الدائرة م ، حـ ∈ الدائرة م

، ق (∠ حـ أ ب) = °٣٠

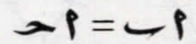
، ء منتصف $\overset{\frown}{أحـ}$ ، $\overline{ءب}$ ∩ $\overline{أحـ}$ = {هـ}

١ أوجد بالبرهان : ق (∠ ب ء حـ) ، ق (∠ أ ب ء)

٢ أثبت أن : △ أ ب هـ متساوى الساقين.

---

٣ في الشكل المقابل : (السويس ١٨)



أ ب = أ حـ

، هـ ∈ $\overset{\frown}{حـ ب}$

أثبت أن : ق (∠ أ هـ ب) = ق (∠ أ هـ حـ)

اختبار تراكمي ٩ حتى الدرس الرابع الوحدة الخامسة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ الزاوية المحيطية المرسومة في ربع دائرة تكون .... (الفيوم ٢٥)

(أ) حادة. (ب) قائمة. (جـ) منفرجة. (د) مستقيمة.

٢ دائرة طول قطرها (٢ س + ٥) سم ، المستقيم ل يبعد عن مركزها مسافة (س + ٢) سم فإن : ل يكون .... للدائرة. (الفيوم ٢٢)

(أ) مماسًا (ب) قاطعًا (جـ) قطرًا (د) خارج

٣ إذا كان $\overline{أب}$ قطرًا فى الدائرة حيث : أ (٣ ، −٥) ، ب (٥ ، ١)

فإن مركز الدائرة هو .... (البحيرة ١٧)

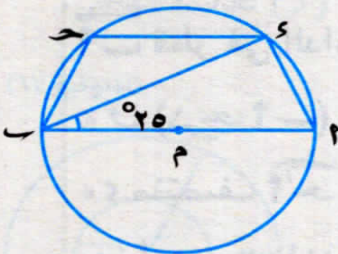
(أ) (٤ ، −٢) (ب) (٤ ، ٢) (جـ) (٢ ، ٢) (د) (٨ ، −٢)

٤ أ ب جـ ء شكل رباعى دائرى فيه : ق (∠ أ) = ٢ ق (∠ جـ)

فإن : ق (∠ أ) = ... (الدقهلية ١٩ - الإسماعيلية ١٨)

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

٥ فى الشكل المقابل : (الأقصر ١٧ - كفر الشيخ ١٦)



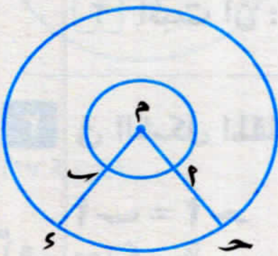
$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م ، ق (∠ أ ب ء) = ٢٥°

فإن : ق (∠ جـ) = ...

(أ) ٥٠° (ب) ١٠٠°

(جـ) ١١٥° (د) ١٢٥°

٦ فى الشكل المقابل : (الإسماعيلية ١٧)



دائرتان متحدتا المركز طولا نصفى قطريهما ٢ سم ، ٥ سم

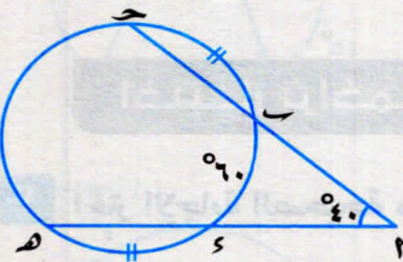
فإن : $\frac{ق (\overset{\frown}{أب})}{ق (\overset{\frown}{جـ ء})}$ = ...

(أ) $\frac{٢}{٥}$ (ب) ١

(جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٥}$

---

٢ فى الشكل المقابل : (شمال سيناء ١٧)



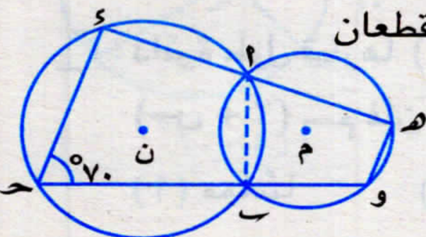
ق (∠ أ) = ٤٠° ، ق ($\overset{\frown}{ب ء}$) = ٦٠°

، ق ($\overset{\frown}{ب جـ}$) = ق ($\overset{\frown}{ء هـ}$)

أوجد بالبرهان : ق ($\overset{\frown}{هـ جـ}$) ، ق ($\overset{\frown}{ب جـ}$)

---

٣ فى الشكل المقابل : (قنا ١٩)



م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب ، رسم $\overleftrightarrow{أء}$ ، $\overleftrightarrow{ب جـ}$ يقطعان الدائرة ن فى ء ، جـ والدائرة م فى هـ ، و على الترتيب

فإذا كان : ق (∠ ب جـ ء) = ٧٠°

١ أوجد : ق (∠ هـ و ب) ٢ برهن أن : $\overline{جـ ء}$ // $\overline{هـ و}$

اختبـــار تراكمـى ١٠ حتى الدرس الخامس الوحدة الخامسة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ يكون الشكل الرباعى دائريًا إذا وجدت زاوية خارجة عند أى رأس من رؤوسه قياسها يساوى .... الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها. (قنا ١٧)

(أ) قياس (ب) نصف قياس (جـ) ضعف قياس (د) ثلث قياس

٢ القطران متساويان فى الطول وغير متعامدين فى .... (الجيزة ٢٢)

(أ) المربع. (ب) المعين. (جـ) المستطيل. (د) متوازى الأضلاع.

٣ مركز الدائرة الخارجة للمثلث هو نقطة تقاطع .... (قنا ١٧)

(أ) ارتفاعاته. (ب) متوسطاته.

(جـ) الأعمدة المقامة من منتصفات أضلاعه. (د) منصفات زواياه الداخلة.

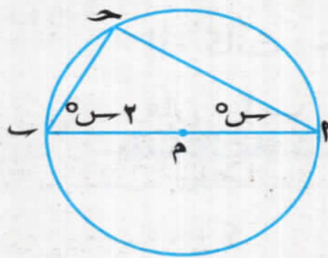
٤ إذا كان ـس ص ع ل شكلًا رباعيًا مرسومًا داخل دائرة حيث ى (د ـس) = ى (د ع) فإن : .... قطر فى الدائرة. (كفر الشيخ ١٨)

(أ) $\overline{\text{ـس ع}}$ (ب) $\overline{\text{ـس ص}}$ (جـ) $\overline{\text{ص ع}}$ (د) $\overline{\text{ص ل}}$

٥ معين طول ضلعه ل سم فإن محيطه .... سم (البحر الأحمر ٢٣)

(أ) ل^{٢} (ب) ٢ ل^{٢} (جـ) ٤ ل (د) ٢ $\sqrt{٢}$ ل

٦ فى الشكل المقابل : (الأقصر ١٨)



إذا كان : $\overline{\text{أ ـب}}$ قطرًا فى الدائرة م

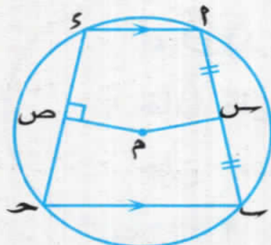
فإن : ـس = ...

(أ) ٤٠° (ب) ٢٠°

(جـ) ٣٠° (د) ٦٠°

---

٢ فى الشكل المقابل : (قنا ٢٥)



أ ـب حـ ء شكل رباعى مرسوم داخل الدائرة م

، $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ـب حـ}}$ ، ـس منتصف $\overline{\text{أ ـب}}$

، $\overline{\text{م ص}}$ ⊥ $\overline{\text{حـ ء}}$

أثبت أن : م ـس = م ص

٣ في الشكل المقابل : (سوهاج ٢٥)

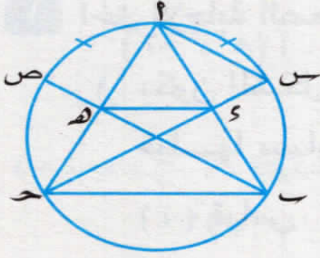
$\triangle$ أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة ، س ∈ $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ ، ص ∈ $\overset{\frown}{\text{أ حـ}}$

بحيث ق ($\overset{\frown}{\text{أ س}}$) = ق ($\overset{\frown}{\text{أ ص}}$)

، $\overline{\text{حـ س}}$ ∩ $\overline{\text{أ ب}}$ = {ء} ، $\overline{\text{ب ص}}$ ∩ $\overline{\text{أ حـ}}$ = {هـ}

أثبت أن : ١ الشكل ب حـ هـ ء رباعي دائري.

٢ ق (∠ ء هـ ب) = ق (∠ س أ ب)



اختبــار تراكمي ١١ حتى الدرس السادس الوحدة الخامسة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ مثلث أ ب حـ فيه : $(\text{أ ب})^2 - ٣ = (\text{أ حـ})^2 + (\text{حـ ب})^2$

فإن : ∠ حـ تكون .... (الفيوم ٢٢)

(أ) حادة. (ب) منفرجة. (جـ) قائمة. (د) مستقيمة.

٢ في الشكل المقابل : (أسيوط ١٦)

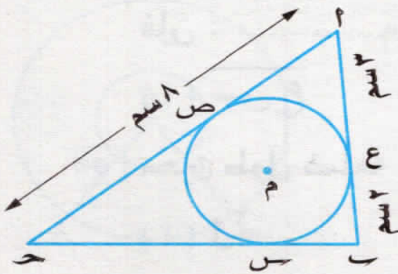
إذا كان : أ حـ = ٨ سم ، أ ع = ٣ سم

، ب ع = ٢ سم

فإن : ب حـ = ... سم

(أ) ٥ سم (ب) ٧ سم

(جـ) ١٠ سم (د) ١٣ سم



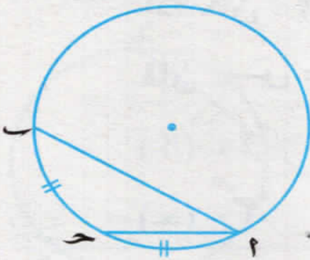
٣ في الشكل المقابل : (الجيزة ١٧)

إذا كانت : حـ منتصف $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$

فإن : أ ب .... ٢ أ حـ

(أ) > (ب) <

(جـ) ≤ (د) =



٤ في الشكل المقابل : (المنوفية ١٦)

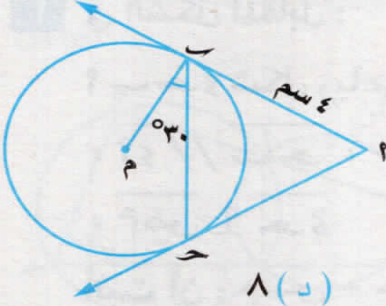
$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ مماسان للدائرة م

، ق (∠ م ب حـ) = ٣٠°

فإذا كان : أ ب = ٤ سم

فإن : ب حـ = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٨



٥ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستين من الداخل هو .... (بورسعيد ٢٣)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

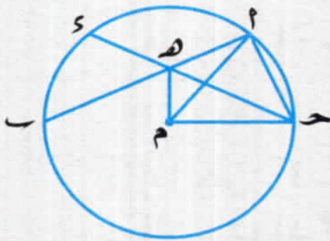
٦ مركز الدائرة الداخلة للمثلث هو نقطة تقاطع .... (الجيزة ١٧)

(أ) ارتفاعاته. (ب) متوسطاته.

(جـ) محاور أضلاعه. (د) منصفات زواياه الداخلة.

---

٢ فى الشكل المقابل : (الشرقية ٢٥)



دائرة مركزها م

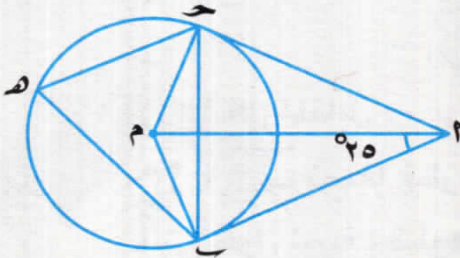
، ق (⌒أ حـ) = ق (⌒ب ء)

، $\overline{أ ب} \cap \overline{حـ ء} = \{هـ\}$

أثبت أن : الشكل أ حـ م هـ رباعى دائرى.

---

٣ فى الشكل المقابل : (القليوبية ١٨ - الوادى الجديد ١٨)



$\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ حـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م

، ق (∠ ب أ م) = ٢٥° ، هـ ∈ ⌒ب حـ الأكبر

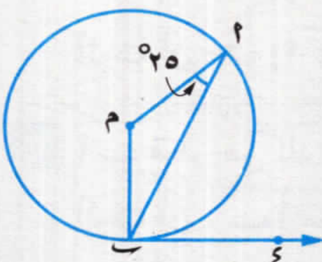
أوجد : ١ ق (∠ أ حـ ب)

٢ ق (∠ ب هـ حـ)

اختبـــار تراكمـى ١٢ حتى الدرس السابع الوحدة الخامسة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ **فى الشكل المقابل :** (سوهاج ١٨ - البحر الأحمر ١٧)



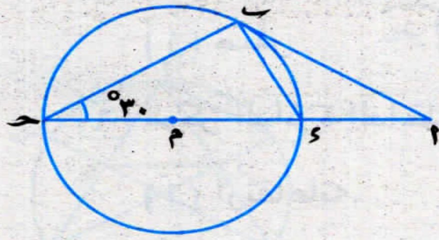
إذا كان : $\overleftrightarrow{ب ء}$ مماسًا للدائرة م، ق (∠ ب أ م) = ٢٥°

فإن : ق (∠ أ ب ء) = ...

(أ) ٢٥° (ب) ٥٠°

(جـ) ٦٥° (د) ١٣٠°

٢ في الشكل المقابل : (الغربية ١٧)



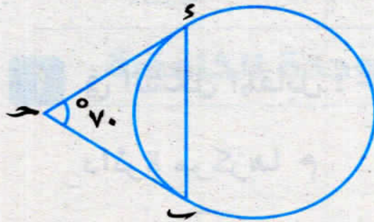
$\overline{أب}$ مماسة للدائرة م ، ق (∠ جـ) = ٣٠°

فإن : ق (∠ أ ب جـ) = ...

(أ) ١٢٠° (ب) ١١٠°

(جـ) ٩٠° (د) ٣٠°

٣ في الشكل المقابل : (الدقهلية ١٧)



$\overline{جـ ب}$ ، $\overline{جـ ء}$ مماستان للدائرة في ب ، ء

، ق (∠ جـ) = ٧٠°

فإن : ق ($\overset{\frown}{ء ب}$) الأصغر = ...

(أ) ١٨٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٠٠° (د) ١١٠°

٤ إذا كان : أ ب جـ ء رباعيًا دائريًا ، ق (∠ أ) : ق (∠ جـ) = ١ : ٢

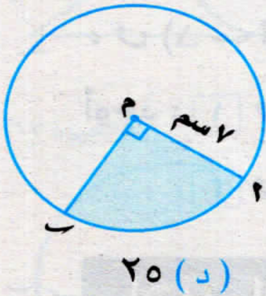
فإن : ق (∠ أ) = ... (المنوفية ٢٣)

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

٥ إذا كان المستقيم ل مماسًا للدائرة التي طول قطرها ٨ سم فإنه يبعد عن مركزها بمقدار .... سم. (الجيزة ٢٢)

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

٦ في الشكل المقابل : (الغربية ١٩)



$\overline{م أ}$ ، $\overline{م ب}$ نصفا قطرين متعامدين في الدائرة م

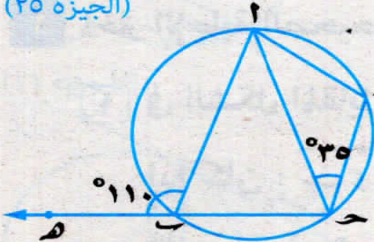
التي طول نصف قطرها ٧ سم.

فإن محيط الشكل المظلل يساوي .... سم ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

(أ) ١٤ (ب) ١١ (جـ) $٣٨ \frac{١}{٢}$ (د) ٢٥

---

٢ في الشكل المقابل : (الجيزة ٢٥)



هـ ∈ $\overleftarrow{جـ ب}$ ، ق (∠ أ ب هـ) = ١١٠°

، ق (∠ أ جـ ء) = ٣٥°

أثبت أن : ق ($\overset{\frown}{أ ء}$) = ق ($\overset{\frown}{جـ ء}$)

---

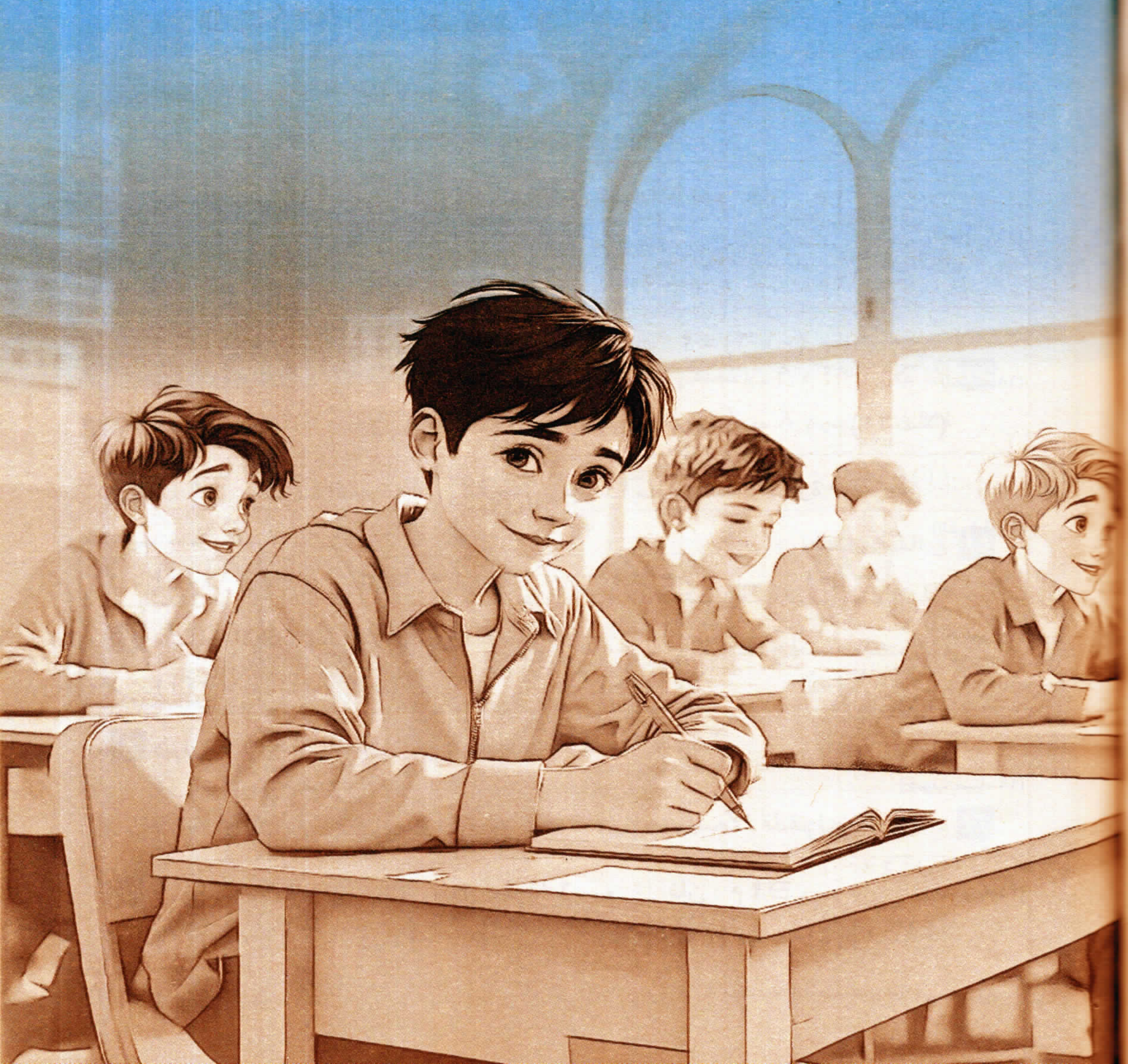
٣ $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م ، $\overline{أ جـ}$ وتر فيها ، رسم $\overleftrightarrow{ب ء}$ مماسًا للدائرة فقطع $\overleftrightarrow{أ جـ}$ في ء

أثبت أن : $\overline{ب أ}$ مماس للدائرة المارة برؤوس المثلث جـ ب ء (المنيا ١٦)

الأسئـــلة الهامـــة

فى الهندســـة

من امتحانات المحافظات





الأسئلة الهامة على الوحدة الرابعة
الدائرة

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

١ عدد محاور تماثل الدائرة هو .... (المنيا ٢٥ - الإسماعيلية ١٧)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى.

---

٢ مجموعة نقط الدائرة ن ∩ مجموعة النقط داخل الدائرة ن = ... (البحيرة ١٨)

(أ) الدائرة ن (ب) سطح الدائرة ن (جـ) ∅ (د) محيط الدائرة ن

---

٣ الوتر المار بمركز الدائرة يسمى .... للدائرة. (البحيرة ١٦)

(أ) مماسًا (ب) قاطعًا (جـ) قطرًا (د) نصف قطر

---

٤ إذا كانت النقطة أ تنتمى للدائرة م التى طول قطرها ٦ سم فإن : م أ = ...

(السويس ١٦)

(أ) ٣ سم. (ب) ٤ سم. (جـ) ٥ سم. (د) ٦ سم.

---

٥ $\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى دائرة مركزها نقطة الأصل فإذا كانت : أ = (٢ ، ٠)

فإن : ب = ... (دمياط ١٨)

(أ) (٢ ، ٢) (ب) (٠ ، −٢) (جـ) (−٢ ، ٠) (د) (−٢ ، ٢)

---

٦ إذا كان : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ∩ الدائرة م = {أ ، ب} فإن : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ∩ سطح الدائرة م = ...

(الشرقية ١٧)

(أ) {أ ، ب} (ب) $\overline{\text{أ ب}}$ (جـ) $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ (د) $\overrightarrow{\text{ب أ}}$

---

٧ مساحة الدائرة التى طول قطرها ٢ سم ≈ .... سم^{٢} (الأقصر ١٦)

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣,١٤ (د) ٣

---

٨ طول نصف قطر الدائرة التى مساحة سطحها ٢٥ π سم^{٢}

هو .... سم. (جنوب سيناء ١٨)

(أ) ٥ (ب) −٥ (جـ) ٢٥ (د) ٤

---

٩ أ نقطة داخل الدائرة م التى طول قطرها ٦ سم فإن : م أ ∈ .... (القليوبية ٢٥)

(أ) [٠ ، ٣] (ب)]٠ ، ٣[(جـ) [٠ ، ٣[(د) [٠ ، ٦[

١٠ دائرة محيطها ٦ π سم ، والمستقيم ل يبعد عن مركزها ٣ سم

فإن المستقيم ل يكون .... (الشرقية ٢٢ - البحر الأحمر ١٧)

(أ) مماسًا للدائرة. (ب) قاطعًا للدائرة.

(جـ) خارج الدائرة. (د) قطرًا فى الدائرة.

---

١١ الدائرة التى محيطها ٢٠ π سم تكون مساحتها .... π سم؟ (الإسماعيلية ١٦)

(أ) ١٠ (ب) ١٠٠ (جـ) ٢٠٠ (د) ٤٠٠ .

---

١٢ إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها نق سم فإن طول نصف الدائرة

يساوى .... سم (البحيرة ١٦)

(أ) ٢ π نق (ب) $\frac{١}{٤}$ π نق (جـ) $\frac{١}{٢}$ π نق (د) π نق

---

١٣ دائرة م طول قطرها ١٠ سم ، $\overline{أب}$ وتر فيها طوله ٨ سم فإن بعد الوتر $\overline{أب}$ عن مركز

الدائرة = ... سم (الفيوم ٢٥)

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٨

---

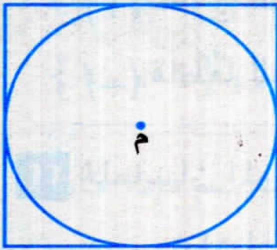
١٤ إذا كان : $\overline{مأ}$ ، $\overline{مب}$ نصفى قطرين متعامدين فى الدائرة م ، وكانت مساحة

المثلث أ م ب = ٨ سم^٢ فإن طول نصف قطر الدائرة يساوى .... (المنوفية ١٧)

(أ) ٨ سم. (ب) ١٦ سم. (جـ) ٤ سم. (د) ٢ سم.

---

١٥ فى الشكل المقابل :



إذا كان طول ضلع المربع = ١٠ سم

فإن مساحة سطح الدائرة = ... سم؟

(أ) ١٠٠ π (ب) ٢٥ π

(جـ) ٥٠ π (د) ٤٠ π (الإسكندرية ١٩)

---

١٦ دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٧ سم. أى من النقط الآتية لا تنتمى

للدائرة ؟ (الجيزة ١٦)

(أ) (٠ ، ٧) (ب) (٠ ، −٧) (جـ) (٧ ، ٠) (د) (٧ ، ٧)

17 إذا كانت م دائرة طول قطرها ٧ سم ، أ نقطة فى مستويها وكان م أ = ٤ سم فإن النقطة أ تقع .... (الجيزة ٢٣ - جنوب سيناء ١٦)

(أ) داخل الدائرة. (ب) خارج الدائرة.

(جـ) على الدائرة. (د) غير ذلك.

---

18 إذا كان المستقيم ل مماسًا للدائرة م التى طول قطرها ٨ سم فإنه يبعد عن مركزها بمقدار .... سم. (سوهاج ١٩ - القليوبية ١٨ - الفيوم ١٧)

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

---

19 إذا كان طول العمود المرسوم من مركز الدائرة م على المستقيم ل يساوى ٦ سم وكان طول قطر الدائرة يساوى ٦ سم فإن ل .... الدائرة. (قنا ١٦)

(أ) يقطع (ب) يمس (جـ) خارج (د) يمر بمركز

---

20 م دائرة طول نصف قطرها نق ، $\overleftrightarrow{\text{م أ}}$ ⊥ المستقيم ل حيث $\overleftrightarrow{\text{م أ}}$ ∩ ل = {أ}

فإذا كان : م أ > نق فإن : ل يكون .... (الإسماعيلية ١٧)

(أ) مماسًا للدائرة. (ب) قطرًا فى الدائرة.

(جـ) خارج الدائرة. (د) قاطعًا للدائرة.

---

21 دائرة طول نصف قطرها (٢ س + ٦) سم والمستقيم ل يبعد عن مركزها مسافة (س + ٢) سم حيث س > ٠ فإن المستقيم ل يكون .... (الشرقية ١٧)

(أ) خارج الدائرة. (ب) مماسًا للدائرة.

(جـ) قاطعًا للدائرة. (د) مارًا بمركز الدائرة.

---

22 المماسان المرسومان من نهايتى قطر فى الدائرة .... (الدقهلية ٢٥)

(أ) متوازيان. (ب) متقاطعان.

(جـ) متعامدان. (د) متساويان فى الطول.

---

23 إذا كانت الدائرة م ∩ الدائرة ن = {أ ، ب} فإن الدائرتين م ، ن .... (السويس ٢٢)

(أ) متباعدتان. (ب) متحدتا المركز.

(جـ) متماستان من الخارج. (د) متقاطعتان.

٢٤ محور التماثل للوتر المشترك $\overline{أب}$ لدائرتين متقاطعتين م ، ن هو .... (بنى سويف ١٩)

(أ) $\overleftrightarrow{أم}$ (ب) $\overleftrightarrow{مب}$ (جـ) $\overleftrightarrow{من}$ (د) $\overleftrightarrow{نأ}$

---

٢٥ خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديًا على .... وينصفه. (الجيزة ١٨)

(أ) القطر (ب) الوتر (جـ) الوتر المشترك (د) المماس

---

٢٦ إذا كانت م ، ن دائرتين طولا نصفى قطريهما ٣ سم ، ٤ سم ، م ن = ٥ سم

فإن الدائرتين تكونان .... (أسيوط ٢٥)

(أ) متباعدتين. (ب) متقاطعتين. (جـ) متماستين. (د) متداخلتين.

---

٢٧ إذا كانت الدائرتان م ، ن متماستين من الداخل وطولا نصفى قطريهما ٤ سم ، ٩ سم

فإن : م ن = ... سم. (الإسماعيلية ٢٥)

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٩ (د) ١٣

---

٢٨ إذا كانت الدائرتان م ، ن متماستين من الخارج وطول نصف قطر إحداهما ٤ سم

، م ن = ٦ سم فإن طول نصف قطر الدائرة الأخرى يساوى .... (شمال سيناء ١٧)

(أ) ٦ سم. (ب) ١٠ سم. (جـ) ٢ سم. (د) ٤ سم.

---

٢٩ دائرتان طولا نصفى قطريهما ٣ سم ، ٧ سم تكونان متماستين إذا كان البعد بين

مركزيهما ∋ .... (المنوفية ٢٥ - الإسماعيلية ٢٣)

(أ)]٤ ، ١٠[(ب)]١٠ ، ∞[(جـ)]٠ ، ٤[(د) {٤ ، ١٠}

---

٣٠ م ، ن دائرتان متماستان من الخارج ، طول نصف قطر الدائرة م = ٤ سم فإذا كان :

م ن = ٧ سم فإن محيط الدائرة ن يساوى .... سم. (المنوفية ١٦)

(أ) ٤ π (ب) ٦ π (جـ) ٧ π (د) π

---

٣١ دائرتان م ، ن متماستان من الداخل ، طولا نصفى قطرى الدائرتين ٥ سم ، نق سم

، نق > ٥ ، م ن = ٣ سم فإن : نق = ... سم. (المنيا ١٨)

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ٧ (د) ٩

٣٢ م ، ن دائرتان متباعدتان طولا نصفى قطريهما ٨ سم ، ٦ سم على الترتيب فإن : م ن .... ١٤ سم. (القاهرة ١٩)

(أ) $>$ (ب) $<$ (جـ) $=$ (د) $\geq$

---

٣٣ عدد الدوائر التى تمر بنقطة معلومة .... (أسوان ١٦)

(أ) دائرة واحدة. (ب) دائرتان.

(جـ) ثلاث دوائر. (د) عدد لا نهائى من الدوائر.

---

٣٤ عدد الدوائر التى تمر بثلاث نقط على استقامة واحدة هو .... (سوهاج ١٨ - الجيزة ١٦)

(أ) صفر. (ب) واحد. (جـ) ثلاثة. (د) عدد لا نهائى.

---

٣٥ لا يمكن رسم دائرة تمر برؤوس .... (بنى سويف ١٧)

(أ) المثلث. (ب) المربع. (جـ) المعين. (د) المستطيل.

---

٣٦ مركز الدائرة الخارجة للمثلث هو نقطة تقاطع .... (الفيوم ١٩ - كفر الشيخ ١٧)

(أ) منصفات زواياه الداخلة. (ب) منصفات زواياه الخارجة.

(جـ) ارتفاعاته. (د) محاور تماثل أضلاعه.

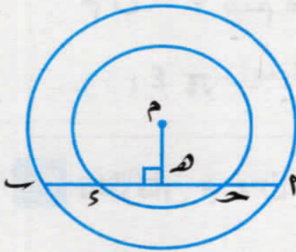
---

٣٧ إذا كانت : ٢ ، ب نقطتين فى المستوى ، ٢ب = ٧ سم فإن طول قطر أصغر دائرة تمر بالنقطتين ٢ ، ب يساوى .... سم. (قنا ١٩)

(أ) ٣ (ب) ٣,٥ (جـ) ٧ (د) ١٤

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ فى الشكل المقابل :



دائرتان متحدتا المركز م

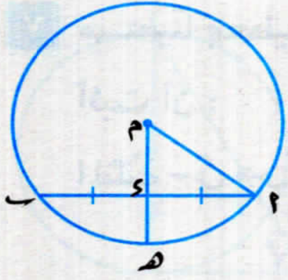
، $\overline{٢ب}$ وتر فى الدائرة الكبرى يقطع الدائرة الصغرى فى حـ ، ء

، $\overline{مهـ} \perp \overline{٢ب}$

أثبت أن : ٢حـ = ب ء

(القليوبية ٢٢ - الغربية ١٨ - سوهاج ١٨ - قنا ١٧)

٢ في الشكل المقابل :



م دائرة طول نصف قطرها ٥ سم

، $\overline{أب}$ = ٨ سم ، ء منتصف $\overline{أب}$

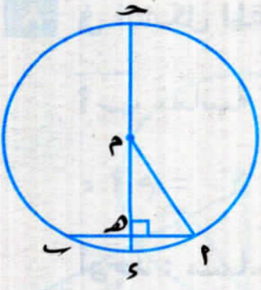
احسب :

طول كل من $\overline{مء}$ ، $\overline{ءهـ}$

(الفيوم ١٨)

---

٣ في الشكل المقابل :



إذا كان $\overline{أب}$ وتر في الدائرة م ، أب = ١٠ سم

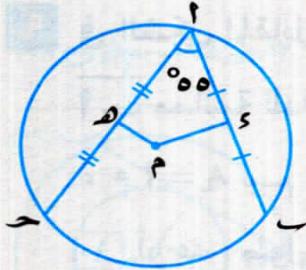
، ق (∠ أ م ء) = ٣٠° ، $\overrightarrow{مهـ}$ ⊥ $\overline{أب}$

أوجد : طول $\overline{حـ ء}$

(دمياط ٢٥)

---

٤ في الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ وتران في الدائرة م

، ء منتصف $\overline{أب}$ ، هـ منتصف $\overline{أحـ}$

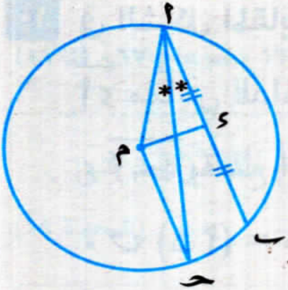
، ق (∠ ب أ حـ) = ٥٥°

أوجد بالبرهان : ق (∠ ء م هـ)

(جنوب سيناء ١٧ - دمياط ١٦)

---

٥ في الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ وتر في الدائرة م ، $\overrightarrow{أحـ}$ ينصف ∠ ب أ م

ويقطع الدائرة م في حـ

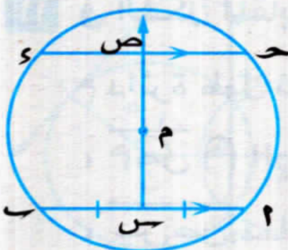
إذا كانت : ء منتصف $\overline{أب}$

أثبت أن : $\overline{ءم}$ ⊥ $\overline{حـ م}$

(البحيرة ١٩ - الغربية ١٧)

---

٦ في الشكل المقابل :



م دائرة ، $\overline{أب}$ // $\overline{حـ ء}$ ، س منتصف $\overline{أب}$

، رسم $\overrightarrow{سم}$ فقطع $\overline{حـ ء}$ في ص

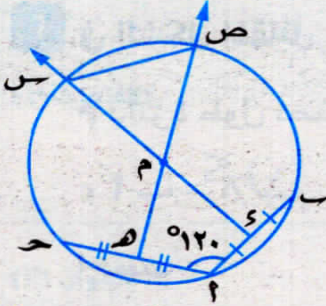
أثبت أن : ص منتصف $\overline{حـ ء}$

(أسيوط ١٨)

٧ مستعينًا بمعطيات الشكل :

أثبت أن :

المثلث سـ ص م متساوى الأضلاع.



(بورسعيد ١٩)

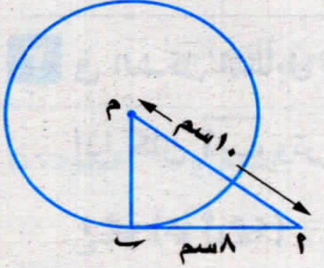
---

٨ فى الشكل المقابل :

$\overline{\text{أ ب}}$ مماسة للدائرة م عند ب ، أ ب = ٨ سم

، أ م = ١٠ سم.

أوجد : مساحة المثلث أ ب م



(مطروح ٢٣ - البحر الأحمر ١٧)

---

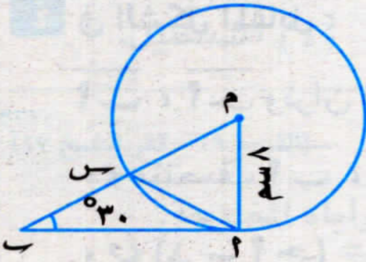
٩ فى الشكل المقابل :

$\overline{\text{أ ب}}$ مماسة للدائرة م عند أ

، م أ = ٨ سم ، ق (∠ أ ب م) = ٣٠°

١ **أوجد :** طول $\overline{\text{أ ب}}$

٢ **أثبت أن :** Δ سـ أ ب متساوى الساقين.



(الشرقية ١٩)

---

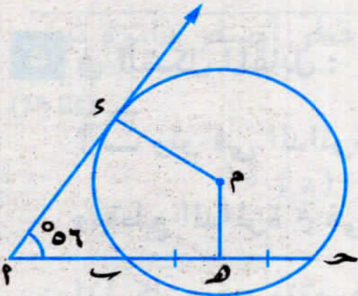
١٠ فى الشكل المقابل :

$\overleftarrow{\text{أ ء}}$ مماس للدائرة م عند ء

، $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$ يقطع الدائرة م فى ب ، حـ

، ق (∠ أ) = ٥٦° ، هـ منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$

أوجد : ق (∠ ء م هـ)



(البحر الأحمر ٢٣ - الإسكندرية ١٩ - بورسعيد ١٨)

---

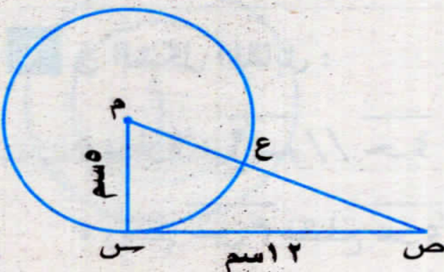
١١ فى الشكل المقابل :

م دائرة طول نصف قطرها ٥ سم ، سـ ص = ١٢ سم

، $\overline{\text{م ص}}$ ∩ الدائرة م = {ع}

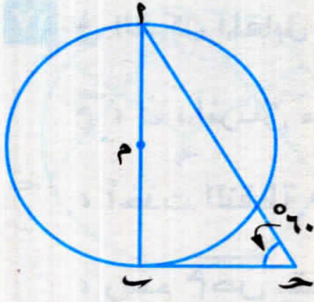
، $\overleftrightarrow{\text{سـ ص}}$ مماس للدائرة عند سـ

أوجد بالبرهان : طول $\overline{\text{ع ص}}$



(أسيوط ١٨)

١٢ **فى الشكل المقابل :**



دائرة م محيطها ٤٤ سم ، $\overline{أب}$ قطر فيها

، $\overline{بحـ}$ مماسة للدائرة عند ب

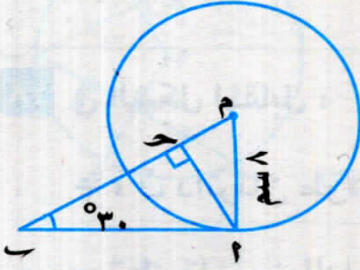
، ق (∠ حـ) = ٦٠°

أوجد : طول $\overline{بحـ}$ علمًا بأن $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$

(الدقهلية ١٨ - الوادى الجديد ١٦)

---

١٣ **فى الشكل المقابل :**



$\overline{أب}$ مماسة للدائرة م عند أ

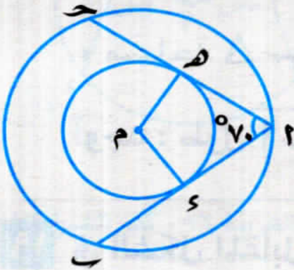
، م أ = ٨ سم ، ق (∠ أ ب م) = ٣٠° ، $\overline{أحـ} \perp \overline{مب}$

أوجد : طول كل من $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$

(الجيزة ١٩ - مطروح ١٨)

---

١٤ **فى الشكل المقابل :**



دائرتان متحدتا المركز م

، $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ قطعتان مماستان للدائرة الصغرى عند ء ، هـ

، ق (∠ ب أ حـ) = ٧٠°

١ أثبت أن : أ ب = أ حـ **٢** أوجد : ق (∠ ء م هـ)

(أسوان ١٧ - سوهاج ١٧ - قنا ١٦)

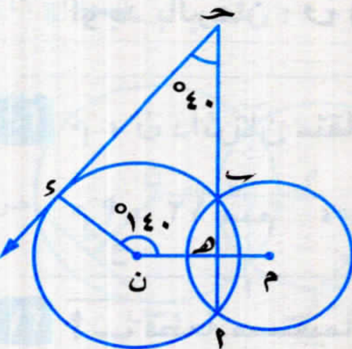
---

١٥ $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م ، $\overleftrightarrow{أحـ}$ ، $\overleftrightarrow{بء}$ مماسان للدائرة م ، $\overleftarrow{حـم}$ يقطع الدائرة م فى س ، ص ويقطع $\overleftrightarrow{بء}$ فى هـ **أثبت أن :** حـ س = ص هـ

(البحيرة ١٩)

---

١٦ **فى الشكل المقابل :**



م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب ، $\overline{أحـ} \cap \overline{من} = \{هـ\}$

، حـ ∈ $\overleftarrow{أب}$ ، ء ∈ الدائرة ن

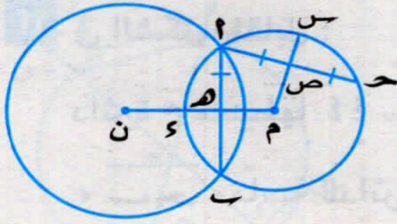
، ق (∠ ء ن م) = ١٤٠° ، ق (∠ حـ) = ٤٠°

أثبت أن :

$\overleftarrow{حـء}$ مماس للدائرة ن عند ء

(أسيوط ١٩)

١٧ في الشكل المقابل :



م ، ن دائرتان متقاطعتان في ا ، ب

، أخذت النقطة ص منتصف $\overline{\text{ا ح}}$

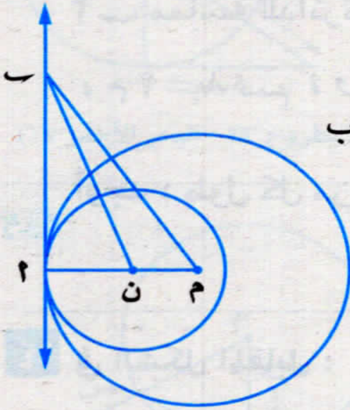
، رسم $\overleftarrow{\text{م ص}}$ يقطع الدائرة م في س

، $\overline{\text{م ن}}$ تقطع $\overline{\text{ا ب}}$ في هـ وتقطع الدائرة م في ء ، فإذا كان : ا هـ = ا ص

أثبت أن : ء هـ = س ص (الدقهلية ١٦)

---

١٨ في الشكل المقابل :



م ، ن دائرتان طولا نصفي قطريهما ١٠ سم ، ٦ سم على الترتيب

ومتماستان من الداخل في ا

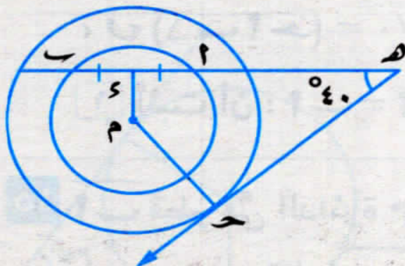
، $\overleftrightarrow{\text{ا ب}}$ مماس مشترك عند ا

، مساحة Δ ب م ن = ٢٤ سم^{٢}

أوجد : طول $\overline{\text{ا ب}}$ (الأقصر ٢٢ - القليوبية ١٨ - قنا ١٦)

---

١٩ في الشكل المقابل :



دائرتان متحدتا المركز م ، $\overleftarrow{\text{هـ ح}}$ مماس للدائرة الكبرى

، $\overline{\text{هـ ب}}$ تقطع الدائرة الصغرى في ا ، ب

، ء منتصف $\overline{\text{ا ب}}$ ، ق (∠ ح هـ ء) = ٤٠°

أوجد بالبرهان : ق (∠ ء م ح) (الوادي الجديد ١٧ - البحيرة ١٧ - أسيوط ١٦)

---

٢٠ م ، ن دائرتان متقاطعتان في ا ، ب حيث :

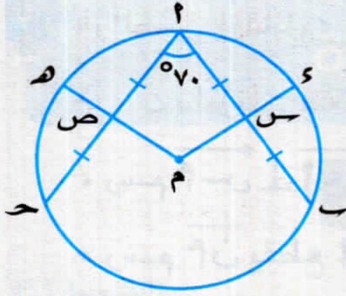
م ا = ١٢ سم ، ن ا = ٩ سم ، م ن = ١٥ سم أوجد : طول $\overline{\text{ا ب}}$ (كفر الشيخ ١٨)

---

٢١ $\overline{\text{ا ب}}$ قطعة مستقيمة طولها ٦ سم ، ارسم دائرة تمر بالنقطتين ا ، ب وطول نصف

قطرها ٤ سم كم عدد الحلول ؟ (لا تمح الأقواس) (دمياط ١٩)

٢٢ **فى الشكل المقابل :**



أب ، أحـ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة م

، س منتصف أب ، ص منتصف أحـ

، ق (∠ حـ أ ب) = ٧٠°

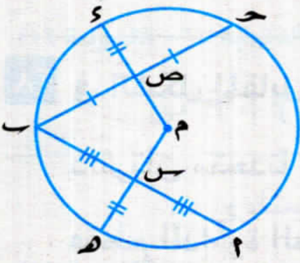
١ احسب : ق (∠ ء م هـ)

٢ أثبت أن : س ء = ص هـ

(الفيوم ٢٢ - الشرقية ١٧)

---

٢٣ **فى الشكل المقابل :**



أب ، ب حـ وتران فى الدائرة م

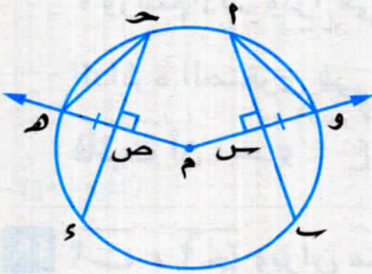
، س منتصف أب ، ص منتصف ب حـ

إذا كان هـ س = ص ء أثبت أن : أب = ب حـ

(الأقصر ٢٥)

---

٢٤ **فى الشكل المقابل :**



أب ، حـ ء وتران فى الدائرة م

، م س ⊥ أب ويقطع الدائرة فى و

، م ص ⊥ حـ ء ويقطع الدائرة فى هـ ، و س = هـ ص

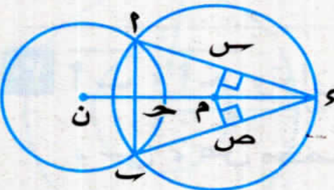
أثبت أن : **١** أب = حـ ء

٢ أ و = حـ هـ

(بورسعيد ١٩ - الغربية ١٦ - كفر الشيخ ١٦)

---

٢٥ **فى الشكل المقابل :**



الدائرة م ∩ الدائرة ن = {أ ، ب}

، أب ∩ م ن = {حـ}

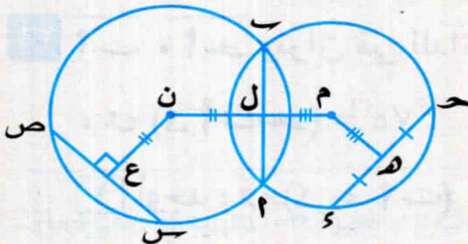
، ء ∈ م ن ، م س ⊥ أ ء ، م ص ⊥ ب ء

أثبت أن : م س = م ص

(سوهاج ١٦)

---

٢٦ **فى الشكل المقابل :**



الدائرة م ∩ الدائرة ن = {أ ، ب}

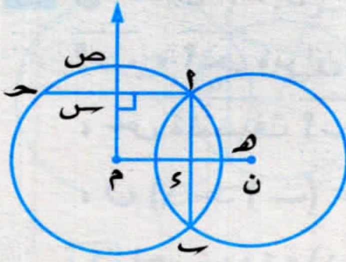
، هـ منتصف حـ ء ، م هـ = م ل

، ن ل = ن ع ، ن ع ⊥ س ص

أثبت أن : حـ ء = س ص

(الغربية ١٨)

٢٧ فى الشكل المقابل :



م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب

، رسم م س ⊥ أحـ يقطع أحـ فى س ويقطع الدائرة م فى ص

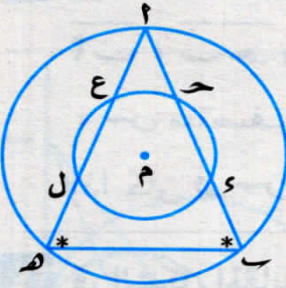
، رسم م ن يقطع أب فى ء والدائرة م فى هـ

فإذا كان : أحـ = أب

أثبت أن : س ص = ء هـ **(القليوبية ١٨)**

---

٢٨ فى الشكل المقابل :



دائرتان متحدتا المركز م ، رسم أب وترًا فى الدائرة الكبرى

فقطع الدائرة الصغرى فى حـ ، ء

، ورسم أهـ وترًا فى الدائرة الكبرى أيضًا فقطع

الدائرة الصغرى فى ع ، ل ، إذا كان : ق (∠ أ ب هـ) = ق (∠ أ هـ ب)

فأثبت أن : حـ ء = ع ل **(المنوفية ١٨)**

---

٢٩ أب ، أحـ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة م ، س منتصف أب

، م س يقطع الدائرة فى ء ، م ص ⊥ أحـ يقطعه فى ص ويقطع الدائرة فى هـ

أثبت أن : س ء = ص هـ **(بنى سويف ١٦)**

---

٣٠ أب ، أحـ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة م

، س ، ص منتصفا أب ، أحـ على الترتيب ، ق (∠ م س ص) = ٣٠°

برهن أن : ١ م س ص مثلث متساوى الساقين.

٢ أ س ص مثلث متساوى الأضلاع. **(الوادى الجديد ١٦)**

---

٣١ أب ، أحـ وتران فى الدائرة م ، م س ⊥ أب تقطعها فى س ، ص منتصف أحـ

، ق (∠ أ ب حـ) = ٧٥° ، م س = م ص

١ أوجد : ق (∠ حـ أ ب)

٢ أثبت أن : محيط Δ أ س ص = $\frac{1}{2}$ محيط Δ أ ب حـ **(كفر الشيخ ١٨)**



الأسئلة الهامة على الوحدة الخامسة
الزوايا والأقواس فى الدائرة

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

١ قياس الزاوية المركزية .... قياس القوس المقابل لها. (القليوبية ١٦)

(أ) ضعف (ب) نصف (ج) يساوى (د) أكبر من

---

٢ طول القوس الذى يمثل $\frac{١}{٤}$ محيط الدائرة يساوى .... (الدقهلية ١٧ - القليوبية ١٦)

(أ) ٢ π نق (ب) π نق (ج) $\frac{١}{٢}$ π نق (د) ٤ π نق

---

٣ قوس من دائرة طوله $\frac{١}{٣}$ π نق سم فإنه يقابل زاوية مركزية قياسها يساوى .... (القليوبية ١٩)

(أ) $°٣٠$ (ب) $°٦٠$ (ج) $°١٢٠$ (د) $°٢٤٠$

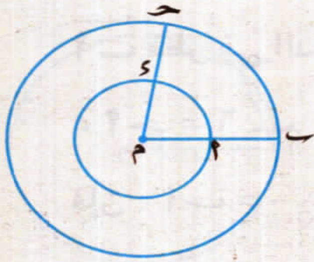
---

٤ أ ب ح مثلث متساوى الأضلاع مرسوم داخل دائرة فإن : ى $(\overset{\frown}{أ ب})$ = ... (الفيوم ١٨)

(أ) $°٣٠$ (ب) $°٦٠$ (ج) $°٩٠$ (د) $°١٢٠$

---

٥ فى الشكل المقابل : (الشرقية ١٦)



دائرتان متحدتا المركز م ، إذا كان

طول نصف قطر الدائرة الصغرى ٧ سم

، ى $(\overset{\frown}{ب ح})$ = $°٨٠$ ، طول نصف قطر الدائرة الكبرى ١٤ سم

، $\pi = \frac{٢٢}{٧}$ فإن :

أولاً : محيط الدائرة الصغرى = ...

(أ) ٤٤ سم. (ب) ٢٢ سم. (ج) ١٥٤ سم. (د) ٨٨ سم.

ثانيًا : ى $(\overset{\frown}{أ ء})$ = ...

(أ) $°٨٠$ (ب) $°٤٠$ (ج) $°٢٠$ (د) $°١٦٠$

---

٦ الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة تكون .... (الغربية ٢٥ - الجيزة ٢٢ - الدقهلية ١٩ - الجيزة ١٨)

(أ) حادة. (ب) منفرجة. (ج) قائمة. (د) مستقيمة.

٧ قياس الزاوية المركزية = ... قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى نفس القوس. (بورسعيد ١٨)

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) ٢ (د) ١

---

٨ النسبة بين قياس الزاوية المحيطية وقياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس تساوى .... (أسوان ١٦)

(أ) ٢ : ١ (ب) ١ : ٢ (جـ) ٢ : ٢ (د) ٢ : ٣

---

٩ الزاوية المحيطية التى تقابل قوسًا أصغر فى الدائرة تكون .... (كفر الشيخ ١٦)

(أ) منعكسة. (ب) قائمة. (جـ) منفرجة. (د) حادة.

---

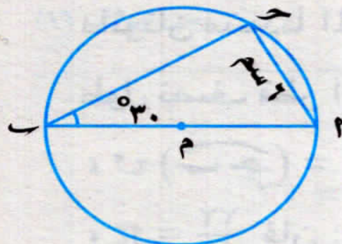
١٠ إذا تقاطع وتران فى نقطة داخل الدائرة فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوى .... قياسى القوسين المقابلين لها. (قنا ١٦)

(أ) نصف الفرق بين (ب) نصف مجموع

(جـ) ضعف مجموع (د) ضعف الفرق بين

---

١١ فى الشكل المقابل : (السويس ١٦)



أب قطر فى الدائرة م ، ق (∠ ب) = ٣٠°

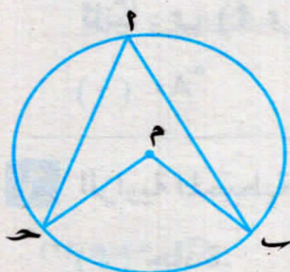
، أحـ = ٦ سم

فإن : أب = ...

(أ) ٣ سم (ب) ٦ سم (جـ) ٩ سم (د) ١٢ سم

---

١٢ فى الشكل المقابل : (المنيا ١٧)



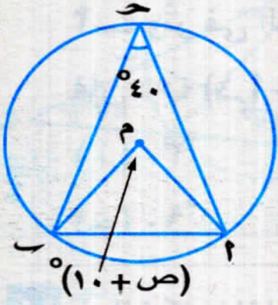
م دائرة فإذا كان : ق (∠ م) − ق (∠ أ) = ٥٠°

فإن : ق (∠ أ) = ...

(أ) ٤٠° (ب) ٥٠°

(جـ) ١٠٠° (د) ١٣٠°

١٣ في الشكل المقابل : (الوادي الجديد ١٩)



دائرة مركزها م ، إذا كان : ق (∠ حـ) = ٤٠°

، ق (∠ أ م ب) = (ص + ١٠)°

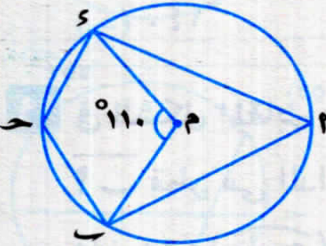
فإن : ص = ...

(أ) ٧٠ (ب) ٨٠

(جـ) ١٠٠ (د) ١٨٠

---

١٤ في الشكل المقابل : (الغربية ١٧)



إذا كان م هو مركز الدائرة

، ق (∠ ب م ء) = ١١٠°

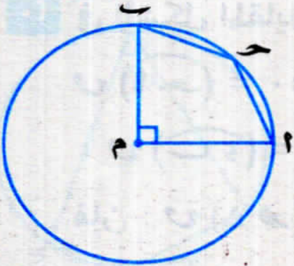
فإن : ق (∠ حـ) = ...

(أ) ٧٠° (ب) ١١٠°

(جـ) ١٢٥° (د) ٥٥°

---

١٥ في الشكل المقابل : (الشرقية ١٩)



م دائرة ، $\overline{أم} \perp \overline{مب}$

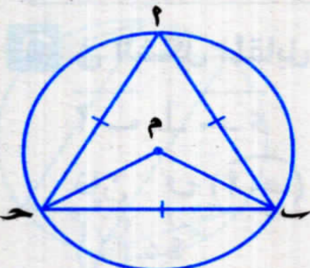
فإن : ق (∠ أ حـ ب) = ...

(أ) ٤٥° (ب) ٩٠°

(جـ) ١٤٥° (د) ١٣٥°

---

١٦ في الشكل المقابل : (أسوان ١٧)



أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع مرسوم داخل الدائرة م

فإن : ق (∠ ب م حـ) = ...

(أ) ٥٠° (ب) ١٢٠°

(جـ) ٦٠° (د) ١٠٠°

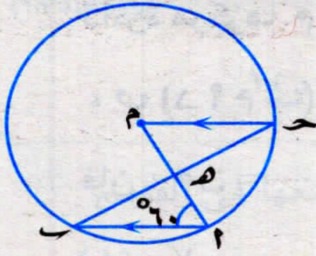
١٧ في الشكل المقابل : (الوادى الجديد ١٨)

$\overline{أب}$ وتر فى الدائرة م ، $\overline{حـ م} // \overline{أب}$ ، ق (∠ م أ ب) = ٦٠°

فإن : ق (∠ أ ب حـ) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠°

(جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°



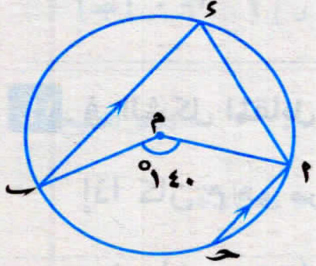
١٨ في الشكل المقابل : (كفر الشيخ ١٨)

إذا كانت : $\overline{ءب} // \overline{أحـ}$

فإن : ق (∠ ء أ حـ) = ...

(أ) ٧٠° (ب) ١١٠°

(جـ) ١٤٠° (د) ٢٢٠°



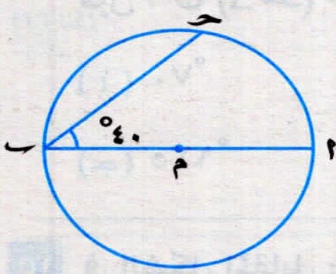
١٩ في الشكل المقابل : (الوادى الجديد ١٧)

$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م ، ق (∠ أ ب حـ) = ٤٠°

فإن : ق ($\overset{\frown}{ب حـ}$) = ...

(أ) ٤٠° (ب) ٥٠°

(جـ) ٨٠° (د) ١٠٠°



٢٠ في الشكل المقابل : (السويس ١٧)

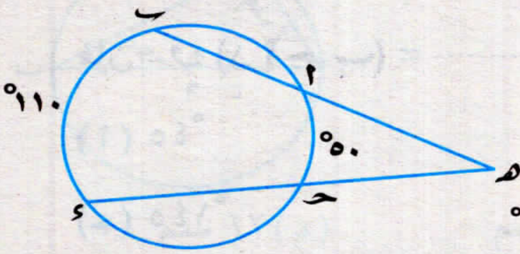
ق ($\overset{\frown}{أ حـ}$) = ٥٠°

، ق ($\overset{\frown}{ب ء}$) = ١١٠°

فإن : ق (∠ هـ) = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٥٠°

(جـ) ٤٠° (د) ٣٠°



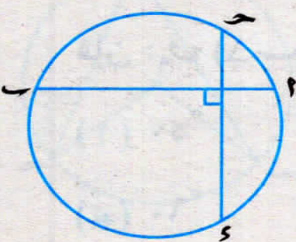
٢١ في الشكل المقابل : (بورسعيد ٢٣ - الفيوم ١٦)

$\overline{أب} \perp \overline{حـ ء}$

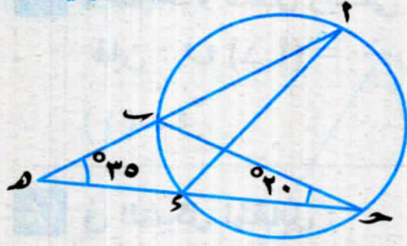
فإن : ق ($\overset{\frown}{أ حـ}$) + ق ($\overset{\frown}{ب ء}$) = ...

(أ) ٤٥° (ب) ٩٠°

(جـ) ١٨٠° (د) ٢٧٠°



٢٢ في الشكل المقابل :



ق (∠ هـ) = ٣٥° ، ق (∠ حـ) = ٢٠°

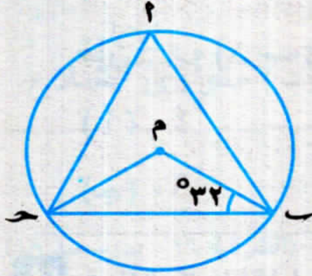
فإن : ق (أحـ⌒) = ...

(أ) ١٣٥° (ب) ١١٠°

(جـ) ٦٥° (د) ٥٥°

---

٢٣ في الشكل المقابل :



دائرة مركزها م ، ق (∠ م ب حـ) = ٣٢°

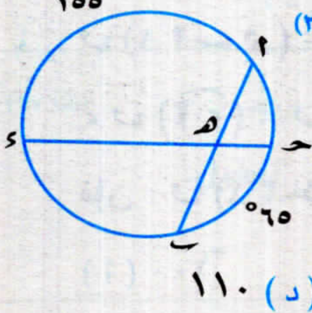
فإن : ق (ب حـ⌒) الأصغر = ...

(أ) ١١٦° (ب) ٣٢°

(جـ) ٥٨° (د) ٦٤°

---

٢٤ في الشكل المقابل :



(الدقهلية ٢٥)

أب ، حـ ء وتران في دائرة متقاطعان في هـ

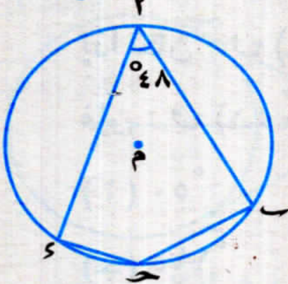
إذا كان : ق (ب حـ⌒) = ٦٥° ، ق (أ ء⌒) = ١٥٥°

فإن : ق (∠ ب هـ ء) = ...°

(أ) ٤٠ (ب) ٥٠ (جـ) ٧٠ (د) ١١٠

---

٢٥ في الشكل المقابل :



إذا كان : ق (∠ أ) = ٤٨°

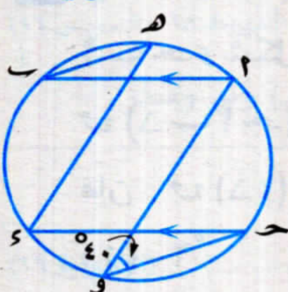
فإن : ق (ب ء⌒) الأكبر = ...

(أ) ٢٦٠° (ب) ٢٦٥°

(جـ) ٢٦٤° (د) ٢٦٢°

---

٢٦ في الشكل المقابل :



أب // حـ ء

، ق (∠ أ و حـ) = ٤٠°

فإن : ق (∠ ء هـ ب) = ...

(أ) ٥٠° (ب) ٤٠°

(جـ) ٣٠° (د) ٤٥°

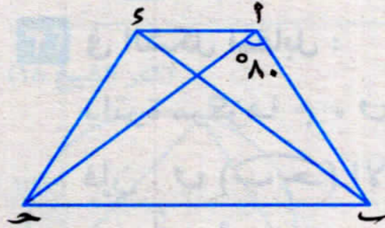
٢٧ ٢ ب حـ ء شكل رباعى دائرى فيه : ق (∠ ٢) = ٣ ق (∠ حـ)

فإن : ق (∠ ٢) = ... (دمياط ٢٥ - قنا ٢٣ - الغربية ١٩ - الدقهلية ١٨)

(أ) ٤٥° (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٣٥°

---

٢٨ فى الشكل المقابل : (بورسعيد ٢٣)



٢ ب حـ ء رباعى دائرى

، ق (∠ ب ٢ حـ) = ٨٠°

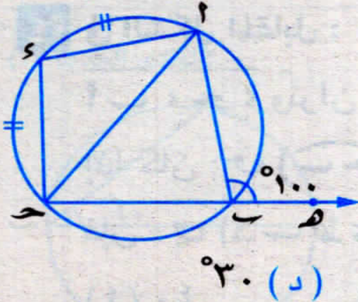
فإن : ق (∠ ب ء حـ) = ...

(أ) ٤٠° (ب) ٨٠°

(جـ) ٩٠° (د) ١٠٠°

---

٢٩ فى الشكل المقابل : (الإسماعيلية ١٦)



ق (∠ ٢ ب هـ) = ١٠٠°

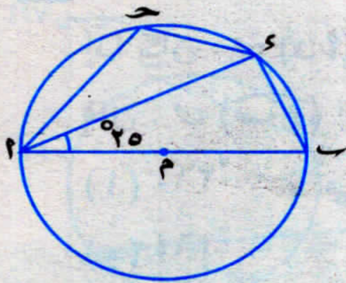
، ق ($\overset{\frown}{٢ ء}$) = ق ($\overset{\frown}{ء حـ}$)

فإن : ق (∠ ٢ حـ ء) = ...

(أ) ١٠٠° (ب) ٨٠° (جـ) ٤٠° (د) ٣٠°

---

٣٠ فى الشكل المقابل : (كفر الشيخ ١٦)



إذا كان : ق (∠ ب ٢ ء) = ٢٥°

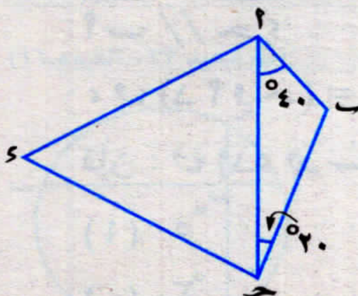
فإن : ق (∠ ء حـ ٢) = ...

(أ) ٥٠° (ب) ١٠٠°

(جـ) ١١٥° (د) ١٢٥°

---

٣١ فى الشكل المقابل : (الشرقية ١٨)



٢ ب حـ ء شكل رباعى دائرى فيه :

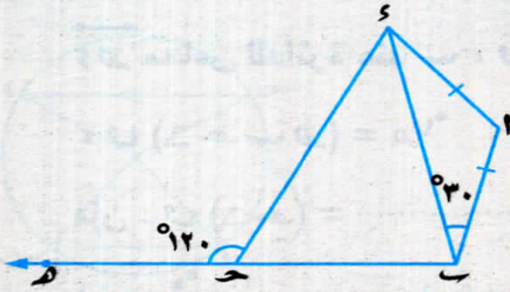
ق (∠ ب ٢ حـ) = ٤٠° ، ق (∠ ب حـ ٢) = ٢٠°

فإن : ق (∠ ء) = ...

(أ) ٢٠° (ب) ٤٠°

(جـ) ٦٠° (د) ١٢٠°

٣٢ في الشكل المقابل : (الإسكندرية ١٦)



أ ب حـ ء شكل رباعى

، ق (∠ أ ب ء) = ٣٠°

، ق (∠ ء حـ هـ) = ١٢٠°

، هـ ∈ ب حـ←

فإن الشكل أ ب حـ ء ....

(أ) مستطيل. (ب) معين. (جـ) رباعى دائرى. (د) متوازى أضلاع.

---

٣٣ عدد المماسات المشتركة للدائرتين المتماستين من الخارج هو ....

(الشرقية ١٩ - بورسعيد ١٨)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

---

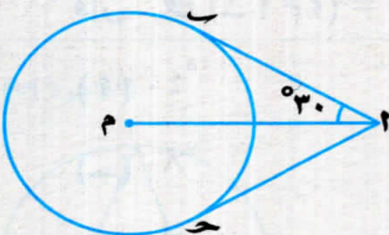
٣٤ القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج دائرة دائمًا .... (قنا ١٧)

(أ) متساويتان فى الطول. (ب) غير متساويتين فى الطول.

(جـ) متعامدتان. (د) متوازيتان.

---

٣٥ في الشكل المقابل : (البحر الأحمر ١٦)



أ ب ، أ حـ قطعتان مماستان للدائرة م

التى طول نصف قطرها = ٤ سم ، ق (∠ ب أ م) = ٣٠°

فإن : أ ب = ... سم.

(أ) ٨ (ب) $٤\sqrt{٣}$ (جـ) $٢\sqrt{٣}$ (د) $٨\sqrt{٣}$

---

٣٦ الزاوية المماسية هى زاوية محصورة بين .... (البحر الأحمر ١٩ - أسيوط ١٨ - السويس ١٦)

(أ) وترين. (ب) مماسين. (جـ) وتر ومماس. (د) وتر وقطر.

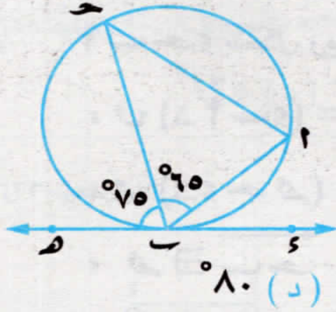
---

٣٧ إذا كان قياس الزاوية المماسية يساوى ٧٠°

فإن قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس يساوى .... (القليوبية ١٦)

(أ) ٣٥° (ب) ٧٠° (جـ) ١٤٠° (د) ١٠٥°

٣٨ **فى الشكل المقابل :** (الغربية ١٦)



$\overleftrightarrow{ءهـ}$ مماس للدائرة عند ب ، ق (∠ أ ب حـ) = ٦٥°

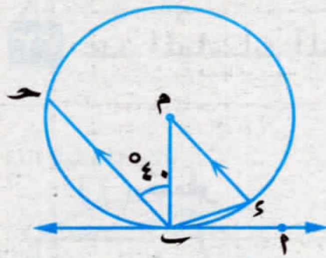
، ق (∠ حـ ب هـ) = ٧٥°

فإن : ق (∠ حـ) = ...

(أ) ٢٠° (ب) ٤٠° (جـ) ٥٠° (د) ٨٠°

---

٣٩ **فى الشكل المقابل :** (الشرقية ١٨)



$\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م ، ق (∠ م ب حـ) = ٤٠°

، $\overline{ءم}$ // $\overline{ب حـ}$

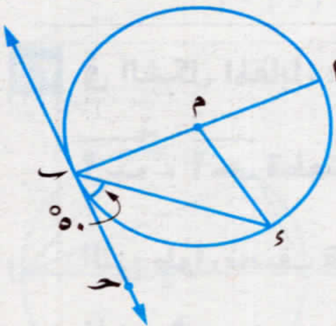
فإن : ق (∠ أ ب ء) = ...

(أ) ٨٠° (ب) ٤٠°

(جـ) ٩٠° (د) ٢٠°

---

٤٠ **فى الشكل المقابل :** (بورسعيد ١٧)



$\overleftrightarrow{ب حـ}$ مماس للدائرة م ، ق (∠ حـ ب ء) = ٥٠°

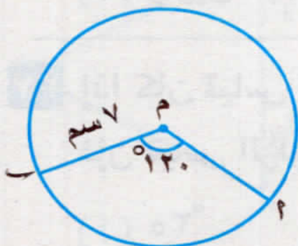
فإن : ق (∠ أ م ء) = ...

(أ) ٤٠° (ب) ٥٠°

(جـ) ٨٠° (د) ١٠٠°

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ **فى الشكل المقابل :** (السويس ١٧)



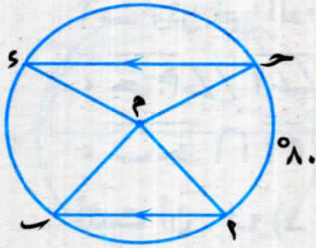
م دائرة طول نصف قطرها ٧ سم

، ق (∠ أ م ب) = ١٢٠°

أوجد :

طول $\overset{\frown}{أب}$ $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$

٢ في الشكل المقابل : (الوادي الجديد ١٨)



م دائرة طول قطرها ١٥ سم

، $\overline{أب}$ ، $\overline{حـ ء}$ وتران متوازيان في الدائرة

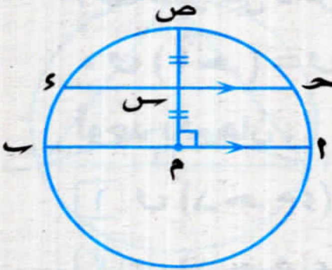
، ق ($\overset{\frown}{أ حـ}$) = ٨٠° ، طول $\overset{\frown}{أ حـ}$ = طول $\overset{\frown}{أ ب}$

أوجد : ١ ق (∠ م أ ب)

٢ طول $\overset{\frown}{حـ ء}$ (حيث π = ٣,١٤)

---

٣ في الشكل المقابل : (الدقهلية ١٩)



$\overline{أب}$ قطر في الدائرة م ، $\overline{حـ ء}$ // $\overline{أب}$

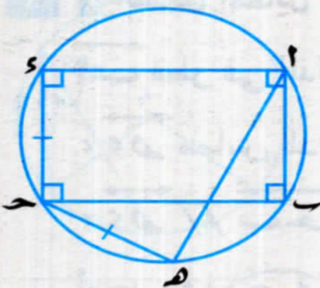
، س منتصف $\overline{م ص}$

، $\overline{م ص}$ ⊥ $\overline{أب}$

أوجد : ق ($\overset{\frown}{أ حـ}$) ، ق ($\overset{\frown}{حـ ص}$)

---

٤ في الشكل المقابل : (أسيوط ١٩)



أ ب حـ ء مستطيل مرسوم داخل دائرة

، رسم الوتر $\overline{حـ هـ}$

بحيث حـ هـ = حـ ء

أثبت أن : أ هـ = ب حـ

---

٥ في الشكل المقابل : (القاهرة ١٩)



Δ أ ب حـ مرسوم داخل الدائرة م ، أ ب = أ حـ

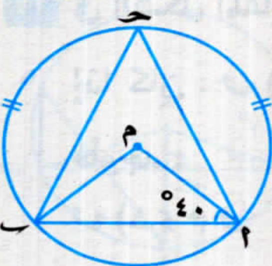
، ق (∠ ب م حـ) = ٨٠°

أوجد : ١ ق (∠ أ ب حـ)

٢ ق ($\overset{\frown}{ب حـ}$) الأكبر.

---

٦ في الشكل المقابل : (سوهاج ٢٣)

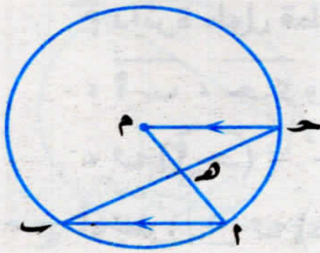


ق ($\overset{\frown}{أ حـ}$) = ق ($\overset{\frown}{ب حـ}$)

، ق (∠ م أ ب) = ٤٠°

أوجد : ق (∠ حـ أ م)

٧ في الشكل المقابل : (البحيرة ١٨)



$\overline{أب}$ وتر في الدائرة م

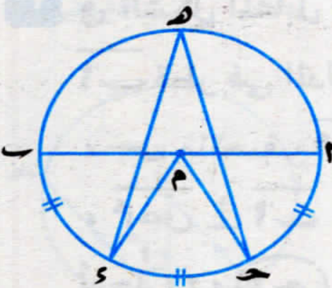
، $\overline{حـ م} // \overline{أب}$

، $\overline{ب حـ} \cap \overline{أ م} = \{هـ\}$

أثبت أن : ق (∠ هـ أ ب) = ٢ ق (∠ هـ ب أ)

---

٨ في الشكل المقابل : (السويس ١٦ - أسيوط ١٦ - الوادي الجديد ١٦)



$\overline{أب}$ قطر في دائرة مركزها م

، ق ($\overset{\frown}{أ حـ}$) = ق ($\overset{\frown}{حـ ء}$) = ق ($\overset{\frown}{ء ب}$)

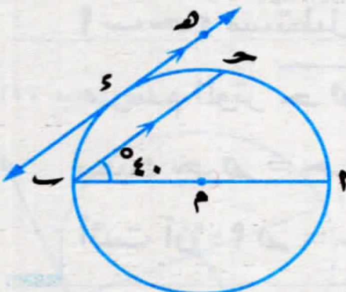
أوجد بالبرهان :

١ ق (∠ حـ م ء)

٢ ق (∠ حـ هـ ء)

---

٩ في الشكل المقابل : (السويس ٢٥ - المنوفية ١٧)



$\overline{أب}$ قطر في الدائرة م ، ق (∠ ب) = ٤٠°

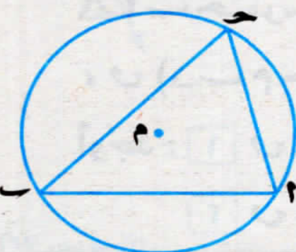
، $\overleftrightarrow{ء هـ}$ مماس للدائرة عند ء

، $\overleftrightarrow{ء هـ} // \overline{ب حـ}$

أوجد : ق ($\overset{\frown}{حـ ء}$)

---

١٠ في الشكل المقابل : (الإسكندرية ١٦)



أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة م

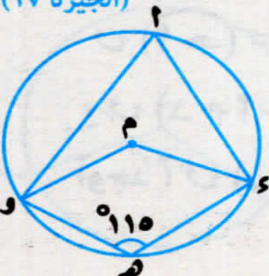
، ق ($\overset{\frown}{أ ب}$) : ق ($\overset{\frown}{ب حـ}$) : ق ($\overset{\frown}{أ حـ}$) = ٤ : ٥ : ٣

أوجد :

ق (∠ أ حـ ب)

---

١١ في الشكل المقابل : (الجيزة ١٧)



إذا كان : ق (∠ ء هـ و) = ١١٥°

فأوجد :

ق (∠ ء م و)

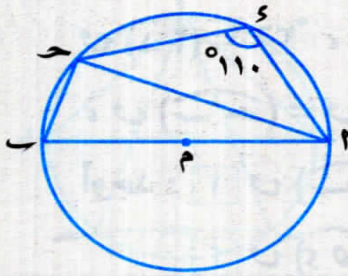
١٢ **فى الشكل المقابل :** (الغربية ١٦)

$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م

، ق (∠ حـ ء أ) = ١١٠°

أوجد :

ق $(\overset{\frown}{حـ ب})$



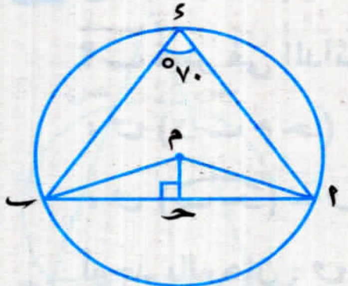
١٣ **فى الشكل المقابل :** (بنى سويف ١٩)

$\overline{أب}$ وتر فى الدائرة م

، $\overline{م حـ} \perp \overline{أب}$

، ق (∠ أ ء ب) = ٧٠°

أوجد : ق (∠ أ م حـ)



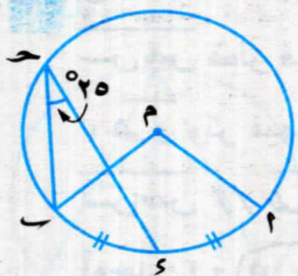
١٤ **فى الشكل المقابل :** (السويس ٢٢ - الشرقية ١٩)

م دائرة ، ء منتصف $\overset{\frown}{أب}$

، ق (∠ ء حـ ب) = ٢٥°

أوجد :

ق (∠ أ م ب)



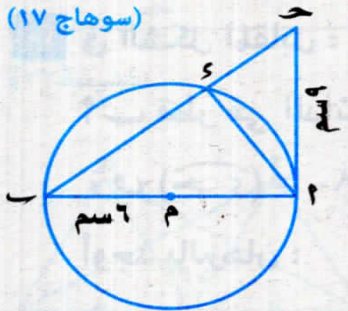
١٥ **فى الشكل المقابل :** (سوهاج ١٧)

$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م

، $\overline{أحـ}$ مماسة لها عند أ

فإذا كان : أحـ = ٩ سم ، ب م = ٦ سم

أوجد : طول كل من $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{أ ء}$



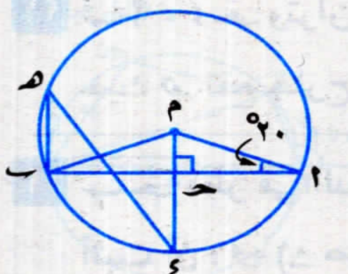
١٦ **فى الشكل المقابل :** (البحيرة ١٧)

$\overleftrightarrow{م حـ} \cap \overline{أب} = \{حـ\}$ ، $\overleftrightarrow{م حـ} \perp \overline{أب}$

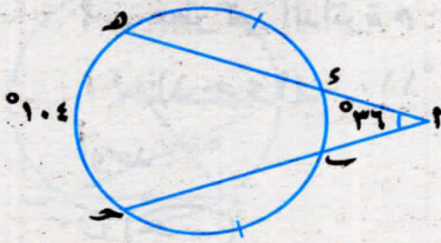
، $\overleftrightarrow{م حـ}$ يقطع الدائرة فى ء

، ق (∠ م أ ب) = ٢٠°

أوجد : [١] ق $(\overset{\frown}{أ ء})$ [٢] ق (∠ ء هـ ب)



١٧ في الشكل المقابل : (القليوبية ١٨)



ق (∠ أ) = °٣٦ ، ق (⌒هـ حـ) = °١٠٤

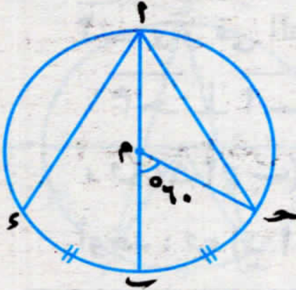
، ق (⌒ب حـ) = ق (⌒ء هـ)

أوجد : [١] ق (⌒ب ء)

[٢] ق (⌒ء هـ)

---

١٨ في الشكل المقابل : (جنوب سيناء ١٦)



أب قطر في الدائرة م

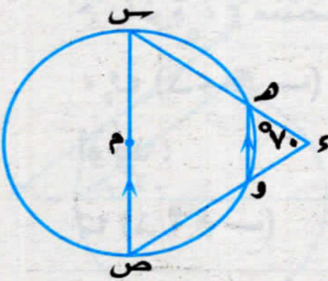
، ق (∠ ب م حـ) = °٦٠

، ق (⌒ب حـ) = ق (⌒ب ء)

أوجد بالبرهان : ق (∠ حـ أ ء)

---

١٩ في الشكل المقابل : (الدقهلية ١٨)



س ص قطر في الدائرة م

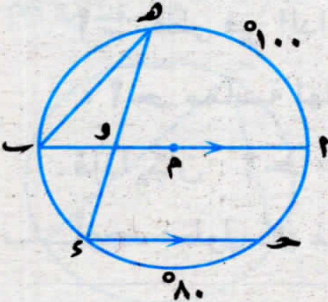
، هـ و وتر فيها حيث :

س ص // هـ و ، ق (∠ ء) = °٧٠

أوجد : ق (⌒هـ س)

---

٢٠ في الشكل المقابل : (سوهاج ٢٥ - سوهاج ٢٢ - المنيا ١٧)



أب قطر في الدائرة م ، أب // حـ ء

، ق (⌒حـ ء) = °٨٠ ، ق (⌒أ هـ) = °١٠٠

أوجد بالبرهان :

ق (∠ ء هـ ب) ، ق (∠ أ و هـ)

---

٢١ ب أ ، ء حـ وتران متساويان في الطول في دائرة م ، أب ∩ حـ ء = {هـ}

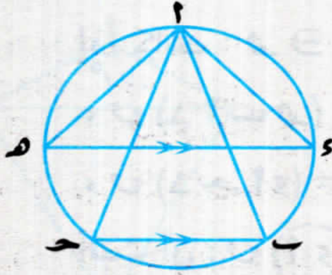
حيث هـ تقع خارج الدائرة أثبت أن : المثلث هـ أ حـ متساوي الساقين. (الفيوم ١٦)

---

٢٢ ب حـ قطر في الدائرة م ، ب ص وتر فيها ، هـ ∈ ب ص بحيث ب ص = ص هـ

أثبت أن : ق (∠ ص م حـ) = ٢ ق (∠ ب هـ حـ) (الدقهلية ١٨)

٢٣ في الشكل المقابل : (دمياط ٢٢ - الوادى الجديد ١٩ - الإسماعيلية ١٨ - كفر الشيخ ١٦)



أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة

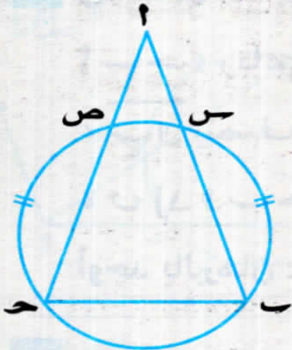
، ء هـ // ب حـ

أثبت أن :

ق (∠ ء أ حـ) = ق (∠ ب أ هـ)

---

٢٤ في الشكل المقابل : (الشرقية ١٨)



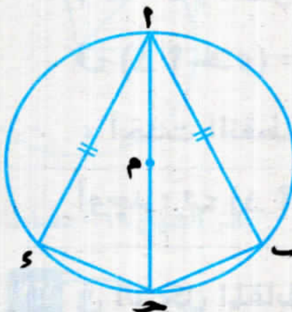
طول ⌒ب س = طول ⌒حـ ص

أثبت أن :

أ س = أ ص

---

٢٥ في الشكل المقابل : (بنى سويف ١٧)



أ حـ قطر فى الدائرة م

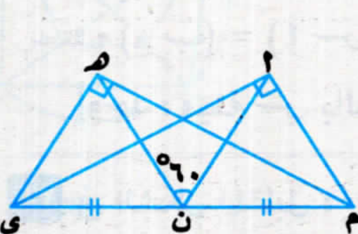
، أ ب = أ ء

أثبت أن :

ق (⌒ب حـ) = ق (⌒حـ ء)

---

٢٦ في الشكل المقابل : (الشرقية ١٦)



ق (∠ م أ ى) = ق (∠ م هـ ى) = ٩٠°

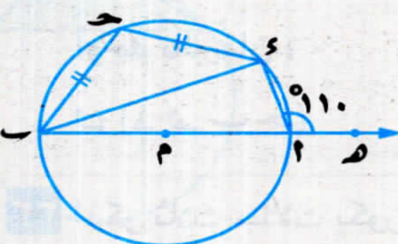
، ن منتصف م ى ، ق (∠ هـ ن أ) = ٦٠°

١ أثبت أن : أ ، م ، ى ، هـ تنتمى لدائرة مركزها ن

٢ أوجد بالبرهان : ق (∠ هـ ى أ)

---

٢٧ في الشكل المقابل : (الشرقية ١٨)

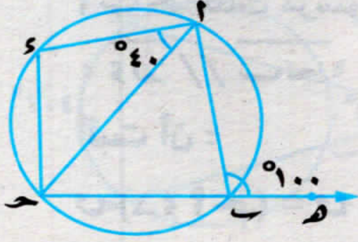


أ ب قطر فى الدائرة م ، هـ ∈ ب أ

، حـ ء = حـ ب ، ق (∠ ء أ هـ) = ١١٠°

أوجد : ق (∠ أ ء حـ)

٢٨ **فى الشكل المقابل :** (المنوفية ٢٣)



إذا كانت : هـ ∈ $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$

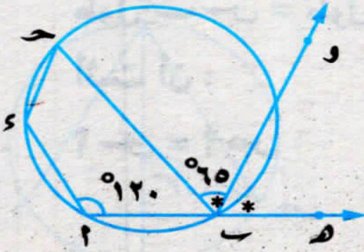
، ق (∠ أ ب هـ) = ١٠٠°

، ق (∠ حـ أ ء) = ٤٠°

أثبت أن : ق ($\overset{\frown}{\text{أ ء}}$) = ق ($\overset{\frown}{\text{حـ ء}}$)

---

٢٩ **فى الشكل المقابل :** (الإسماعيلية ١٧)



أ ب حـ ء رباعى دائرى فيه : ق (∠ أ) = ١٢٠°

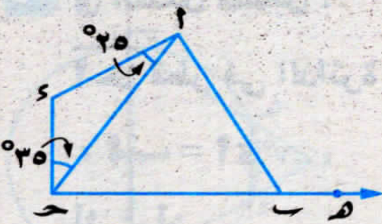
، $\overleftarrow{\text{ب و}}$ ينصف ∠ هـ ب حـ

، ق (∠ و ب حـ) = ٦٥°

أوجد بالبرهان : ١ ق (∠ حـ) ٢ ق (∠ ء)

---

٣٠ **فى الشكل المقابل :** (الدقهلية ١٦)



أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى فيه :

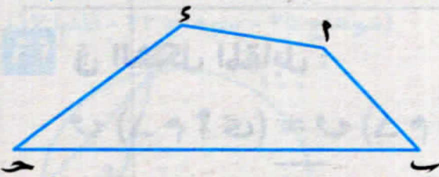
ق (∠ أ حـ ء) = ٣٥° ، ق (∠ حـ أ ء) = ٢٥°

، أخذت النقطة هـ ∈ $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$ ، هـ ∉ $\overline{\text{حـ ب}}$

أوجد : ق (∠ أ ب هـ)

---

٣١ **فى الشكل المقابل :** (الفيوم ١٦)



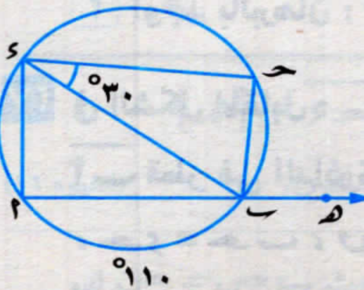
أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى فيه :

ق (∠ ب) = (٤ س − ٣٠)° ، ق (∠ ء) = (٥ س + ٣٠)°

أوجد : قيمة س بالدرجات.

---

٣٢ **فى الشكل المقابل :** (البحر الأحمر ١٩)



هـ ∈ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، ق ($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = ١١٠°

، ق (∠ حـ ء ب) = ٣٠°

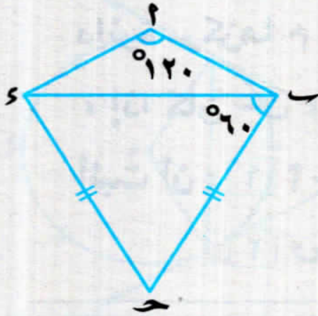
أوجد بالبرهان :

ق (∠ هـ ب حـ)

---

٣٣ اذكر ثلاث حالات يكون فيها الشكل الرباعى دائريًا. (الوادى الجديد ١٨ - سوهاج ١٧)

٣٤ في الشكل المقابل : (جنوب سيناء ١٨)



ق (∠ ٢) = ١٢٠°

، ب حـ = حـ ٤

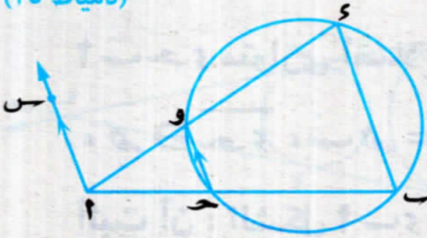
، ق (∠ حـ ب ٤) = ٦٠°

أثبت أن :

الشكل ٢ ب حـ ٤ رباعي دائري.

---

٣٥ في الشكل المقابل : (دمياط ٢٥)



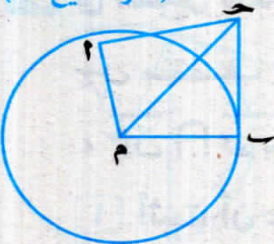
$\overline{٤و} \cap \overleftrightarrow{ب حـ} = \{٢\}$ ، $\overleftrightarrow{٢س} // \overline{حـ و}$

برهن أن : $\overleftrightarrow{٢س}$ مماس للدائرة المارة

برؤوس △ ٢ ب ٤

---

٣٦ في الشكل المقابل : (كفر الشيخ ٢٥)



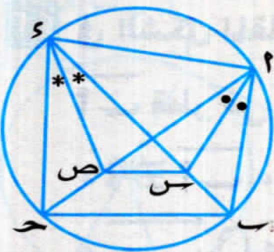
$\overleftrightarrow{ب حـ}$ مماس للدائرة م عند ب ، $\overline{م ب}$ نصف قطر

، ٢ م = ٦ سم ، حـ م = ١٠ سم ، ٢ حـ = ٨ سم

أثبت بالبرهان : أن الشكل ٢ م ب حـ رباعي دائري

---

٣٧ في الشكل المقابل : (كفر الشيخ ١٨ - دمياط ١٦)



٢ ب حـ ٤ شكل رباعي مرسوم داخل دائرة

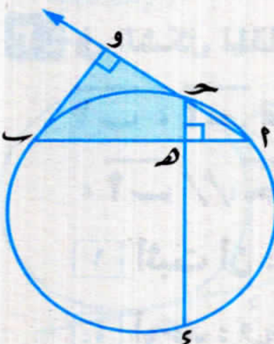
، $\overleftrightarrow{٢س}$ ينصف ∠ ب ٢ حـ

، $\overleftrightarrow{٤ص}$ ينصف ∠ ب ٤ حـ

أثبت أن : الشكل ٢ س ص ٤ رباعي دائري.

---

٣٨ في الشكل المقابل : (الجيزة ١٦)



$\overline{٢ب}$ ، $\overline{حـ ٤}$ وتران في دائرة متعامدان ومتقاطعان في هـ

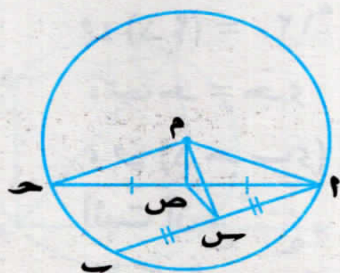
، رسم $\overline{ب و} \perp \overleftrightarrow{٢ حـ}$ فقطعه في و ، و $\notin \overline{٢ حـ}$

أثبت أن :

[١] الشكل و حـ هـ ب رباعي دائري.

[٢] ق (∠ ب و هـ) = ق (∠ ب ٢ ٤)

٣٩ في الشكل المقابل : (القليوبية ١٩)



دائرة مركزها م

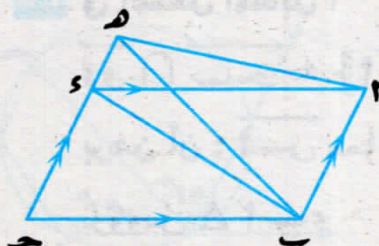
، إذا كان ٮس ، ص منتصفي $\overline{\text{أ ٮ}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ على الترتيب.

أثبت أن : ١ أ ٮس ص م رباعي دائري.

٢ ٯ (∠ م ٮس ص) = ٯ (∠ م حـ ص)

---

٤٠ في الشكل المقابل : (البحيرة ١٨ - الأقصر ١٧)



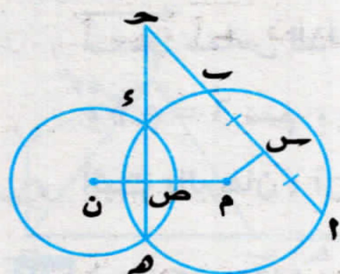
أ ٮ حـ ء متوازي أضلاع

، هـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ ، ٮ هـ = أ ء

أثبت أن : الشكل أ ٮ ء هـ رباعي دائري.

---

٤١ في الشكل المقابل : (الإسماعيلية ١٧)



ٮس منتصف $\overline{\text{أ ٮ}}$

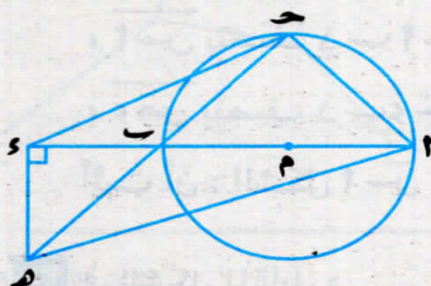
، $\overline{\text{م ن}}$ ∩ $\overline{\text{هـ حـ}}$ = {ص}

١ أثبت أن : الشكل حـ ٮس م ص رباعي دائري.

٢ أوجد : مركز الدائرة المارة برؤوس الشكل حـ ٮس م ص

---

٤٢ في الشكل المقابل : (قنا ١٩)



$\overline{\text{أ ٮ}}$ قطر في الدائرة م ، ء ∈ $\overleftrightarrow{\text{أ ٮ}}$

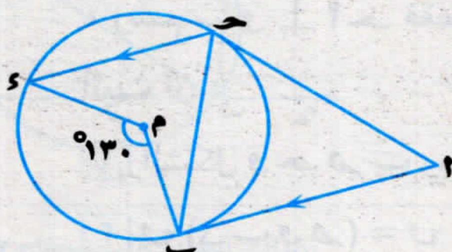
، ء ∉ $\overline{\text{أ ٮ}}$ ، رسم $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أ ٮ}}$ ، حـ ∈ $\overset{\frown}{\text{أ ٮ}}$

، $\overleftrightarrow{\text{حـ ٮ}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$ = {هـ}

أثبت أن : الشكل أ حـ ء هـ رباعي دائري.

---

٤٣ في الشكل المقابل : (الوادي الجديد ١٩ - مطروح ١٨ - كفر الشيخ ١٧)



$\overline{\text{أ ٮ}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ قطعتان مماستان للدائرة م

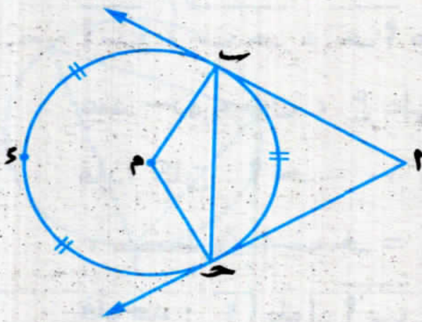
، $\overline{\text{أ ٮ}}$ // $\overline{\text{حـ ء}}$ ، ٯ (∠ ٮ م ء) = ١٣٠°

١ أثبت أن : $\overleftrightarrow{\text{حـ ٮ}}$ ينصف ∠ أ حـ ء

٢ أوجد : ٯ (∠ أ)

٤٤ **في الشكل المقابل :**

(الإسماعيلية ١٨)



$\overleftrightarrow{ا ب}$ ، $\overleftrightarrow{ا حـ}$ مماسان للدائرة م عند ب ، حـ

، ق $(\overset{\frown}{ب حـ})$ = ق $(\overset{\frown}{ب ء})$ = ق $(\overset{\frown}{حـ ء})$

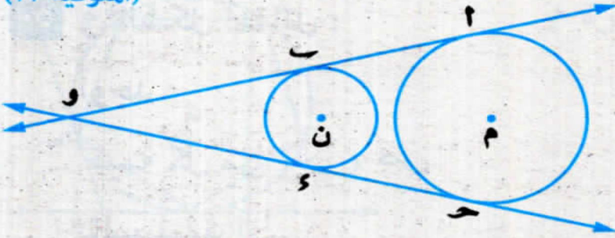
أثبت أن :

Δ ا ب حـ متساوى الأضلاع.

---

٤٥ **في الشكل المقابل :**

(المنوفية ٢٣)



$\overleftrightarrow{ا ب}$ ، $\overleftrightarrow{حـ ء}$ مماسان مشتركان للدائرتين م ، ن

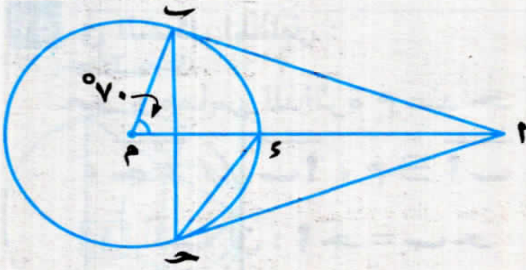
، $\overleftrightarrow{ا ب} \cap \overleftrightarrow{حـ ء} = \{و\}$

أثبت أن : ا ب = حـ ء

---

٤٦ **في الشكل المقابل :**

(الإسماعيلية ١٧)



$\overline{ا ب}$ ، $\overline{ا حـ}$ قطعتان مماستان مرسومتان من نقطة ا

، ق (∠ ا م ب) = ٧٠°

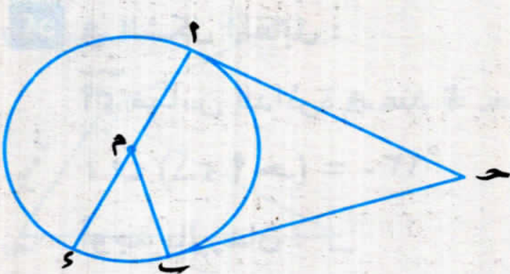
أوجد : ١ ق (∠ ا ب حـ)

٢ ق (∠ ا حـ ء)

---

٤٧ **في الشكل المقابل :**

(بني سويف ١٧)



$\overline{ا ء}$ قطر في دائرة مركزها م

، $\overleftrightarrow{حـ ا}$ ، $\overleftrightarrow{حـ ب}$ مماسان للدائرة م عند ا ، ب

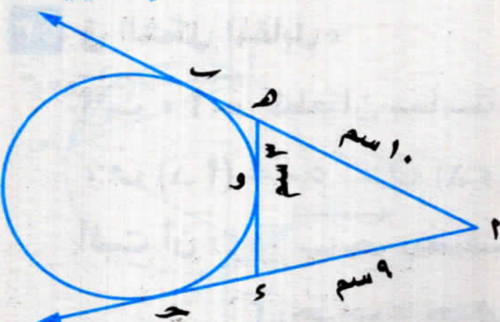
أثبت أن :

ق (∠ ء م ب) = ق (∠ ا حـ ب)

---

٤٨ **في الشكل المقابل :**

(الإسماعيلية ١٧)



$\overleftrightarrow{ا ب}$ ، $\overleftrightarrow{ا حـ}$ مماسان للدائرة

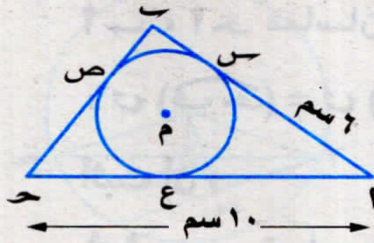
، $\overline{هـ ء}$ مماسة للدائرة عند و

بحيث : ا هـ = ١٠ سم

، هـ و = ٣ سم ، ا ء = ٩ سم

أوجد : طول $\overline{هـ ء}$

٤٩ في الشكل المقابل : (المنوفية ١٩)



$\overline{أب}$ ، $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{حـ أ}$ مماسات للدائرة م

عند س ، ص ، ع على الترتيب

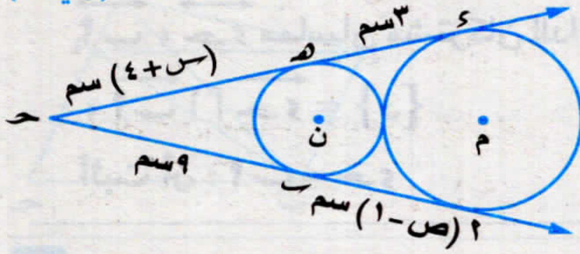
فإذا كان : أ حـ = ١٠ سم ، أ س = ٦ سم

، محيط Δ أ ب حـ = ٢٤ سم.

فأوجد : [١] طول $\overline{أب}$ [٢] نوع Δ أ ب حـ بالنسبة لزواياه.

---

٥٠ في الشكل المقابل : (المنيا ١٨)



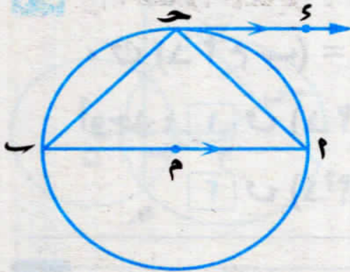
أوجد :

قيمة كل من س ، ص

بالسنتيمترات.

---

٥١ في الشكل المقابل : (شمال سيناء ١٩ - الجيزة ١٨)



$\overleftrightarrow{حـ ء}$ مماس للدائرة م عند حـ

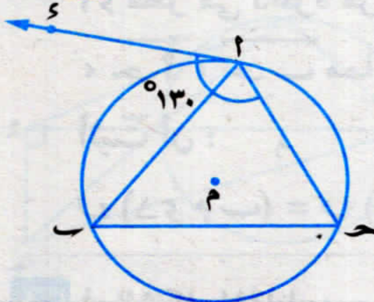
، $\overleftrightarrow{حـ ء}$ // $\overline{ب أ}$ ، م $\in$ $\overline{أب}$

[١] أثبت أن : أ حـ = ب حـ

[٢] أوجد : ق (∠ ب)

---

٥٢ في الشكل المقابل : (القليوبية ١٧)



$\overleftrightarrow{أ ء}$ مماس للدائرة م عند أ

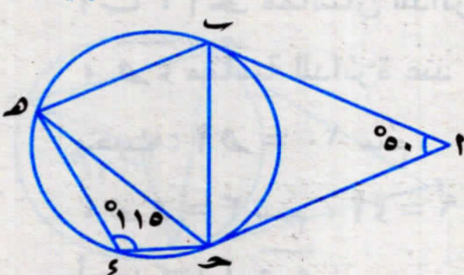
، ق (∠ ء أ حـ) = ١٣٠°

أوجد بالبرهان :

ق (∠ ب)

---

٥٣ في الشكل المقابل : (الشرقية ١٧)



$\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ قطعتان مماستان للدائرة عند ب ، حـ

، ق (∠ أ) = ٥٠° ، ق (∠ ء) = ١١٥°

أثبت أن : [١] $\overrightarrow{ب حـ}$ ينصف ∠ أ ب هـ

[٢] حـ ب = حـ هـ

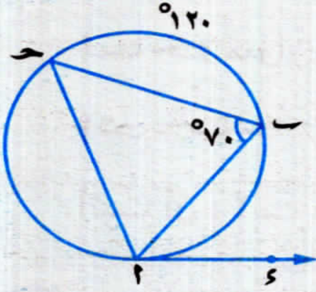
٥٤ في الشكل المقابل : (الإسماعيلية ١٩)

$\overleftarrow{أ ء}$ مماس للدائرة عند أ

، ق (∠ب) = ٧٠°

، ق ($\overset{\frown}{ب حـ}$) = ١٢٠°

أوجد بالبرهان : ق (∠ء أ ب)



---

٥٥ في الشكل المقابل : (البحيرة ١٩)

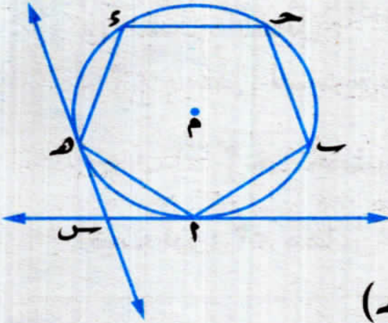
أ ب حـ ء هـ خماسي منتظم مرسوم داخل الدائرة م

، $\overleftrightarrow{أ س}$ مماس للدائرة عند أ

، $\overleftrightarrow{هـ س}$ مماس للدائرة عند هـ

حيث $\overleftrightarrow{أ س}$ ∩ $\overleftrightarrow{هـ س}$ = {س}

أوجد : ١ ق ($\overset{\frown}{أ هـ}$) ٢ ق (∠أ س هـ)



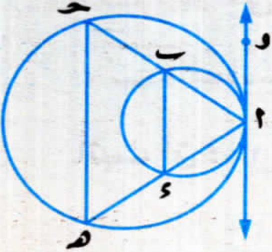
---

٥٦ في الشكل المقابل : (البحر الأحمر ١٩)

$\overleftrightarrow{أ و}$ مماس مشترك لدائرتين متماستين

من الداخل عند أ

أثبت أن : $\overline{ب ء}$ // $\overline{حـ هـ}$



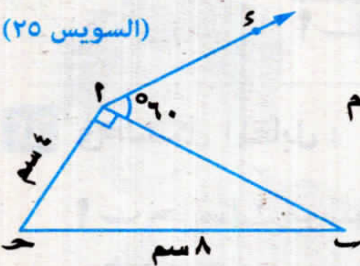
---

٥٧ في الشكل المقابل : (السويس ٢٥)

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في أ ، أ حـ = ٤ سم ، ب حـ = ٨ سم

أثبت أن : $\overleftarrow{أ ء}$ مماس للدائرة المارة

برؤوس Δ أ ب حـ



---

٥٨ في الشكل المقابل : (كفر الشيخ ١٦)

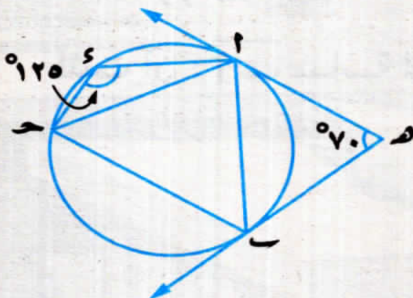
$\overleftarrow{هـ أ}$ ، $\overleftarrow{هـ ب}$ مماسان للدائرة عند أ ، ب

فإذا كان : ق (∠أ هـ ب) = ٧٠°

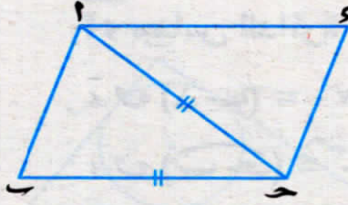
، ق (∠أ ء حـ) = ١٢٥°

أثبت أن : ١ أ ب = أ حـ

٢ $\overleftrightarrow{أ حـ}$ مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، هـ



٥٩ في الشكل المقابل : (الدقهلية ٢٥)



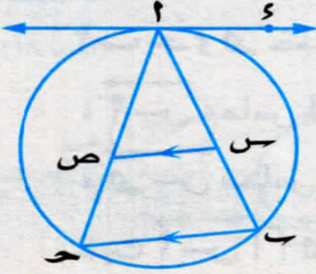
أ ب ح ء متوازى أضلاع فيه :

أ ح = ب ح

أثبت أن : أ ب مماسة للدائرة المارة برؤوس المثلث أ ح ء

---

٦٠ في الشكل المقابل : (البحيرة ٢٥ - البحيرة ٢٣ - مطروح ٢٢ - الشرقية ١٩ - المنوفية ١٨ - أسيوط ١٦)



أ ب ح مثلث مرسوم داخل دائرة

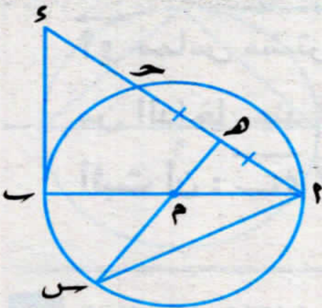
، أ ء مماس للدائرة عند أ ، س ∈ أ ب

، ص ∈ أ ح حيث س ص // ب ح

أثبت أن : أ ء مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، س ، ص

---

٦١ في الشكل المقابل : (المنوفية ١٧)



أ ب قطر فى الدائرة م ، هـ منتصف الوتر أ ح

، ب ء مماسة للدائرة م عند ب ، هـ م يقطع الدائرة م فى س

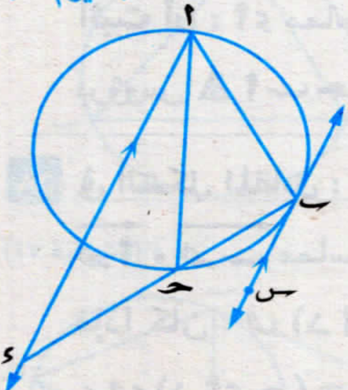
أثبت أن : [١] الشكل م هـ ء ب رباعى دائرى.

[٢] ق (∠ ب أ س) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ ء)

[٣] أ ب مماس للدائرة التى تمر بالنقط ب ، ح ، ء

---

٦٢ في الشكل المقابل : (الفيوم ١٦)



أ ب ح مثلث مرسوم داخل دائرة

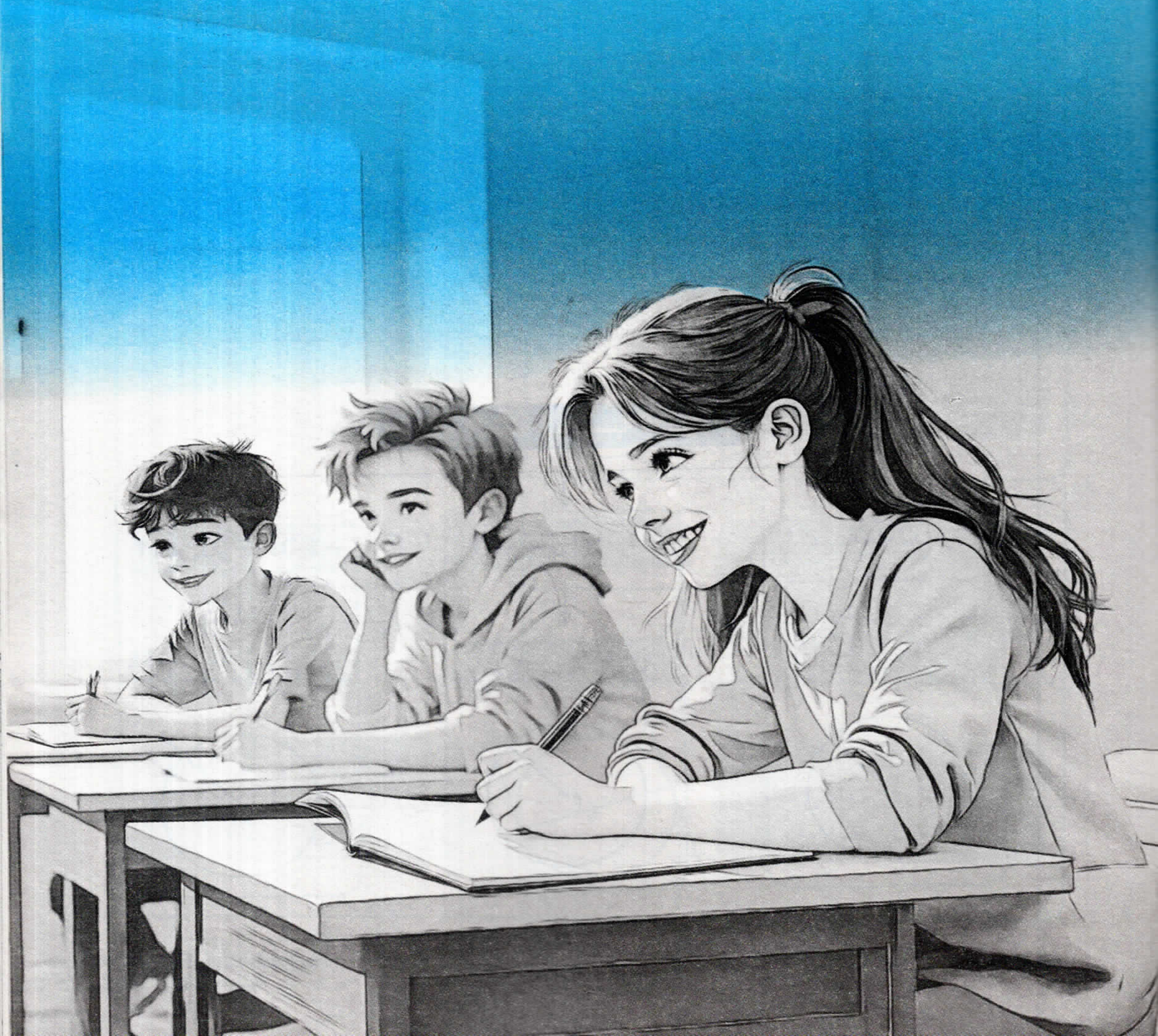
، ب س مماس للدائرة عند ب

، أ ء // ب س

أثبت أن : أ ب مماسة للدائرة المارة برؤوس △ أ ح ء

المراجعة النهائية

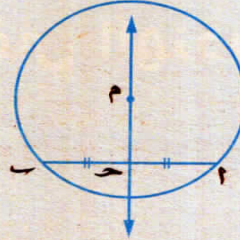
فى الهندسة





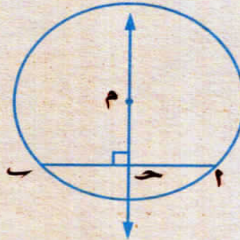
مراجعة سريعة لأهم النظريات والنتائج والقواعد فى الهندسة

المستقيم المار بمركز الدائرة وبمنتصف أى وتر (غير مار بالمركز) فيها يكون عموديًا على هذا الوتر.



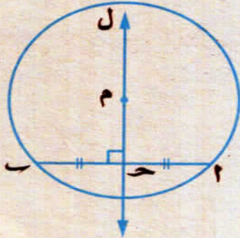
إذا كان : $\overline{أب}$ وترًا فى الدائرة م ، حـ منتصف $\overline{أب}$
فإن : $\overleftrightarrow{مح} \perp \overline{أب}$

المستقيم المار بمركز الدائرة عموديًا على أى وتر فيها ينصف هذا الوتر.



إذا كان : $\overline{أب}$ وترًا فى الدائرة م ، $\overleftrightarrow{مح} \perp \overline{أب}$ ، حـ $\in \overline{أب}$
فإن : حـ منتصف $\overline{أب}$

المستقيم العمودى على أى وتر فى الدائرة من منتصفه يمر بمركز هذه الدائرة.

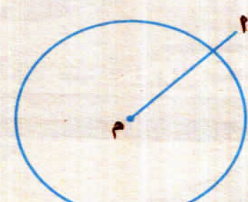


إذا كان : $\overline{أب}$ وترًا فى الدائرة م ، حـ منتصف $\overline{أب}$ ، ل $\perp \overline{أب}$ من نقطة حـ فإن : م $\in$ المستقيم ل

موضع النقطة أ بالنسبة للدائرة م

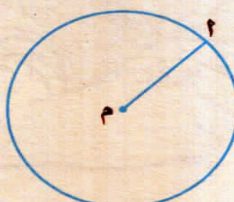
أ تقع خارج الدائرة م

إذا كان : م أ > نق



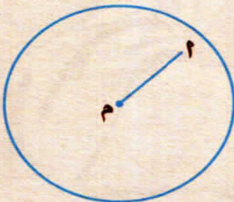
أ تقع على الدائرة م

إذا كان : م أ = نق

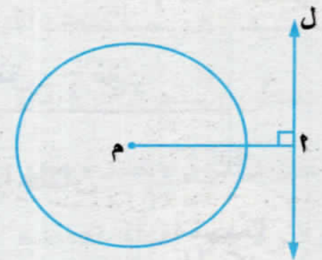
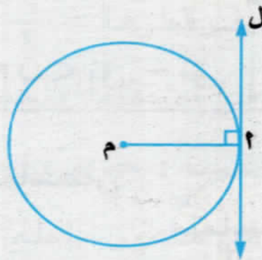
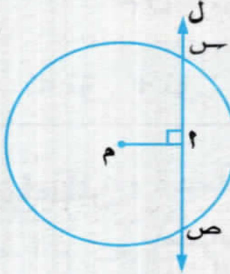


أ تقع داخل الدائرة م

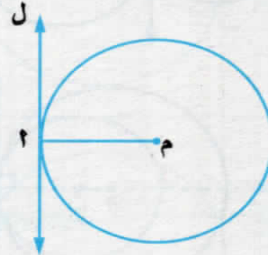
إذا كان : م أ < نق



موضع المستقيم ل بالنسبة للدائرة م والذى يبعد عن مركزها مسافة م أ

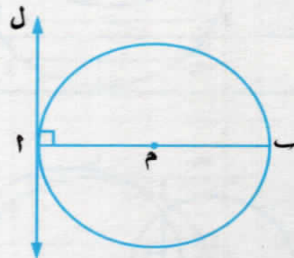
ل يقع خارج الدائرة م	ل يمس الدائرة م	ل يقطع الدائرة م
إذا كان : م أ > نق	إذا كان : م أ = نق	إذا كان : م أ < نق
		
• المستقيم ل ∩ الدائرة م = ∅ • المستقيم ل ∩ سطح الدائرة م = ∅	• المستقيم ل ∩ الدائرة م = {أ} • المستقيم ل ∩ سطح الدائرة م = {أ}	• المستقيم ل ∩ الدائرة م = {س ، ص} • المستقيم ل ∩ سطح الدائرة م = $\overline{\text{س ص}}$

المماس للدائرة يكون عموديًا على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس.



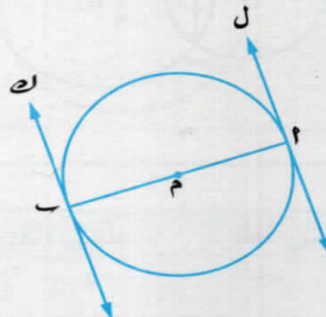
إذا كان : ل مماسًا للدائرة عند أ
فإن : $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ ل

المستقيم العمودى على قطر الدائرة من إحدى نهايتيه يكون مماسًا لها.



إذا كان : $\overline{\text{أ ب}}$ قطرًا فى الدائرة م
، ل ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ من نقطة أ
فإن : ل مماس للدائرة م عند أ

المماسان لدائرة المرسومان من نهايتى قطر فيها يكونان متوازيين.

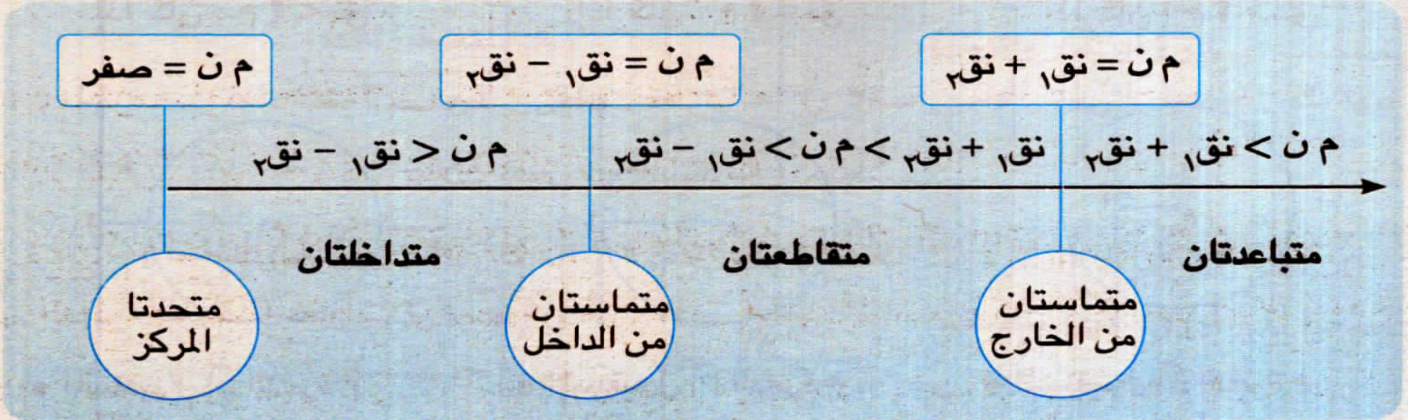


إذا كان : $\overline{\text{أ ب}}$ قطرًا فى الدائرة م
، ل ، ك مماسين لها عند أ ، ب
فإن : ل // ك

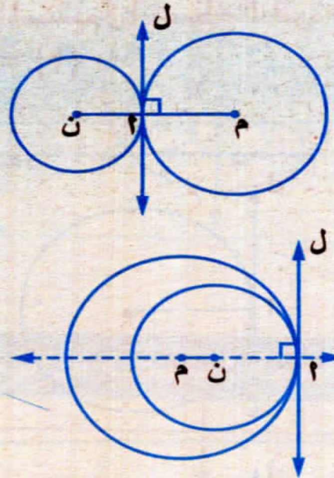
موضع الدائرة م بالنسبة للدائرة ن

لتحديد موضع الدائرة م (طول نصف قطرها نق$_1$) بالنسبة للدائرة ن (طول نصف قطرها نق$_2$)

، نوجد : نق$_1$ − نق$_2$ ، نق$_1$ + نق$_2$ ثم نستخدم المخطط التالي لتحديد الموضع. (حيث نق$_1$ > نق$_2$)



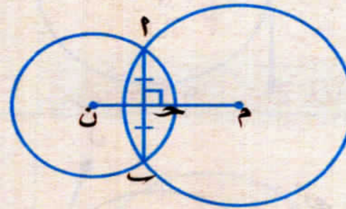
خط المركزين لدائرتين متماستين يمر بنقطة التماس ، ويكون عموديًا على المماس المشترك عند هذه النقطة.



إذا كانت : الدائرتان م ، ن متماستين عند نقطة أ ، ل مماسًا مشتركًا لهما عند أ

فإن : $\overleftrightarrow{م ن} \perp$ المستقيم ل

خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديًا على الوتر المشترك وينصفه.



إذا كانت : م ، ن دائرتين متقاطعتين في أ ، ب

فإن : $\overleftrightarrow{م ن} \perp \overline{أ ب}$ ، أ حـ = ب حـ

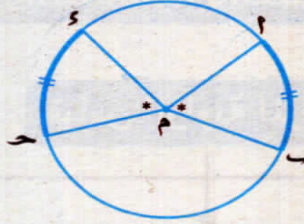
($\overleftrightarrow{م ن}$ محور تماثل $\overline{أ ب}$)

ملاحظات على تعيين الدائرة

- يمكن رسم عدد لا نهائى من الدوائر تمر بنقطة معلومة.
- يمكن رسم عدد لا نهائى من الدوائر تمر بنقطتين مثل أ ، ب
ومراكز هذه الدوائر تقع جميعها على محور $\overline{أب}$
- أصغر دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب هى الدائرة التى تكون $\overline{أب}$ قطرًا فيها
ومركزها هو منتصف $\overline{أب}$ وطول نصف قطرها = $\frac{1}{2}$ أب
- لا يمكن رسم دائرة تمر بثلاث نقط على استقامة واحدة.
- توجد دائرة وحيدة تمر بثلاث نقط أ ، ب ، حـ ليست على استقامة واحدة ومركز هذه الدائرة هو نقطة تقاطع أى محورين من محاور القطع المستقيمة $\overline{أب}$ ، $\overline{بحـ}$ ، $\overline{أحـ}$

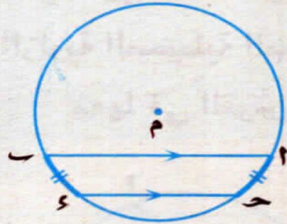
تساوى الأقواس فى القياس والطول

فى الدائرة الواحدة (أو فى الدوائر المتطابقة) الأقواس المتساوية فى القياس متساوية فى الطول ، والعكس صحيح.



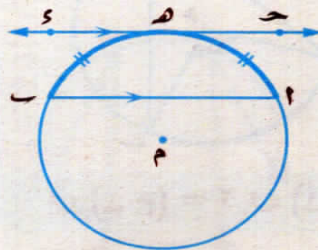
إذا كان : ق ($\overset{\frown}{أب}$) = ق ($\overset{\frown}{حـء}$)
فإن : طول $\overset{\frown}{أب}$ = طول $\overset{\frown}{حـء}$ ، والعكس صحيح.

الوتران المتوازيان فى الدائرة يحصران قوسين متساويين فى القياس.



إذا كان : $\overline{أب}$ // $\overline{حـء}$
فإن : ق ($\overset{\frown}{أحـ}$) = ق ($\overset{\frown}{بء}$)

القوسان المحصوران بين وتر ومماس يوازيه فى الدائرة متساويان فى القياس.



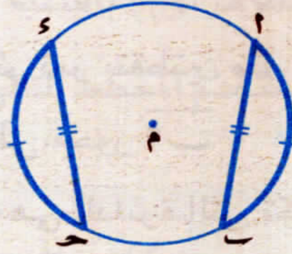
إذا كان : $\overleftrightarrow{حـء}$ // $\overline{أب}$
فإن : ق ($\overset{\frown}{هـأ}$) = ق ($\overset{\frown}{هـب}$)

لاحظ أن :

$$\frac{\text{قياس القوس}}{°٣٦٠} = \frac{\text{طول القوس}}{٢\ \pi\ \text{نق}}$$

تساوى وترين فى الطول

فى الدائرة الواحدة (أو فى الدوائر المتطابقة) الأقواس المتساوية فى القياس أوتارها متساوية فى الطول ، والعكس صحيح.

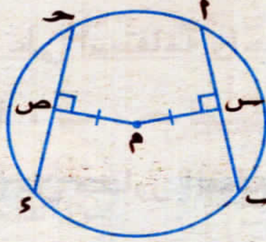


إذا كان : ق (أب⌒) = ق (حـ ء⌒)

فإن : أب = حـ ء

، والعكس صحيح.

فى الدائرة الواحدة (أو فى الدوائر المتطابقة) الأوتار المتساوية فى الطول على أبعاد متساوية من مركزها ، والعكس صحيح.



إذا كان : أب = حـ ء

، م س ⊥ أب ، م ص ⊥ حـ ء

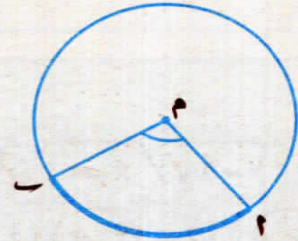
فإن : م س = م ص

، والعكس صحيح.

الزوايا المركزية والمحيطية والمماسية والعلاقات بينهم

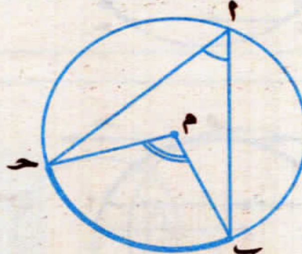
قياس الزاوية المركزية

يساوى قياس القوس المقابل لها.



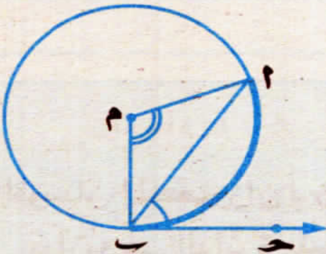
ق (∠ م) = ق (أب⌒)

يساوى ضعف قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى القوس.



ق (∠ م) = ٢ ق (∠ أ)

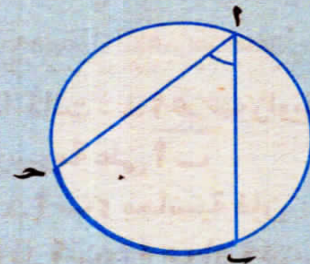
يساوى ضعف قياس الزاوية المماسية المشتركة معها فى القوس.



ق (∠ م) = ٢ ق (∠ أ ب حـ)

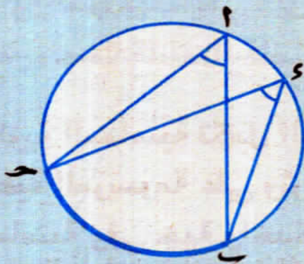
قياس الزاوية المحيطية

يساوى نصف قياس القوس المقابل لها.



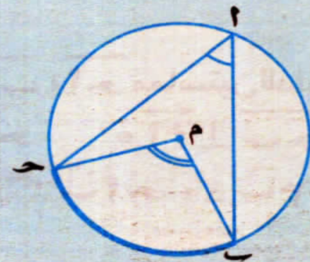
ق (∠ أ) = $\frac{1}{2}$ ق (⌒ب حـ)

يساوى قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى القوس.



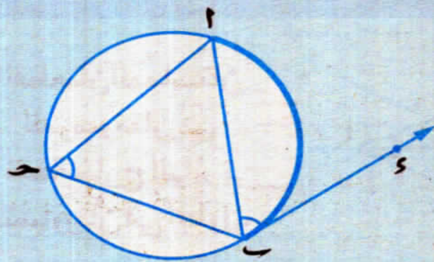
ق (∠ أ) = ق (∠ ء)

يساوى نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس.



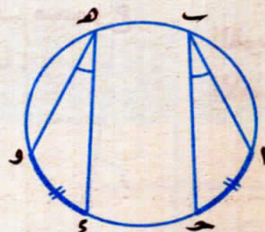
ق (∠ أ) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ م)

يساوى قياس الزاوية المماسية المشتركة معها فى القوس.



ق (∠ حـ) = ق (∠ أ ب ء)

فى الدائرة الواحدة (أو فى عدة دوائر) الزوايا المحيطية التى تحصر أقواسًا متساوية فى القياس تكون متساوية فى القياس ، والعكس صحيح.

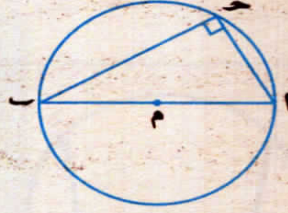


إذا كان : ق (⌒أ حـ) = ق (⌒ء و)

فإن : ق (∠ ب) = ق (∠ هـ)

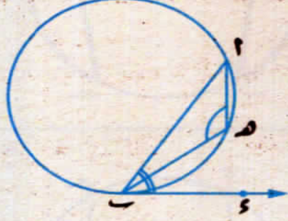
، والعكس صحيح.

الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة قائمة.



إذا كان : $\overline{\text{أب}}$ قطرًا
فإن : ق(∠ حـ) = ٩٠°

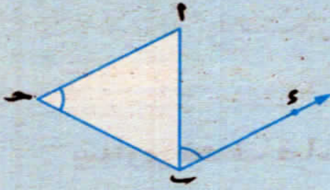
الزاوية المماسية تكمل الزاوية المحيطية المرسومة على وتر الزاوية المماسية وفى جهة واحدة منه.



إذا كانت : ∠ أ هـ ب زاوية محيطية مرسومة على $\overline{\text{أب}}$
، ∠ أ ب ء مماسية فإن :
ق(∠ أ ب ء) + ق(∠ أ هـ ب) = ١٨٠°

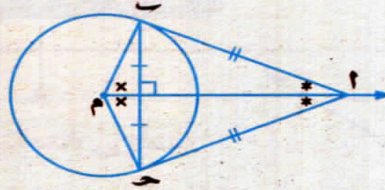
لاحظ أنه :

لإثبات أن $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ مماس للدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ
نثبت أن : ق(∠ أ ب ء) = ق(∠ أ حـ ب)



العلاقة بين المماسات فى الدائرة

القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج الدائرة متساويتان فى الطول.

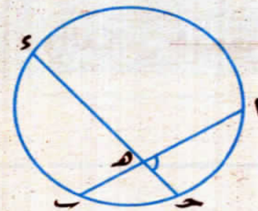


إذا كانت : $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أحـ}}$ مماستين للدائرة م فإن :
- أ ب = أ حـ
- $\overleftrightarrow{\text{أم}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$ وينصفه
- $\overleftrightarrow{\text{أم}}$ ينصف ∠ ب أ حـ ، ∠ ب م حـ

تمارين مشهورة

تمرين مشهور (١)

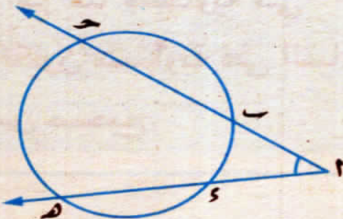
إذا تقاطع وتران فى نقطة داخل دائرة ، فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوى نصف مجموع قياسى القوسين المقابلين لها.



ق(∠ أ هـ حـ) = $\frac{1}{2}$ [ق($\frown$أحـ) + ق($\frown$ب ء)]

تمرين مشهور (٢)

إذا تقاطع شعاعان حاملان لوترين فى دائرة خارجها ، فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوى نصف قياس القوس الأكبر مطروحًا منه نصف قياس القوس الأصغر اللذين يحصرهما ضلعا هذه الزاوية.

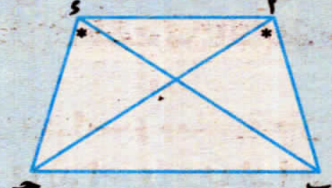


ق(∠ أ) = $\frac{1}{2}$ [ق($\frown$حـ هـ) - ق($\frown$ب ء)]

الشكل الرباعى الدائرى

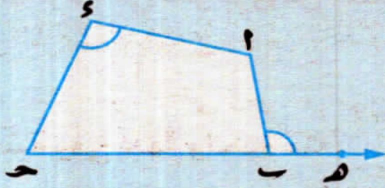
متى يكون الشكل الرباعى دائريًا

إذا وُجدت زاويتان متساويتان فى القياس ومرسومتان على ضلع من أضلاعه كقاعدة وفى جهة واحدة من هذا الضلع.



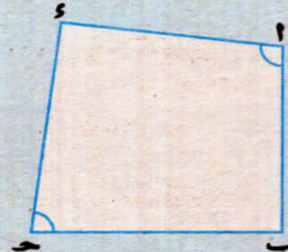
إذا كان : ق (∠ب أ حـ) = ق (∠ب ء حـ)

إذا وُجدت زاوية خارجة عند أى رأس من رؤوس الشكل الرباعى قياسها يساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها.



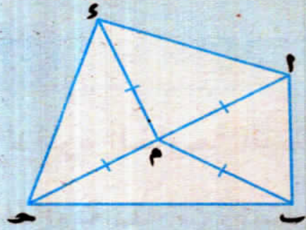
إذا كان : ق (∠ أ ب هـ) = ق (∠ ء)

إذا وُجدت زاويتان متقابلتان متكاملتان.



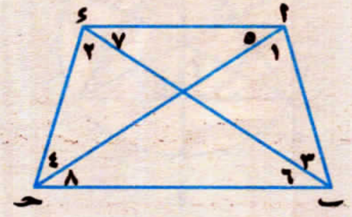
إذا كان : ق (∠ أ) + ق (∠ حـ) = ١٨٠°

إذا وُجدت نقطة فى مستوى الشكل الرباعى تكون على أبعاد متساوية من رؤوسه.

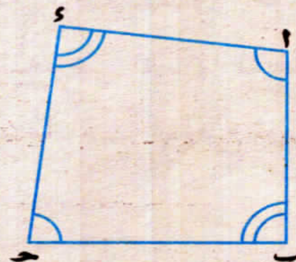


إذا كان : م أ = م ب = م حـ = م ء

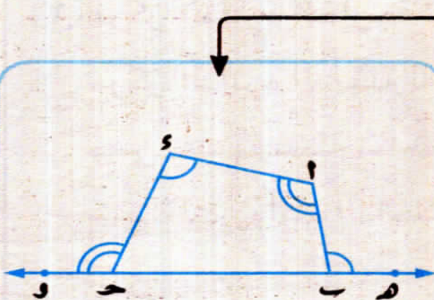
خواص الشكل الرباعى الدائرى



- ق (∠ ١) = ق (∠ ٢)
- ق (∠ ٣) = ق (∠ ٤)
- ق (∠ ٥) = ق (∠ ٦)
- ق (∠ ٧) = ق (∠ ٨)



- ق (∠ أ) + ق (∠ حـ) = ١٨٠°
- ق (∠ ب) + ق (∠ ء) = ١٨٠°

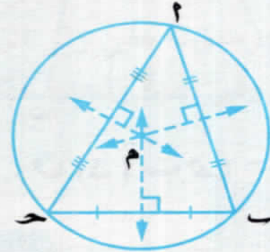


- ق (∠ أ ب هـ) = ق (∠ ء)
- ق (∠ ء حـ و) = ق (∠ أ)

الدائرة الخارجة والداخلة للمثلث

الدائرة الخارجة للمثلث

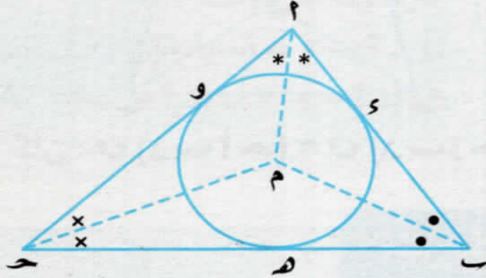
هى الدائرة التى تمر برؤوس المثلث



ومركزها هو نقطة تقاطع الأعمدة المقامة على أضلاع المثلث من منتصفاتها

الدائرة الداخلة للمثلث

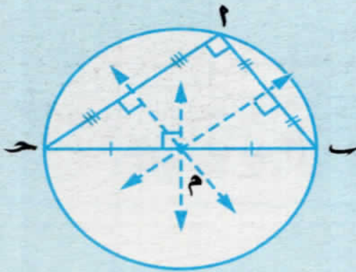
هى الدائرة التى تمس أضلاع المثلث من الداخل



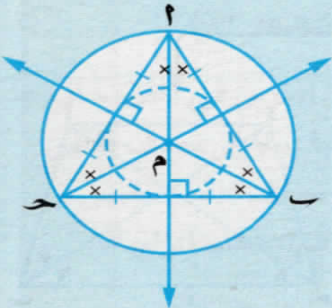
ومركزها هو نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة

لاحظ أن :

(١) مركز الدائرة الخارجة للمثلث القائم الزاوية يقع فى منتصف الوتر.



(٢) مركز الدائرة الخارجة للمثلث المتساوى الأضلاع هو نفسه مركز الدائرة الداخلة له وهو نقطة تقاطع محاور أضلاعه وهى نفسها نقطة تقاطع متوسطاته وهى نفسها نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة وهى نفسها نقطة تقاطع ارتفاعاته.

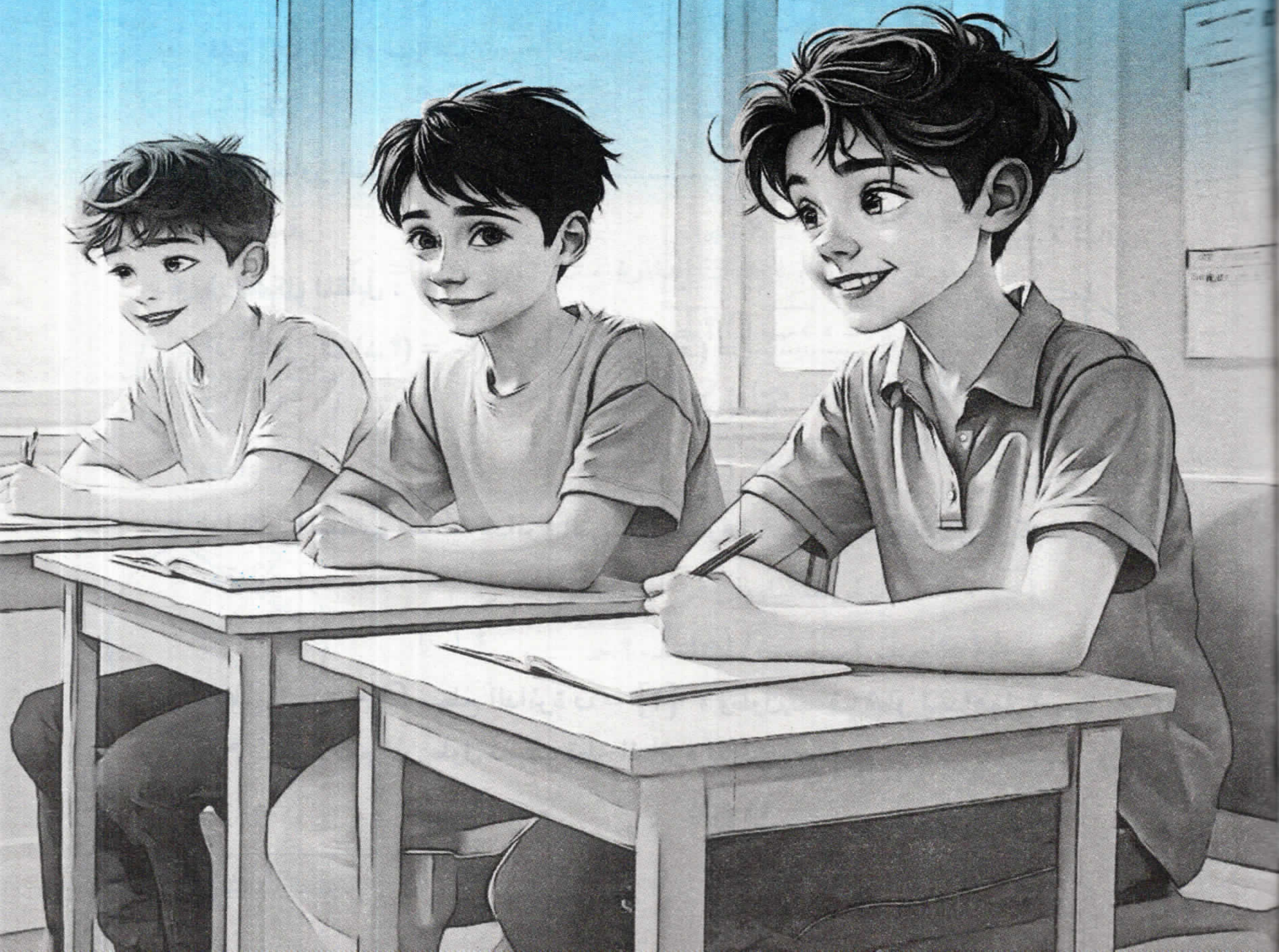


(٣) يمكن رسم دائرة تمر برؤوس كل من المستطيل والمربع وشبه المنحرف المتساوى الساقين بينما لا يمكن رسم دائرة تمر برؤوس متوازى الأضلاع والمعين وشبه المنحرف غير المتساوى الساقين.

الامتحانات النهائية

فى الهندسة

- نماذج امتحانات الكتاب المدرسى.
- امتحانات بعض المحافظات.





نماذج امتحانات الكتاب المدرسى فى الهندســـة

نمـــوذج ١

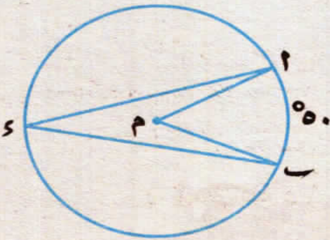
أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة ....

(أ) حادة. (ب) منفرجة. (جـ) مستقيمة. (د) قائمة.

٢ فى الشكل المقابل :



دائرة مركزها م

إذا كان : ق (⌒أب) = ٥٠°

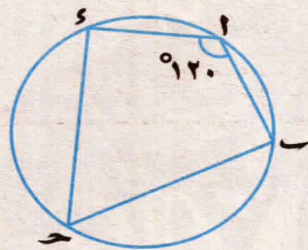
فإن : ق (∠ أ ء ب) = ...

(أ) ٢٥° (ب) ٥٠° (جـ) ١٠٠° (د) ١٥٠°

٣ عدد محاور التماثل لأى دائرة هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى.

٤ فى الشكل المقابل :



إذا كان : ق (∠ أ) = ١٢٠° فإن : ق (∠ حـ) = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٩٠°

(جـ) ١٢٠° (د) ١٨٠°

٥ إذا كان المستقيم مماسًا للدائرة التى طول قطرها ٨ سم فإنه يبعد عن مركزها بمقدار .... سم.

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

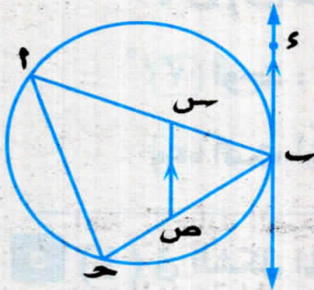
٦ سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = {أ} ، وطول نصف قطر إحداهما ٣ سم ، م ن = ٨ سم فإن طول نصف قطر الدائرة الأخرى يساوى .... سم.

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ١١ (د) ١٦

٢ **(أ) أكمل مع البرهان :**

إذا كان الشكل الرباعى دائريًا فإن كل زاويتين متقابلتين ....

(ب) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة

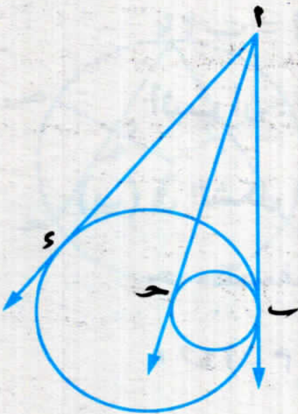
، ب ء مماس للدائرة عند ب

، س ∈ أ ب ، ص ∈ ب حـ حيث س ص // ب ء

أثبت أن : الشكل أ س ص حـ رباعى دائرى.

---

٣ **(أ) فى الشكل المقابل :**



دائرتان متماستان فى نقطة ب ، أ ب مماس مشترك للدائرتين

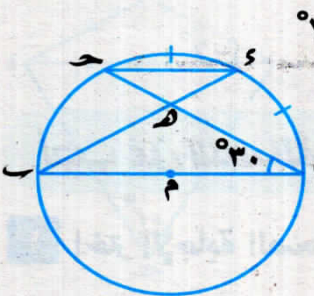
، أ حـ مماس للصغرى ، أ ء مماس للكبرى

، أ حـ = ١٥ سم ، أ ب = (٢ س − ٣) سم

، أ ء = (ص − ٢) سم

أوجد كلًا من : س ، ص

(ب) فى الشكل المقابل :



أ ب قطر فى دائرة م ، حـ ∈ الدائرة ، ق (∠ حـ أ ب) = ٣٠°

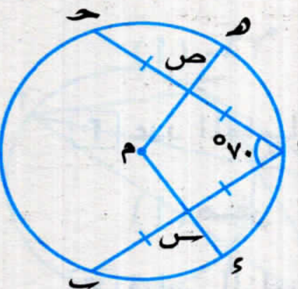
، ء منتصف أ حـ ، ء ب ∩ أ حـ = {هـ}

١ أوجد : ق (∠ ب ء حـ) ، ق (أ ء)

٢ أثبت أن : أ ب // حـ ء

---

٤ **(أ) فى الشكل المقابل :**



أ ب ، أ حـ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة م

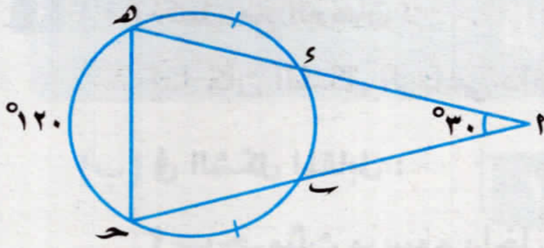
، س منتصف أ ب ، ص منتصف أ حـ

، ق (∠ حـ أ ب) = ٧٠°

١ أوجد : ق (∠ ء م هـ)

٢ أثبت أن : س ء = ص هـ

(ب) في الشكل المقابل :



ق (∠ أ) = ٣٠° ، ق (هـ حـ⌢) = ١٢٠°

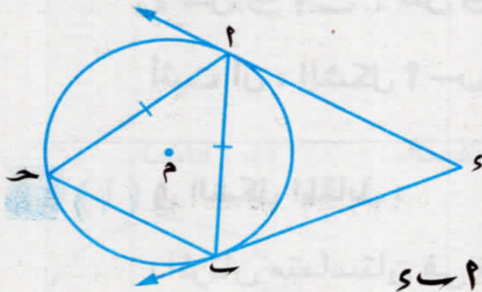
، ق (ب حـ⌢) = ق (ء هـ⌢)

[١] أوجد : ق (ب ء⌢) الأصغر.

[٢] أثبت أن : أ ب = أ ء

---

٥ **(أ)** في الشكل المقابل :

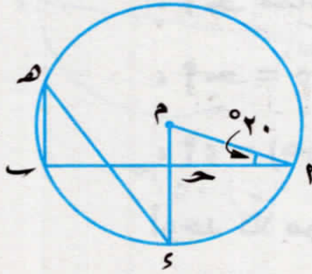


ء أ ، ء ب مماسان للدائرة م

، أ ب = أ حـ

أثبت أن : أ حـ مماس للدائرة المارة برءوس المثلث أ ب ء

(ب) في الشكل المقابل :



حـ منتصف أ ب ، م حـ ∩ الدائرة م = {ء}

، ق (∠ م أ ب) = ٢٠°

أوجد : ق (∠ ب هـ ء) ، ق (أ ء ب⌢)

نموذج ٢

أجب عن الأسئلة الآتية : *(يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)*

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] قياس القوس الذى يمثل نصف قياس الدائرة يساوى ....

(أ) ٣٦٠° (ب) ١٨٠° (جـ) ١٢٠° (د) ٩٠°

[٢] عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستين من الخارج يساوى ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

[٣] قياس الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة يساوى ....

(أ) ٤٥° (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٨٠°

٤ الزاوية المماسية هى زاوية محصورة بين ....

(أ) وترين. (ب) مماسين. (جـ) وتر ومماس. (د) وتر وقطر.

٥ ابجـء شكل رباعى دائرى فيه : ق (∠ا) = ٦٠° فإن : ق (∠جـ) = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٣٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

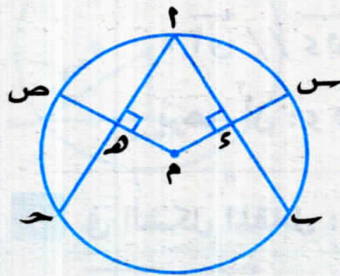
٦ دائرتان م ، ن متماستان من الداخل طولا نصفى قطريهما ٥ سم ، ٩ سم

فإن : م ن = ... سم.

(أ) ١٤ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٩

---

٢ (أ) فى الشكل المقابل :



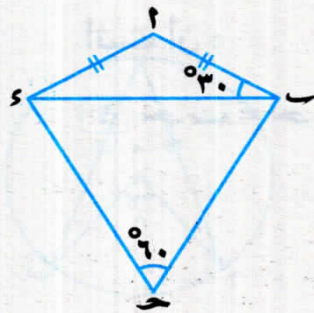
اب = اجـ

، مء ⊥ اب

، مهـ ⊥ اجـ

أثبت أن : سء = ص هـ

(ب) فى الشكل المقابل :



ابجـء شكل رباعى فيه : اب = اء

، ق (∠اب ء) = ٣٠°

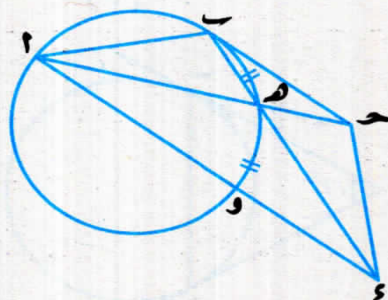
، ق (∠جـ) = ٦٠°

أثبت أن : الشكل ابجـء رباعى دائرى.

---

٣ (أ) اذكر حالتين يكون فيهما الشكل الرباعى دائريًا.

(ب) فى الشكل المقابل :

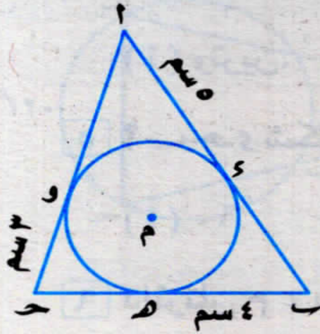


بجـ مماسة للدائرة عند ب

، هـ منتصف ب⌒و

أثبت أن : ابجـء رباعى دائرى.

٤ **(أ) فى الشكل المقابل :**



المثلث أ ب حـ مرسوم خارج الدائرة م التى تمس أضلاعه

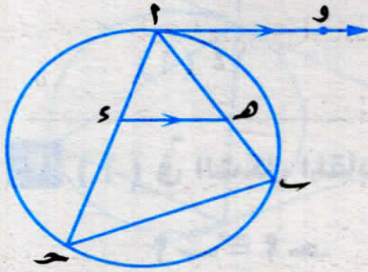
، $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ فى ء ، هـ ، و على الترتيب

، أ ء = ٥ سم ، ب هـ = ٤ سم

، حـ و = ٣ سم

أوجد : محيط المثلث أ ب حـ

(ب) فى الشكل المقابل :



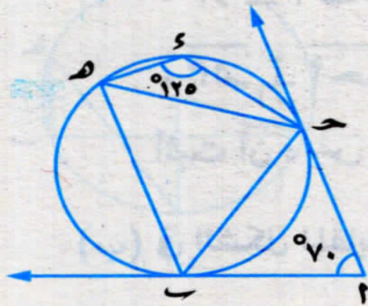
$\overleftarrow{\text{أ و}}$ مماس للدائرة عند أ

، $\overleftarrow{\text{أ و}}$ // $\overline{\text{ء هـ}}$

برهن أن : ء هـ ب حـ شكل رباعى دائرى.

---

٥ **فى الشكل المقابل :**



$\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$ مماسان للدائرة عند ب ، حـ

، ق (∠ أ) = ٧٠°

، ق (∠ حـ ء هـ) = ١٢٥°

أثبت أن :

١ حـ ب = حـ هـ

٢ $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$ // $\overline{\text{ب هـ}}$

نموذج امتحان للطلاب المدمجين

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

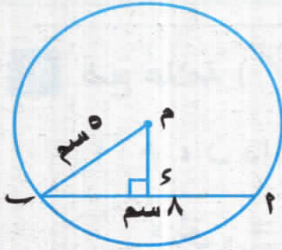
١ أكمل العبارات الآتية :

١ أكبر الأوتار طولًا فى الدائرة يسمى ....

٢ المستقيم المار بمركز الدائرة وبمنتصف أى وتر فيها يكون ....

٣ القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج الدائرة ....فى الطول.

٤ فى الشكل المقابل :



طول $\overline{مء}$ = ... سم.

٥ يوجد للدائرة عدد .... من محاور التماثل.

٦ إذا كان : $\overline{أحـ}$ قطرًا فى الدائرة م فإن : ق $(\overset{\frown}{أحـ})$ = ...°

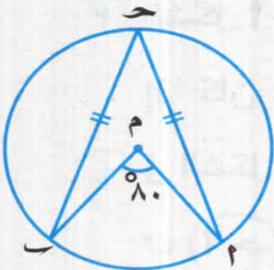
---

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كانت النقطة أ ∋ الدائرة م التى طول قطرها ٦ سم فإن : م أ = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

٢ فى الشكل المقابل :



ق (∠ أ حـ ب) = ...

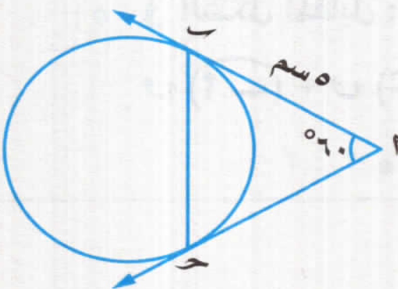
(أ) ٤٠° (ب) ٨٠°

(جـ) ٩٠° (د) ١٨٠°

٣ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتين هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

٤ فى الشكل المقابل :



طول $\overline{بحـ}$ = ... سم.

(أ) ٣ (ب) ٤

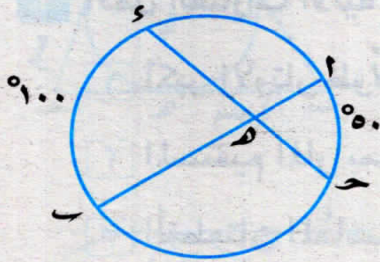
(جـ) ٥ (د) ٦

٥ عدد الدوائر التى يمكن رسمها وتمر بطرفى القطعة المستقيمة $\overline{\text{أب}}$ يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢

(جـ) ٣ (د) عدد لا نهائى.

٦ فى الشكل المقابل :



ق (∠ أ هـ حـ) = ...

(أ) ٢٥° (ب) ٥٠°

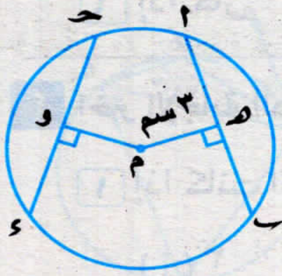
(جـ) ٧٥° (د) ١٠٠°

---

٣ ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (✗) أمام العبارة الخطأ :

١ م ، ن دائرتان متماستان من الخارج طولا نصفى قطريهما بالترتيب نق$_1$ = ٥ سم ، نق$_2$ = ٣ سم فإن : م ن = ١٥ سم ( )

٢ فى الشكل المقابل :



أب = حـء ، $\overline{\text{مهـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{مو}}$ ⊥ $\overline{\text{حـء}}$

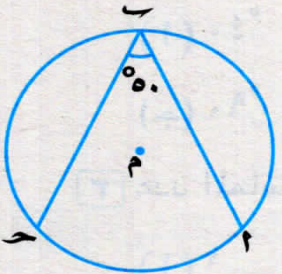
فإذا كان : م هـ = ٣ سم

فإن : م و = ٣ سم ( )

٣ الشكل أبحـء يكون رباعيًا دائريًا

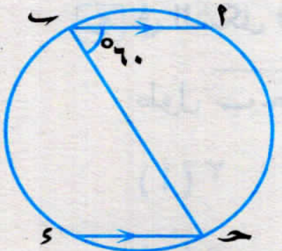
إذا كان : ق (∠ أ) + ق (∠ حـ) = ٩٠° ( )

٤ فى الشكل المقابل :



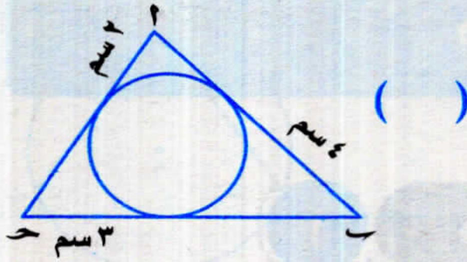
ق ($\overset{\frown}{\text{أحـ}}$) = ١٠٠° ( )

٥ فى الشكل المقابل :



ق ($\overset{\frown}{\text{أب}}$) + ق ($\overset{\frown}{\text{حـء}}$) = ٣٠٠° ( )

٦ فى الشكل المقابل :



محيط Δ أ ب حـ = ٩ سم ( )

٤ صل من العمود (أ) بما يناسبه من العمود (ب) :

العمود (أ)	العمود (ب)
١ قياس الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة يساوى	• ١٣٠°
٢ فى الشكل المقابل : ق (∠ أ) = ... (شكل: ء، أ، ب، حـ، هـ، ١٣٠°)	• ٩٠°
٣ فى الشكل المقابل : $\overleftarrow{بء}$ مماس للدائرة عند ب ، ق (∠ ء ب حـ) = ١٤٠° فإن : ق (∠ أ) = ... (شكل: حـ، أ، ب، ء، ١٤٠°)	• ٣٠°
٤ طول نصف قطر الدائرة المارة برءوس مثلث قائم الزاوية طول وتره ١٠ سم يساوى .... سم	• ٥
٥ فى الشكل المقابل : Δ م أ ب متساوى الأضلاع ، $\overleftarrow{بحـ}$ مماس للدائرة عند ب فإن : ق (∠ أ ب حـ) = ... (شكل: م، أ، ب، حـ)	• ٤٠°
٦ النسبة بين قياسى الزاويتين المركزية والمحيطية المشتركتين فى نفس القوس فى دائرة واحدة هى	• ٢ : ١



امتحانات بعض المحافظات فى الهندسة



١ محافظة القاهـرة

أجب عن الأسئلة الآتية :

المجموعة الأولى

◄ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ فى المثلث ؟ ب حـ إذا كان : $(؟حـ)^{٢} > (؟ب)^{٢} + (ب حـ)^{٢}$

فإن : ∠ب تكون ....

(أ) قائمة. (ب) منفرجة. (جـ) حادة. (د) مستقيمة.

٢ مجموعة نقط الدائرة ∪ مجموعة النقط داخل الدائرة تسمى .... الدائرة.

(أ) محيط (ب) قطر (جـ) وتر (د) سطح

٣ قياس الزاوية المحيطية .... قياس القوس المقابل لها.

(أ) ضعف (ب) نصف (جـ) ثلث (د) يساوى

٤ الزاويتان المتكاملتان المتساويتان فى القياس قياس كل منهما يساوى ....°

(أ) ٩٠ (ب) ٦٠ (جـ) ٤٥ (د) ٣٠

٥ إذا كانت النقطة س تقع على الدائرة م ، م س = ٤ سم فإن طول نصف قطر الدائرة م يساوى .... سم.

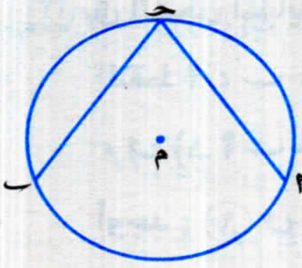
(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٦

٦ إذا كان : ؟ب حـ ء شكلاً رباعياً دائرياً فإن : ق(∠؟) + ق(∠حـ) − ١٢٠° = ...°

(أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (جـ) ١٢٠ (د) ٢٤٠

٧ إذا كان : ؟ب = ١٠ سم فإن محيط أصغر دائرة تمر بالنقطتين ؟ ، ب يساوى .... سم.

(أ) ١٠ (ب) ٢٥ (جـ) ١٠ π (د) ٢٥ π



٨ في الشكل المقابل :

ق (∠ أ حـ ب) المحيطية المقابلة للقوس $\overset{\frown}{أب}$ الأصغر

يمكن أن يساوى ....°

(أ) ١٠٠ (ب) ٩٥

(جـ) ٩٠ (د) ٧٠

٩ إذا كان : $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ وترين فى دائرة ، أب = ٥ سم ، أحـ = ٣ سم

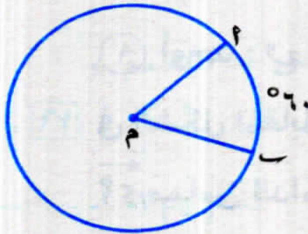
فإن بعد الوتر $\overline{أب}$ عن مركز الدائرة .... بعد الوتر $\overline{أحـ}$ عن مركز الدائرة.

(أ) > (ب) ≤ (جـ) = (د) <

المجموعة الثانية

◄ أجب عن جميع الأسئلة الآتية موضحًا خطوات الحل :

١٠ في الشكل المقابل :



دائرة م طول نصف قطرها ٢١ سم ، ق ($\overset{\frown}{أب}$) = °٦٠

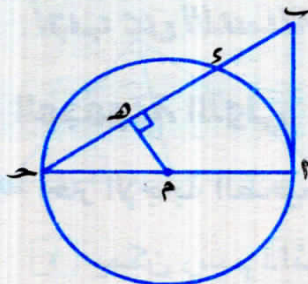
أوجد : (١) ق (∠ أ م ب)

(٢) طول $\overset{\frown}{أب}$ [اعتبر π = $\frac{٢٢}{٧}$]

١١ دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما على الترتيب ١٠ سم ، ٥ سم ، فحدد وضع كل منهما بالنسبة للأخرى فى كل من الحالتين الآتيتين :

(١) م ن = ١٦ سم (٢) م ن = ٢ سم

١٢ في الشكل المقابل :



$\overline{أحـ}$ قطر فى الدائرة م ، $\overline{أب}$ مماسة لها عند أ

، $\overline{بحـ}$ تقطع الدائرة فى ء ، $\overline{مهـ}$ ⊥ $\overline{بحـ}$

(١) أثبت أن : الشكل أ ب هـ م رباعى دائرى.

(٢) إذا كان : ء حـ = ٧ سم أوجد : طول $\overline{ءهـ}$

١٣ في الشكل المقابل :

النقط ٢ ، ب ، حـ تقع على الدائرة م

، ق (∠ ٢ ب حـ) = ٤٠°

أوجد : ① ق (∠ ٢ م حـ) ② ق (∠ ٢ حـ م)

١٤ في الشكل المقابل :

٢ب ، ٢حـ مماستان للدائرة ن عند ء ، هـ

، للدائرة م عند ب ، حـ ، هـ حـ = ٥ سم

، ٢ء = ب م = ٤ سم

أوجد : ① طول ءب ② محيط الشكل الرباعي ٢ ب م حـ

١٥ في الشكل المقابل :

٢ ب حـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة

، هـ ∈ ٢ب ، ء حـ = ء ٢

، ق (∠ حـ ب هـ) = ٦٠°

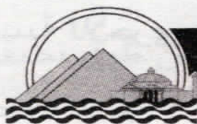
① أوجد : ق (∠ ٢ ء حـ) ② أثبت أن : المثلث ٢ حـ ء متساوي الأضلاع.

١٦ في الشكل المقابل :

٢ء مماس للدائرة عند ٢ ، ق (حـب⌒) = ١٢٠°

، ق (∠ ٢ ب حـ) = ٧٠°

أوجد : ق (∠ ب ٢ ء)



٢ محافظة الجيـزة

أجب عن الأسئلة الآتية :

المجموعة الأولى

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ يمكن رسم دائرة تمر برؤوس ....

(أ) معين. (ب) مربع.

(جـ) متوازي أضلاع. (د) شبه منحرف.

٢ دائرة م طول نصف قطرها ٨ سم تمس الدائرة ن من الداخل فإذا كان م ن = ٣ سم فإن طول نصف قطر الدائرة ن = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) ١٣

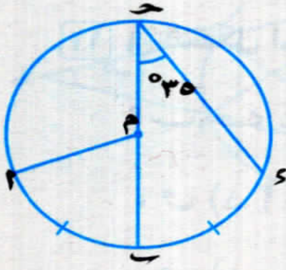
٣ إذا كان أ ب جـ ء شكلاً رباعياً دائرياً فإن : ق (∠ أ) + ق (∠ جـ) = ٨٠° + ...°

(أ) ١٨٠ (ب) ١٠٠ (جـ) ٩٠ (د) صفر

٤ الزاوية المحيطية التى تقابل قوساً أكبر فى الدائرة تكون ....

(أ) حادة. (ب) قائمة. (جـ) منفرجة. (د) منعكسة.

٥ فى الشكل المقابل :



ب منتصف $\overset{\frown}{أ ء}$ ، ق (∠ ب جـ ء) = ٣٥°

فإن : ق (∠ أ م ب) = ...°

(أ) ٣٥ (ب) ٧٠

(جـ) ١٤٠ (د) ٩٠

٦ إذا كان المستقيم ل مماساً للدائرة م عند أ بحيث كان م أ = (٢ س + ٣) سم ، طول قطر الدائرة = ١٤ سم فإن : س = ...

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) ١ (د) ٢

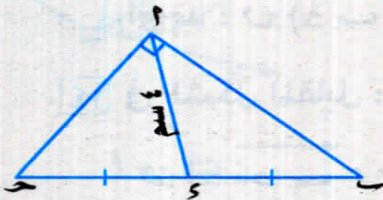
٧ الزاوية التى قياسها ٥٠° تكمل زاوية قياسها ....°

(أ) ١٣٠ (ب) ٤٠ (جـ) ٣١٠ (د) ٦٠

٨ قياس القوس الذى يمثل $\frac{١}{٣}$ قياس الدائرة يساوى ....°

(أ) ٦٠ (ب) ٩٠ (جـ) ١٢٠ (د) ٢٤٠

٩ فى الشكل المقابل :



△ أ ب جـ قائم الزاوية فى أ

، ء منتصف $\overline{ب جـ}$

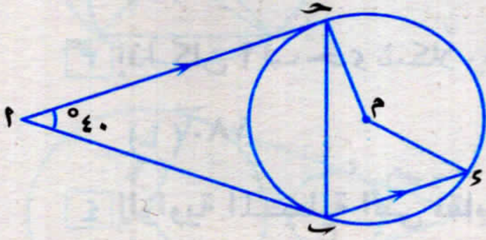
حيث أ ء = ٤ سم فإن : ب جـ = ... سم.

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٠

المجموعة الثانية

◄ أجب عن الأسئلة الآتية :

١٠ في الشكل المقابل :



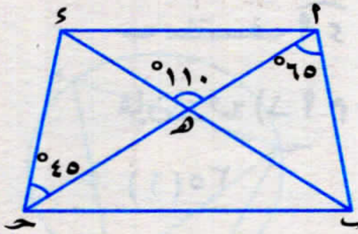
$\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ مماستان للدائرة م

، ق (∠ب أ حـ) = ٤٠°

، $\overline{أحـ}$ // $\overline{ب ء}$

① أثبت أن : $\overleftarrow{ب حـ}$ ينصف ∠ أ ب ء ② أوجد : ق (∠ حـ م ء)

١١ في الشكل المقابل :

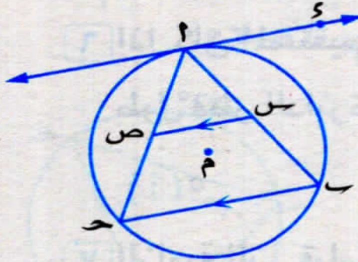


أ ب حـ ء شكل رباعي تقاطع قطراه في هـ

، ق (∠ أ حـ ء) = ٤٥° ، ق (∠ أ هـ ء) = ١١٠°

، ق (∠ب أ حـ) = ٦٥° أثبت أن : أ ب حـ ء رباعي دائري.

١٢ في الشكل المقابل :

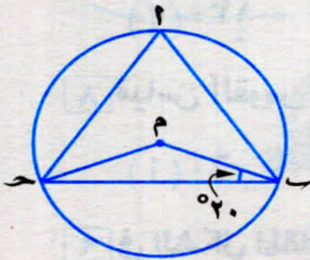


$\overleftrightarrow{أء}$ مماس للدائرة م عند أ ، $\overline{س ص}$ // $\overline{ب حـ}$

أثبت أن :

$\overleftrightarrow{أء}$ مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، س ، ص

١٣ في الشكل المقابل :

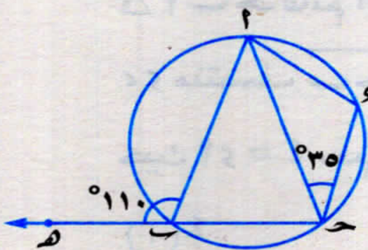


Δ أ ب حـ مرسوم داخل دائرة م

، ق (∠ م ب حـ) = ٢٠°

أوجد : ق (∠ب أ حـ)

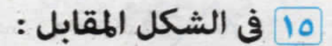
١٤ في الشكل المقابل :



هـ ∈ $\overleftarrow{حـ ب}$ ، ق (∠ أ ب هـ) = ١١٠°

، ق (∠ أ حـ ء) = ٣٥°

أثبت أن : ق ($\overset{\frown}{أء}$) = ق ($\overset{\frown}{حـ ء}$)



١٥ في الشكل المقابل :

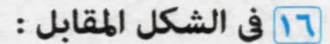
$\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ وتران متساويان في الطول في الدائرة م

، $\overline{مء} \perp \overline{أب}$ ، هـ منتصف $\overline{أحـ}$

فإذا كان مء = ٦ سم

، هـ س = ٨ سم ، ق (∠ حـ أ ب) = ٤٦°

① أوجد : ق (∠ هـ م ء) ② أوجد : محيط الدائرة م (حيث $\pi = \frac{٢٢}{٧}$)



١٦ في الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{حـ ء} = \{هـ\}$ ، ق (∠ هـ أ ء) = ٢٢°

، ق (∠ أ هـ حـ) = ٣٠°

أوجد : ق ($\overset{\frown}{أحـ}$)

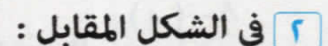


٣ محافظة الإسكندرية

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلاً منها بنسبة .... من جهة الرأس.

(أ) ٤ : ٢ (ب) ٢ : ٤ (جـ) ١ : ٣ (د) ٣ : ١



٢ في الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{بحـ}$ مماس للدائرة م

، ق (∠ أ ب حـ) = ٥٠°

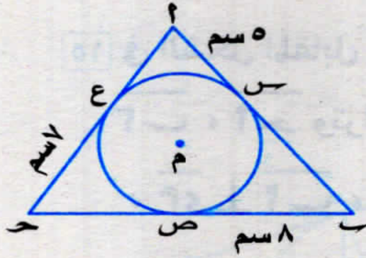
فإن : ق (∠ أ م ب) = ...°

(أ) ٢٥ (ب) ٥٠ (جـ) ٩٠ (د) ١٠٠

٣ دائرة مركزها م رسم فيها وتر طوله ١٦ سم ومحيط الدائرة ٢٠ π سم فإن الوتر يبعد عن مركزها .... سم.

(أ) ٢ (ب) ٦ (جـ) ١٠ (د) ٣٦

٤ في الشكل المقابل :



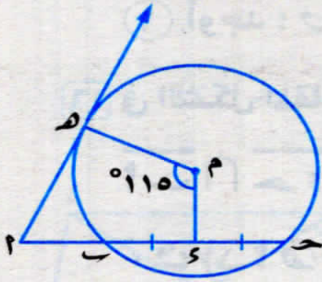
الدائرة م دائرة داخلة للمثلث أ ب ح تمس أضلاعه

$\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{ب ح}}$ ، $\overline{\text{ح أ}}$ في س ، ص ، ع على الترتيب

، أ س = ٥ سم ، ب ص = ٨ سم ، ح ع = ٧ سم

أوجد : محيط المثلث أ ب ح

٥ في الشكل المقابل :



دائرة مركزها م ، ق (∠ ء م هـ) = ١١٥°

، ء منتصف $\overline{\text{ح ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ مماس للدائرة عند هـ

أوجد بالبرهان : ق (∠ هـ أ ء)

٦ قياس الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة يساوي .... °

(أ) ١٨٠ (ب) ١٢٠ (ج) ٩٠ (د) ٤٥

٧ عدد محاور تماثل الدائرة ....

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) عدد لا نهائي.

٨ أ ب ح ء شكل رباعي دائري فيه ق (∠ أ) = ٨٠°

فإن : ق (∠ ح) = ... °

(أ) ١٠٠ (ب) ١٨٠ (ج) ٩٠ (د) ٨٠

٩ دائرة طول نصف قطرها ٢١ سم ، أوجد طول قوس منها قياسه يساوي $\frac{٣}{٤}$ قياس الدائرة. $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$

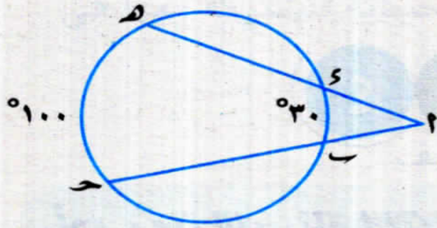
١٠ مساحة المعين الذي طولا قطريه ٦ سم ، ٨ سم تساوي .... سم²

(أ) ١٤ (ب) ١٠ (ج) ٢٤ (د) ٤٨

١١ دائرة طول قطرها ٨ سم فإذا كان المستقيم ل يبعد عن مركزها ٣ سم فإن المستقيم ل يكون .... للدائرة.

(أ) مماسًا (ب) قاطعًا (ج) خارجًا (د) محورًا

١٢ في الشكل المقابل :



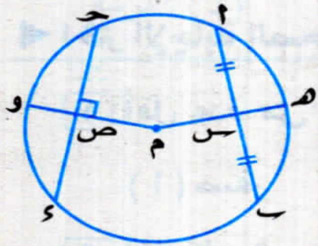
إذا كان ق (⌒هـ حـ) = ١٠٠°

، ق (⌒ء ب) = ٣٠°

فإن : ق (∠ أ) = ... °

(أ) ٣٥ (ب) ٦٥ (جـ) ٧٠ (د) ١٣٠

١٣ في الشكل المقابل :

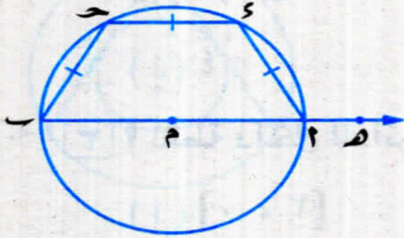


أ ب ، حـ ء وتران متساويان في الطول في الدائرة م

، س منتصف أ ب ، م ص ⊥ حـ ء

أثبت أن : س هـ = ص و

١٤ في الشكل المقابل :



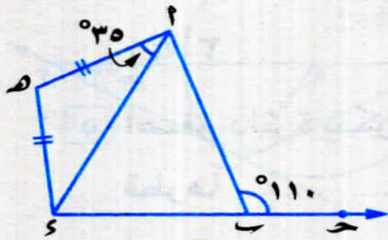
أ ب حـ ء رباعي دائري مرسوم داخل الدائرة م

، أ ب قطر فيها ، أ ء = ء حـ = حـ ب

① برهن أن : ء حـ // أ ب

② أوجد : ق (∠ هـ أ ء)

١٥ في الشكل المقابل :



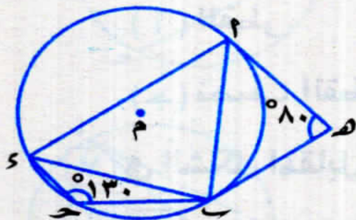
هـ أ = هـ ء ، ق (∠ ء أ هـ) = ٣٥°

، ق (∠ أ ب حـ) = ١١٠°

① أوجد بالبرهان : ق (∠ هـ)

② أثبت أن : الشكل أ ب ء هـ رباعي دائري.

١٦ في الشكل المقابل :



هـ أ ، هـ ب قطعتان مماستان للدائرة م عند أ ، ب

، ق (∠ أ هـ ب) = ٨٠° ، ق (∠ ء حـ ب) = ١٣٠°

① أثبت أن : ب أ = ب ء

② اثبت أن : أ ب ينصف ∠ هـ أ ء



٤ محافظة القليوبيـة

أجب عن الأسئلة الآتية :

المجموعة الأولى

◄ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ أقل عدد من الزوايا الحادة فى مثلث هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٢ إذا كان ٢ ب حـ مثلثاً قائم الزاوية فى ب ، ٤ منتصف $\overline{٢ حـ}$ ، ب ٤ = ٤ سم

فإن : ٢ حـ = ... سم.

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٦

٣ ٢ نقطة داخل الدائرة م التى طول قطرها ٦ سم فإن : م ٢ ∈ ....

(أ) [٠ ، ٣] (ب)]٠ ، ٣[(جـ) [٠ ، ٣[(د) [٠ ، ٦[

٤ م ، ن دائرتان متماستان من الداخل طولا نصفى قطريهما ٣ سم ، ٨ سم على الترتيب فإن : م ن = ... سم.

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) ١١

٥ أصغر دائرة يمكن رسمها تمر بالنقطتين ٢ ، ب حيث ٢ ب = ١٦ سم يكون طول نصف قطرها .... سم.

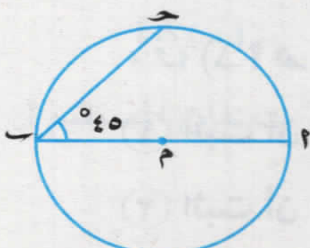
(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٦

٦ أطول وتر فى الدائرة هو ....

(أ) القطر. (ب) المماس.

(جـ) نصف القطر. (د) العمودى على القطر.

٧ فى الشكل المقابل :



$\overline{٢ ب}$ قطر فى الدائرة م ، ق (∠ ٢ ب حـ) = ٤٥°

فإن : ق ($\overset{\frown}{حـ ب}$) = ... °

(أ) ٤٥ (ب) ٥٠ (جـ) ٩٠ (د) ١٠٠

٨ قياس الزاوية المركزية يساوى .... قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى نفس القوس.

(أ) ربع (ب) نصف

(جـ) ضعف (د) ثلاثة أضعاف

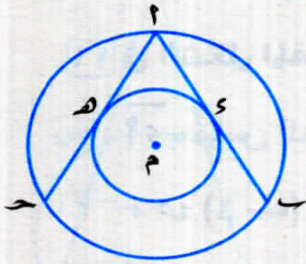
٩ أى من المضلعات الآتية يمثل شكلاً رباعياً دائرياً ؟

(أ) متوازى الأضلاع (ب) شبه المنحرف (جـ) المعين (د) المربع

المجموعة الثانية

◄ أجب عن الأسئلة الآتية :

١٠ فى الشكل المقابل :



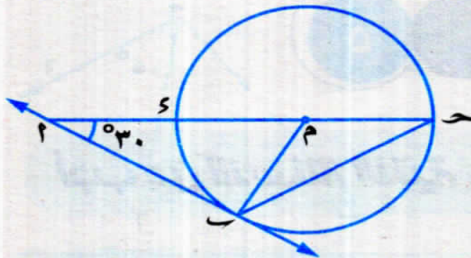
دائرتان متحدتا المركز م

، $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ وتران فى الدائرة الكبرى

يمسان الدائرة الصغرى فى ء ، هـ على الترتيب.

أثبت أن : أ ب = أ حـ

١١ فى الشكل المقابل :

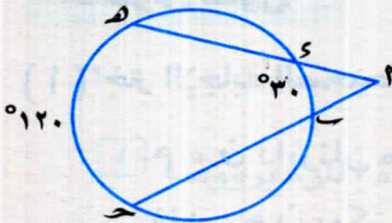


$\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م عند ب ، أ ∈ $\overleftarrow{حـ م}$

، ق (∠ ب أ م) = ٣٠°

أوجد : ق (∠ ب حـ أ)

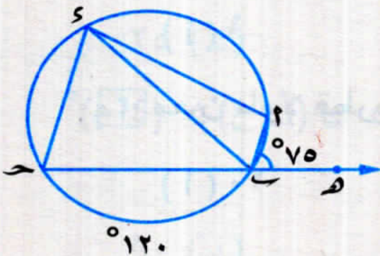
١٢ فى الشكل المقابل :



ق ($\overset{\frown}{حـ هـ}$) = ١٢٠° ، ق ($\overset{\frown}{ب ء}$) = ٣٠°

أوجد : ق (∠ أ)

١٣ فى الشكل المقابل :

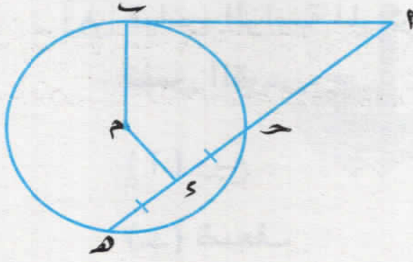


هـ ∈ $\overleftarrow{حـ ب}$ حيث ق (∠ أ ب هـ) = ٧٥°

، ق ($\overset{\frown}{ب حـ}$) = ١٢٠°

أوجد : ق (∠ أ ء ب)

١٤ فى الشكل المقابل :

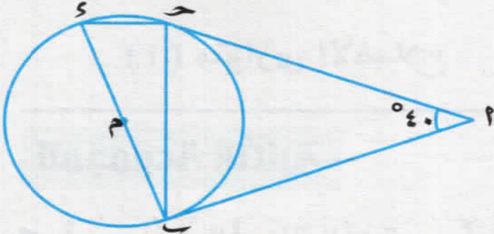


أب قطعة مماسة للدائرة م عند ب

، ء منتصف حـ هـ

أثبت أن : الشكل أ ب م ء رباعى دائرى.

١٥ فى الشكل المقابل :



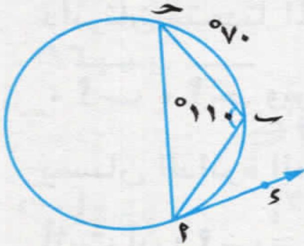
ب ء قطر فى الدائرة م

، أب ، أحـ مماستان للدائرة عند ب

، حـ على الترتيب ، ق (∠ أ) = ٤٠°

أوجد : ق (∠ حـ ب ء)

١٦ فى الشكل المقابل :



أ ء مماس للدائرة عند أ

، ق (∠ ب) = ١١٠° ، ق (⌒ب حـ) = ٧٠°

أوجد : ق (∠ ب أ ء)



٥ محافظة الشرقيـة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ م ، ن دائرتان متقاطعتان طولا نصفى قطريهما ٥ سم ، ٤ سم

فإن : م ن يمكن أن يساوى .... سم

(أ) ١ (ب) ٧ (جـ) ٩ (د) ١٠

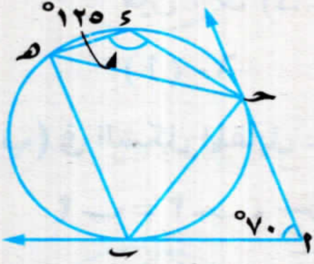
٢ معين طولا قطريه ٦ سم ، ٨ سم فإن محيطه .... سم

(أ) ٢٠ (ب) ٢٤ (جـ) ٤٠ (د) ٤٨

٣ دائرة طول نصف قطرها ١٢ سم ، فإن طول القوس الذى يقابل زاوية مركزية قياسها ١٢٠° يساوى .... π سم

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٦ (د) ٢٠

(ب) فى الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أحـ}$ مماسان للدائرة عند ب ، حـ

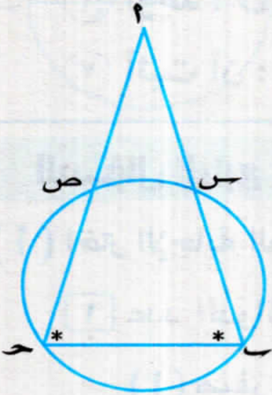
، ق (∠ أ) = ٧٠° ، ق (∠ ء) = ١٢٥°

أثبت أن : ① حـ ب = حـ هـ

② $\overline{أحـ}$ // $\overline{ب هـ}$

السؤال الثانى

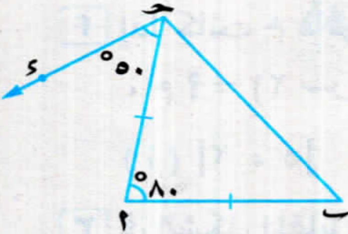
(أ) فى الشكل المقابل :



ق (∠ ب) = ق (∠ حـ)

أثبت أن : أ س = أ ص

(ب) فى الشكل المقابل :



أب = أحـ

، ق (∠ أ) = ٨٠° ، ق (∠ أحـ ء) = ٥٠°

أثبت أن : $\overleftrightarrow{حـ ء}$ مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، حـ

السؤال الثالث

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كانت مساحة مربع تساوى ٥٠ سم^{٢} فإن مساحة الدائرة المارة برؤوسه تساوى .... π سم^{٢}

(أ) ١٠٠ (ب) ٥٠ (جـ) ٧٥ (د) ٢٥

٢ س ص ع ل شكل رباعى دائرى فيه ق (∠ س) = (٥ م)° ، ق (∠ ع) = (٤ م)°

فإن : قيمة م = ...

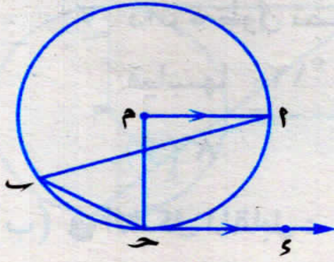
(أ) ٢٠ (ب) ٤٠ (جـ) ١٠٠ (د) ٨٠

٣ في الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{حـ ء}$ مماس للدائرة م عند حـ

، $\overline{أ م}$ // $\overleftrightarrow{حـ ء}$

فإن : ق (∠ أ ب حـ) = ... °

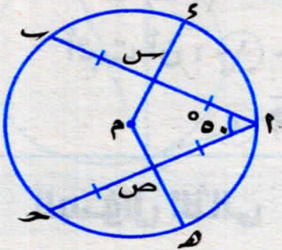


(أ) ٦٠ (ب) ٤٥ (جـ) ٩٠ (د) ٣٠

(ب) في الشكل المقابل :

أ ب = أ حـ ، س منتصف $\overline{أ ب}$

، ص منتصف $\overline{أ حـ}$ ، ق (∠ أ) = ٥٠°



① أوجد : ق (∠ ء م هـ)

② أثبت أن : ء س = هـ ص

السؤال الرابع

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ عدد الدوائر التى تمر بثلاث نقط على استقامة واحدة هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائى.

٢ إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ٦ سم ، أ نقطة داخل الدائرة

، م أ = (٢ س − ٤) سم فإن : س ∈ ....

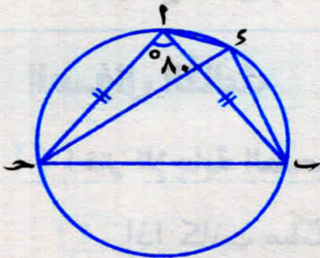
(أ)]٢ ، ٥[(ب)]٢ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ٠[(د) [٢ ، ٥]

٣ في الشكل المقابل :

أ ب = أ حـ

، ق (∠ ب أ حـ) = ٨٠°

فإن : ق (∠ أ ء ب) = ... °



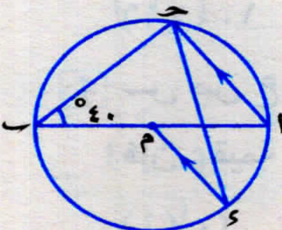
(أ) ١٣٠ (ب) ٨٠ (جـ) ١٢٠ (د) ٩٠

(ب) في الشكل المقابل :

$\overline{أ ب}$ قطر في الدائرة م

، $\overline{أ حـ}$ // $\overline{م ء}$ ، ق (∠ أ ب حـ) = ٤٠°

أوجد : ق (∠ أ حـ ء)



السؤال الخامس

(أ) فى الشكل المقابل :

دائرة مركزها م

، ق ($\overset{\frown}{أ حـ}$) = ق ($\overset{\frown}{ب ء}$)

، $\overline{أ ب}$ ∩ $\overline{حـ ء}$ = {هـ}

أثبت أن : الشكل أ حـ م هـ رباعى دائرى.

(ب) فى الشكل المقابل :

$\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة م

، $\overline{ء هـ}$ ⊥ $\overline{أ ب}$

أثبت أن : (١) الشكل أ هـ ء حـ رباعى دائرى.

(٢) ق (∠ ب ء هـ) = $\frac{١}{٢}$ ق ($\overset{\frown}{ب حـ}$)



٦ محافظة المنوفية

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

السؤال الأول

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ مربع طول قطره ١٠ سم فإن مساحة سطحه تساوى .... سم^٢

(أ) ١٠٠ (ب) ٢٥ (جـ) ٥٠ (د) ٢٠

٢ إذا كان أ ب حـ ء شكلاً رباعياً دائرياً

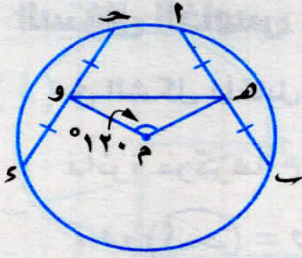
فإن : ق (∠ أ) + ق (∠ حـ) − ٥٠° = ... °

(أ) ١٨٠ (ب) ١٣٠ (جـ) ١٥٠ (د) ١٠٠

٣ Δ أ ب حـ قائم الزاوية فيه طولا ضلعى القائمة ٦ سم ، ٨ سم فإن مساحة الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ = ... π سم^٢

(أ) ٣٦ (ب) ٦٤ (جـ) ٢٥ (د) ١٠٠

(ب) في الشكل المقابل :



أ ب = حـ ء ، هـ ، و منتصفا

$\overline{أب}$ ، $\overline{حـ ء}$ على الترتيب

، ق (∠ هـ م و) = ١٢٠°

أوجد بالبرهان : ق (∠ هـ و م)

السؤال الثانى

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] الأعداد ٥ ، ٤ ، .... تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث.

(أ) ٨ (ب) ١٢ (جـ) ١٠ (د) ٩

[٢] إذا كانت : م دائرة طول قطرها ٧ سم ، أ نقطة فى مستواها وكان م أ = ٤ سم فإن النقطة أ تقع ....

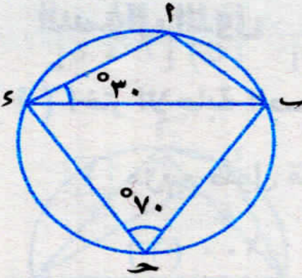
(أ) خارج الدائرة. (ب) على الدائرة.

(جـ) داخل الدائرة. (د) على مركز الدائرة.

[٣] قياس الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة يساوى ....°

(أ) ١٢٠ (ب) ١٨٠ (جـ) ١٠٨ (د) ٩٠

(ب) في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى

، ق (∠ أ ء ب) = ٣٠° ، ق (∠ حـ) = ٧٠°

أوجد بالبرهان : ق (∠ أ ب ء)

السؤال الثالث

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

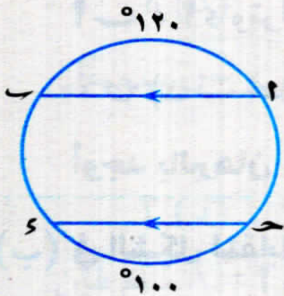
[١] دائرتان طولا نصفى قطريهما ٣ سم ، ٧ سم تكونان متماستين إذا كان البعد بين مركزيهما ∈ ....

(أ)]٤ ، ١٠[(ب)]١٠ ، ∞[(جـ)]٠ ، ٤[(د) {٤ ، ١٠}

[٢] وتر طوله ٦ سم فى دائرة طول نصف قطرها ٥ سم فإنه يبعد عن مركزها .... سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

[٣] فى الشكل المقابل :



إذا كانت : $\overline{أب} // \overline{جـ ء}$

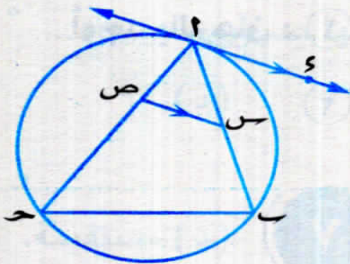
، ق $(\overset{\frown}{أب}) = ١٢٠°$

، ق $(\overset{\frown}{جـ ء}) = ١٠٠°$

فإن : ق $(\overset{\frown}{أجـ}) =$ .... °

(أ) ٥٠ (ب) ٦٠ (جـ) ٧٠ (د) ١٤٠

(ب) فى الشكل المقابل :



أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة

، إذا كان $\overleftrightarrow{أء}$ مماساً للدائرة عند أ

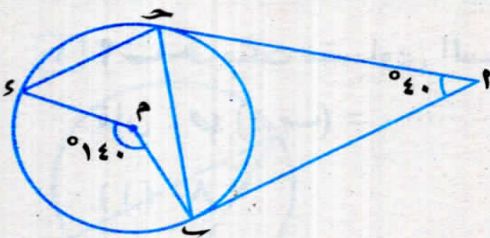
، س $\in \overline{أب}$ ، ص $\in \overline{أجـ}$

، $\overleftrightarrow{أء} // \overline{س ص}$

أثبت أن : س ص جـ ب رباعى دائرى.

السؤال الرابع

(أ) فى الشكل المقابل :



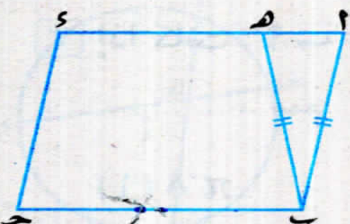
$\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م

، ق (∠ أ) = ٤٠°

، ق (∠ ب م ء) = ١٤٠°

أثبت أن : $\overline{أب} // \overline{جـ ء}$

(ب) فى الشكل المقابل :



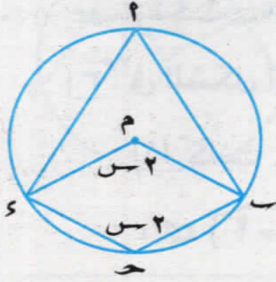
أ ب جـ ء متوازى أضلاع فيه

أ ب = ب هـ

أثبت أن : الشكل هـ ب جـ ء رباعى دائرى.

السؤال الخامس

(أ) في الشكل المقابل :

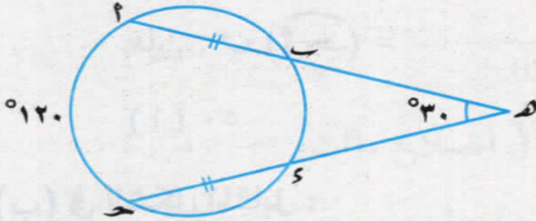


$\overline{أب}$ ، $\overline{أء}$ وتران في الدائرة م ، حـ ∈ $\overset{\frown}{ب ء}$

، ق (∠ ب حـ ء) = ق (∠ ب م ء) = ٢ س

أوجد بالبرهان : ق (∠ أ) بالدرجات.

(ب) في الشكل المقابل :

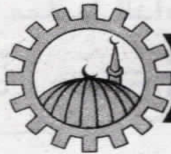


أب = حـ ء ، ق (∠ هـ) = ٣٠°

، ق ($\overset{\frown}{أ حـ}$) = ١٢٠°

أوجد بالبرهان : ① ق ($\overset{\frown}{ب ء}$)

② ق ($\overset{\frown}{أ ب}$)



٧ محافظة الغربية

أجب عن الأسئلة الآتية :

المجموعة الأولى

◄ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

١ أ ب حـ مثلث متساوي الساقين فيه : أ ب = أ حـ ، ق (∠ أ) = ٨٠°

فإن : ق (∠ ب) = ... °

(أ) ٨٠ (ب) ٥٠ (جـ) ٤٠ (د) ٢٠

٢ مربع محيطه ١٦ سم فإن طول قطره .... سم

(أ) ٤ (ب) ١٦ (جـ) ٤ $\sqrt{٢}$ (د) ١٦ $\sqrt{٢}$

٣ إذا كانت : أ ب = ٦ سم فإن محيط أصغر دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب يساوى .... سم

(أ) ٨ π (ب) ٦ π (جـ) ١٢ π (د) ٣٦ π

٤ وتر طوله ٦ سم مرسوم داخل دائرة طول قطرها ١٠ سم فإن بُعد الوتر عن مركز الدائرة يساوى .... سم

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٤

٥ دائرتان م ، ن متماستان من الداخل ، طولا نصفى قطريهما ٥ سم ، س سم على الترتيب حيث س > ٥ ، م ن = ٣ سم فإن : س = ...

(أ) ٥ (ب) ٨ (جـ) ٢ (د) ٣

٦ إذا كانت م دائرة طول قطرها ٨ سم ، أ نقطة فى مستواها وكان م أ = ٨ سم فإن موضع النقطة أ .... الدائرة.

(أ) داخل (ب) على (جـ) خارج (د) مركز

٧ قوس من دائرة طوله $\frac{1}{3}\pi$ نق سم فإنه يقابل زاوية محيطية قياسها يساوى .... °

(أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (جـ) ١٢٠ (د) ٩٠

٨ الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة تكون ....

(أ) حادة. (ب) منفرجة. (جـ) قائمة. (د) مستقيمة.

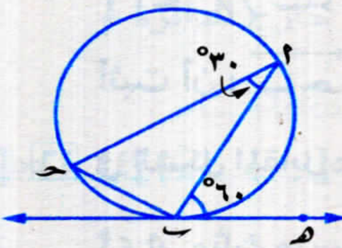
٩ إذا كان أ ب جـ ء شكلًا رباعيًا دائريًا ، وكان ق (∠ ب) = $\frac{1}{4}$ ق (∠ ء) فإن : ق (∠ ب) = ... °

(أ) ٣٦ (ب) ٤٥ (جـ) ٧٢ (د) ١٤٤

المجموعة الثانية

◄ أجب عن الأسئلة الآتية موضحًا خطوات الحل :

١٠ فى الشكل المقابل :

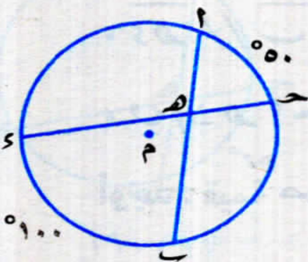


$\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ مماس للدائرة

، ق (∠ ب أ جـ) = ٣٠° ، ق (∠ أ ب هـ) = ٦٠°

أثبت أن : $\overline{\text{أ جـ}}$ قطر فى الدائرة.

١١ فى الشكل المقابل :



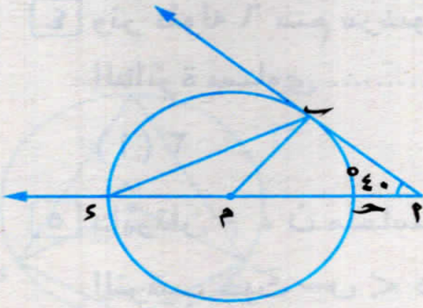
$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ وتران فى الدائرة م

حيث $\overline{\text{أ ب}} \cap \overline{\text{جـ ء}}$ = {هـ}

، ق ($\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$) = ٥٠° ، ق ($\overset{\frown}{\text{ب ء}}$) = ١٠٠°

أوجد : ق (∠ أ هـ ء)

١٢ فى الشكل المقابل :



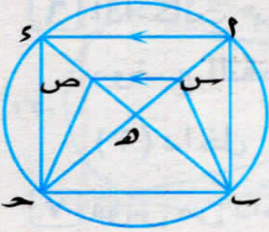
ا ب مماس للدائرة م عند ب

، ا م قطع الدائرة م فى ح ، ء على الترتيب

، ق (∠ ا) = ٤٠°

أوجد بالبرهان : ق (∠ ب ء ح)

١٣ فى الشكل المقابل :

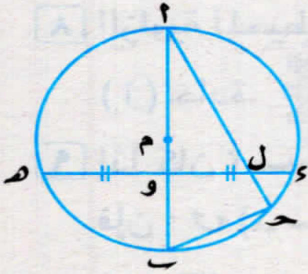


ا ب ح ء شكل رباعى دائرى تقاطع قطراه فى هـ

، س ∈ ا هـ ، ص ∈ ء هـ حيث س ص // ا ء

أثبت أن : الشكل ب س ص ح رباعى دائرى.

١٤ فى الشكل المقابل :

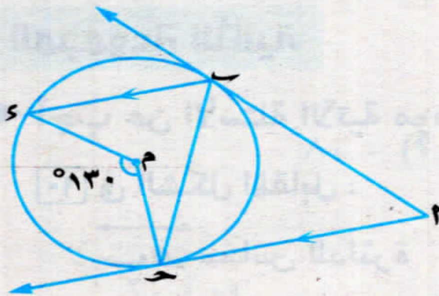


دائرة مركزها م ، ا ب قطر فيها

، النقطة و منتصف ء هـ ، ا ح ∩ ء هـ = {ل}

أثبت أن : الشكل ل ح ب و رباعى دائرى.

١٥ فى الشكل المقابل :

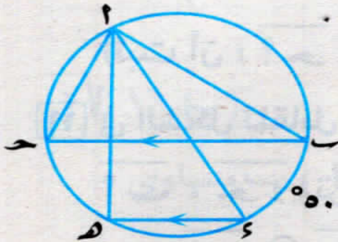


ا ب ، ا ح مماسان للدائرة م

، ا ح // ب ء ، ق (∠ ح م ء) = ١٣٠°

أثبت أن : ب ح ينصف ∠ ا ب ء

١٦ فى الشكل المقابل :



ا ء هـ مثلث مرسوم داخل دائرة

، ء هـ // ب ح ، ق (ب ء⌒) = ٥٠°

، ق (∠ ء هـ ا ح) = (٣ ص – ٥)°

أوجد : قيمة ص

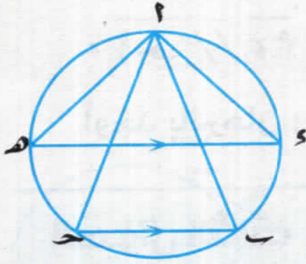


٨ محافظة الدقهلية

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

السؤال الأول

(أ) فى الشكل المقابل :

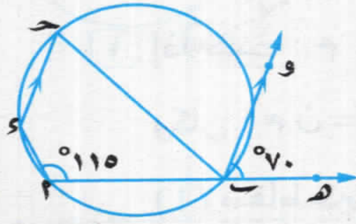


أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة

، ء هـ // ب حـ

أثبت أن : ق (∠ ء أ حـ) = ق (∠ هـ أ ب)

(ب) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة

فيه ق (∠ أ) = ١١٥° ، هـ ∈ أ ب

، ب و // ء حـ فإذا كان : ق (∠ هـ ب و) = ٧٠°

أوجد بالبرهان : ق (∠ ء)

السؤال الثانى

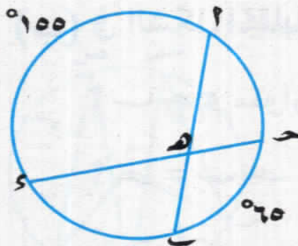
(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ م دائرة طول نصف قطرها ٧ سم ، أ نقطة فى مستويها تقع خارج الدائرة م

فإن : م أ ∈ ....

(أ) {٧} (ب) [٠ ، ٧] (جـ)]٧ ، ∞[(د)]١٤ ، ∞[

٢ فى الشكل المقابل :



أ ب ، حـ ء وتران فى دائرة متقاطعان فى هـ

إذا كان : ق (ب⌢حـ) = ٦٥° ، ق (أ⌢ء) = ١٥٥°

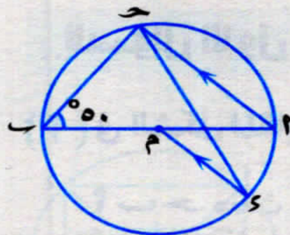
فإن : ق (∠ ب هـ ء) = ... °

(أ) ٤٠ (ب) ٥٠ (جـ) ٧٠ (د) ١١٠

[٣] إذا كان : أب = ٦ سم فإن محيط أصغر دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب يساوى .... سم

(أ) ٣ π (ب) ٦ π (جـ) ٩ π (د) ١٢ π

(ب) فى الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م

، $\overline{أجـ}$ // $\overline{ءم}$ ، ق (∠ب) = ٥٠°

أوجد بالبرهان : ق (∠ أجـء)

السؤال الثالث

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] إذا كانت : م ، ن دائرتين طولا نصفى قطريهما ٨ سم ، ٥ سم على الترتيب وكان : م ن = ١٣ سم فإن الدائرتين م ، ن تكونان ....

(أ) متقاطعتين. (ب) متماستين من الداخل.

(جـ) متماستين من الخارج. (د) متباعدتين.

[٢] إذا كانت : أ ، ب نقطتين تنتميان للدائرة م ، وكان ق ($\overset{\frown}{أب}$) = ٤٥°

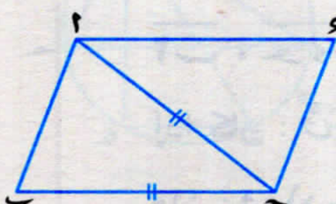
فإن : طا (∠ أ م ب) = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ (جـ) $\sqrt{٣}$ (د) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

[٣] دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٥ وحدات طول. أى من النقط التالية لا تنتمى للدائرة ؟

(أ) (−٥ ، ٠) (ب) (٠ ، ٥) (جـ) (٥ ، ٠) (د) (٥ ، ٥)

(ب) فى الشكل المقابل :



أب جـ ء متوازى أضلاع فيه :

أجـ = ب جـ

أثبت أن :

$\overline{أب}$ مماسة للدائرة المارة برؤوس المثلث أ جـ ء

السؤال الرابع

(أ) فى الشكل المقابل :

أ ب = أ ء ، ء ب = ء حـ

، ق (∠ أ ب ء) = (س)°

، ق (∠ ء ب حـ) = (٢ س)°

أثبت أن : الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى.

(ب) فى الشكل المقابل :

أ ب ، أ حـ قطعتان مماستان للدائرة

عند ب ، حـ على الترتيب

، هـ و مماسة للدائرة عند ء

فإذا كان : أ حـ = ١٣ سم

احسب : محيط Δ أ هـ و

السؤال الخامس

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ المماسان المرسومان من نهايتى قطر فى دائرة ....

(أ) متوازيان. (ب) متقاطعان.

(جـ) متعامدان. (د) متساويان فى الطول.

٢ الشكل الرباعى الذى يمكن رسم دائرة تمر برؤوسه هو ....

(أ) المعين. (ب) شبه المنحرف.

(جـ) المستطيل. (د) متوازى الأضلاع.

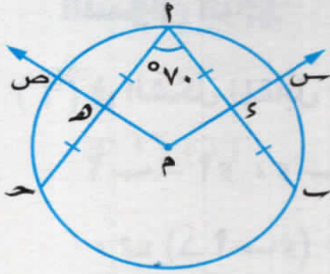
٣ فى الشكل المقابل :

دائرة مركزها م ، ق (∠ س) = ٣٠° ، ق (∠ ص) = ٢٠°

فإن : ق (∠ حـ م ء) = ... °

(أ) ٤٠ (ب) ٥٠ (جـ) ٦٠ (د) ١٠٠

(ب) فى الشكل المقابل :



$\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أحـ}}$ وتران متساويان فى الطول فى دائرة م

، ء منتصف $\overline{\text{أب}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أحـ}}$

، رسم $\overrightarrow{\text{مء}}$ ، $\overrightarrow{\text{مهـ}}$ فقطعا الدائرة فى س ، ص على الترتيب.

① أوجد : ق (∠ ء م هـ)

② أثبت أن : ء س = هـ ص



٩ محافظة الإسماعيلية

أجب عن الأسئلة الآتية : *(يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)*

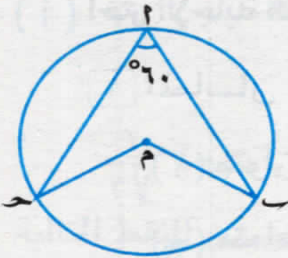
المجموعة الأولى

◄ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ قياس القوس الذى يمثل نصف قياس الدائرة يساوى ....

(أ) ٣٦٠°　(ب) ١٨٠°　(جـ) ١٢٠°　(د) ٩٠°

٢ فى الشكل المقابل :



م دائرة فيها : ق (∠ أ) = ٦٠°

فإن : ق (∠ ب م حـ) = ...

(أ) ٣٠°　(ب) ٤٥°

(جـ) ٦٠°　(د) ١٢٠°

٣ وتر طوله ٨ سم فى دائرة طول نصف قطرها ٥ سم

فإنه يبعد عن مركزها .... سم.

(أ) ٨　(ب) ٥　(جـ) ٤　(د) ٣

٤ أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه ق (∠ أ) = ٧٠°

فإن : ق (∠ ب) = ...

(أ) ٧٠°　(ب) ٥٠°　(جـ) ١٠٠°　(د) ١١٠°

٥ م ، ن دائرتان متماستان من الداخل طولا نصفى قطريهما ٤ سم ، ٩ سم

فإن : م ن = ... سم.

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٩ (د) ١٣

٦ أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى فيه ق (∠ أ) = ٢ ق (∠ حـ)

فإن : ق (∠ أ) = ...

(أ) ١٢٠° (ب) ٩٠° (جـ) ٦٠° (د) ٣٠°

٧ إذا كان : أ ب = ١٤ سم

فإن مساحة سطح أصغر دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب تساوى .... سم^2

(أ) ١٤ π (ب) ٢٨ π (جـ) ٤٩ π (د) ١٩٦ π

٨ مربع مساحته ٢٥ سم^2 فإن محيطه .... سم

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢٠ (د) ٢٥

٩ إذا كان المستقيم ل مماسًا لدائرة طول قطرها ٤ سم

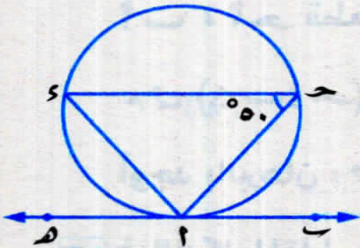
فإنه يبعد عن مركزها بمقدار .... سم

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٠

المجموعة الثانية

◄ أجب عن الأسئلة الآتية :

١٠ فى الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ مماس للدائرة المارة برؤوس المثلث أ ء حـ

، ق (∠ حـ) = ٥٠°

أوجد بالبرهان : ق (∠ ب أ ء)

١١ فى الشكل المقابل :

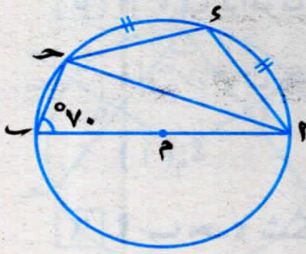


أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة م فيه : ق (∠ ب) = ق (∠ حـ)

، س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{م ص}}$ ⊥ $\overline{\text{أ حـ}}$

أثبت أن : م س = م ص

١٢ فى الشكل المقابل :



أب قطر فى الدائرة م

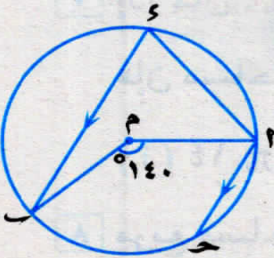
، ق (⌒أء) = ق (⌒حـء)

، ق (∠ أبحـ) = ٧٠°

أوجد بالبرهان : ① ق (∠ ءحـأ)

② ق (∠ حـأب)

١٣ فى الشكل المقابل :

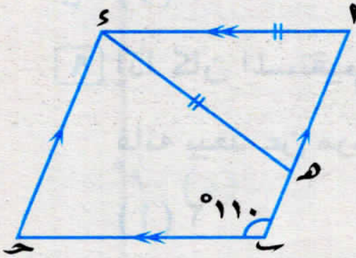


م دائرة فيها ق (∠ أمب) = ١٤٠°

، أحـ // ءب

أوجد بالبرهان : ق (∠ حـأء)

١٤ فى الشكل المقابل :



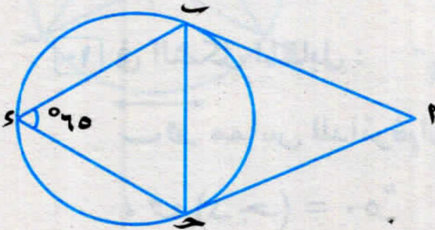
أبحـء متوازى الأضلاع ، هـ ∈ أب

، حيث أء = ءهـ

، ق (∠ ب) = ١١٠°

أثبت أن : هـبحـء رباعى دائرى.

١٥ فى الشكل المقابل :

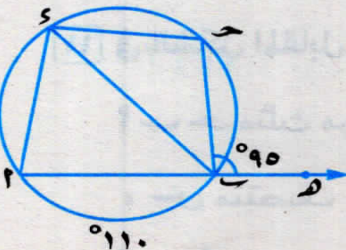


أب ، أحـ قطعتان مماستان للدائرة عند ب ، حـ

، ق (∠ بءحـ) = ٦٥°

أوجد بالبرهان : ق (∠ بأحـ)

١٦ فى الشكل المقابل :



هـ ∈ أب ، هـ ∉ أب

، ق (⌒أب) = ١١٠° ، ق (∠ حـبهـ) = ٩٥°

أوجد بالبرهان : ق (∠ بءحـ)



١٠ محافظة السويس

أجب عن الأسئلة الآتية :

المجموعة الأولى

◀ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

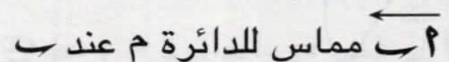
١ محيط الدائرة التى طول نصف قطرها ٣ سم يساوى .... سم

(أ) ٣ π (ب) ٤ π (جـ) ٥ π (د) ٦ π

٢ مساحة المستطيل الذى بُعداه ٤ سم ، ٦ سم تساوى .... سم^2

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٢٤ (د) ٤٨

٣ فى الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{أ ب}$ مماس للدائرة م عند ب

، هـ منتصف $\overline{جـ ء}$ ، ق (∠ أ) = ٤٠°

فإن : ق (∠ ب م هـ) = ... °

(أ) ١٤٠ (ب) ٥٠ (جـ) ٩٠ (د) ٨٠

٤ م ، ن دائرتان متماستان من الخارج طولا نصفى قطريهما ٧ سم ، ٣ سم

فإن : م ن = ... سم

(أ) ٤ (ب) ١٢ (جـ) ٦ (د) ١٠

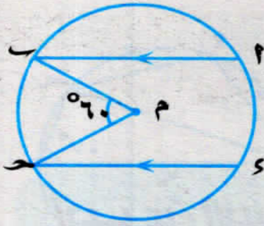
٥ مراكز الدوائر التى تمر بالنقطتين أ ، ب تقع جميعًا على ....

(أ) محور تماثل $\overline{أ ب}$ (ب) $\overline{أ ب}$

(جـ) العمود المقام على $\overline{أ ب}$ (د) منتصف $\overline{أ ب}$

٦ أكبر الأوتار طولاً فى الدائرة يسمى ....

(أ) مستقيمًا. (ب) قطرًا. (جـ) مماسًا. (د) نصف قطر.



٧ فى الشكل المقابل :

م دائرة ، $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{جـ ء}}$

، ق (∠ ب م جـ) = ٦٠°

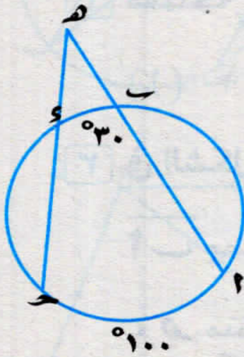
فإن : ق (⌒أ ء) = ... °

(أ) ٣٠ (ب) ٤٠ (جـ) ٦٠ (د) ٢٠

٨ إذا كان أ ب جـ ء شكلًا رباعيًا دائريًا فيه ق (∠ أ) = ٥٠°

فإن : ق (∠ جـ) = ... °

(أ) ٣٥ (ب) ٥٠ (جـ) ١٠٠ (د) ١٣٠



٩ فى الشكل المقابل :

إذا كان : ق (⌒أ جـ) = ١٠٠° ، ق (⌒ب ء) = ٣٠°

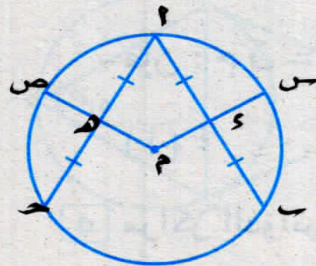
فإن : ق (∠ هـ) = ... °

(أ) ٣٠ (ب) ٣٥

(جـ) ٧٠ (د) ١٠٠

المجموعة الثانية

أجب عما يأتى :

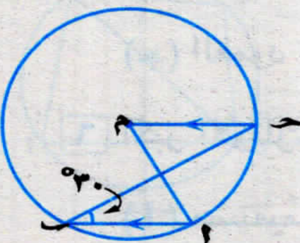


١٠ فى الشكل المقابل :

أ ب = أ جـ ، ء منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

، هـ منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$

أثبت أن : ء س = هـ ص



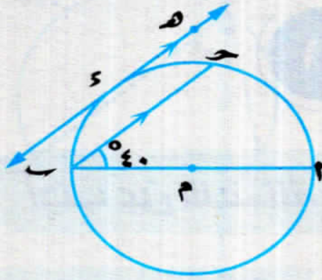
١١ فى الشكل المقابل :

$\overline{\text{أ ب}}$ وتر فى الدائرة م

، $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{جـ م}}$ ، ق (∠ ب) = ٣٠°

أوجد : ق (∠ أ)

١٢ في الشكل المقابل :



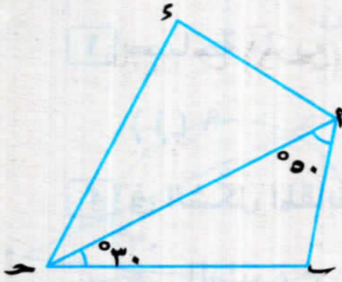
أب قطر في الدائرة م

، ق (∠ب) = ٤٠° ، ءهـ مماس للدائرة م عند ء

، ءهـ // ب حـ

أوجد : ق (⌒حـ ء)

١٣ في الشكل المقابل :



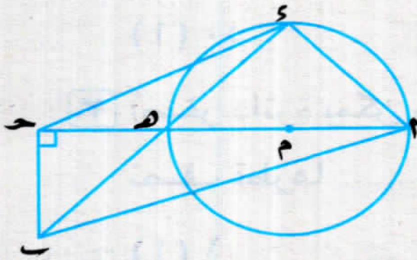
إذا كان أ ب حـ ء شكلًا رباعيًا دائريًا

فيه ق (∠ب أ حـ) = ٥٠°

، ق (∠ب حـ أ) = ٣٠°

أوجد : ق (∠ء)

١٤ في الشكل المقابل :

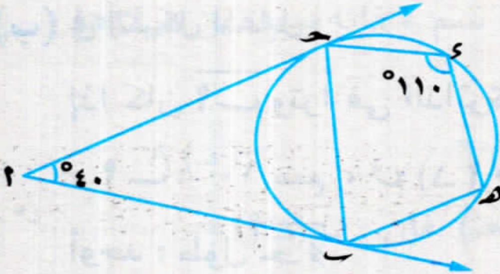


أهـ قطر في الدائرة م ، حـ ∈ أهـ

، ءهـ ∩ حـ ب = {ب} ، أحـ ⊥ ب حـ

أثبت أن : أ ب حـ ء شكل رباعي دائري.

١٥ في الشكل المقابل :



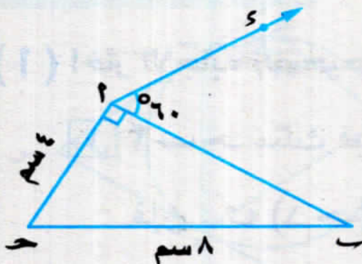
أب ، أحـ مماسان للدائرة عند ب ، حـ

، ق (∠أ) = ٤٠° ، ق (∠هـ ء حـ) = ١١٠°

أثبت أن : ① ب حـ ينصف ∠أ ب هـ

② ب هـ // أحـ

١٦ في الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في أ

، أحـ = ٤ سم ، ب حـ = ٨ سم

، ق (∠ب أ ء) = ٦٠°

أثبت أن : أء مماس للدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ



١١ محافظة دمياط

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ مساحة المربع الذى طول ضلعه ٣ سم تساوى .... سم^٢

(أ) ٩ (ب) ١٢ (جـ) ١٦ (د) ١٨

٢ فى الشكل المقابل :

فى الدائرة م

، ق (∠ أ حـ م) = ... °

(أ) ٥٠ (ب) ٦٠ (جـ) ٨٠ (د) ١٠٠

٣ أصغر دائرة يمكن رسمها تمر بالنقطتين أ ، ب حيث أ ب = ٦ سم يكون طول نصف قطرها .... سم

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(ب) فى الشكل المقابل :

إذا كان $\overline{أب}$ وتراً فى الدائرة م

، أ ب = ١٠ سم ، ق (∠ أ م ء) = ٣٠° ، $\overleftarrow{مهـ}$ ⊥ $\overline{أب}$

أوجد : طول $\overline{حـ ء}$

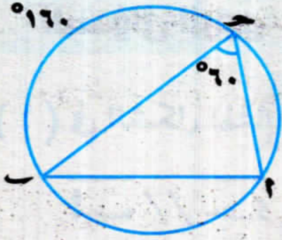
السؤال الثانى

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ أ ب حـ مثلث فيه أ ب = أ حـ ، إذا كان ق (∠ أ) = ٨٠°

فإن : ق (∠ حـ) = ... °

(أ) ١٠٠ (ب) ٨٠ (جـ) ٥٠ (د) ٢٥



[٢] فى الشكل المقابل :

ق (∠ أ ب حـ) = ... °

(أ) ٤٠ (ب) ٥٠

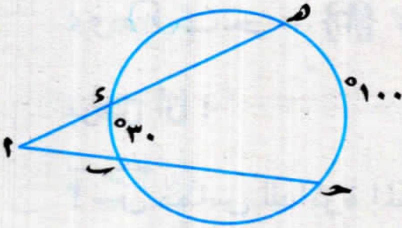
(جـ) ٦٠ (د) ٧٠

[٣] إذا كانت الدائرة م ⋂ الدائرة ن = {أ ، ب} فإن الدائرتين م ، ن تكونان ....

(أ) متباعدتين. (ب) متحدتى المركز.

(جـ) متماستين من الخارج. (د) متقاطعتين.

(ب) فى الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{\text{حـ ب}}$ ⋂ $\overleftrightarrow{\text{هـ د}}$ = {أ} ، ق ($\overset{\frown}{\text{د ب}}$) = ٣٠°

، ق ($\overset{\frown}{\text{هـ حـ}}$) = ١٠٠°

أوجد بالبرهان : ق (∠ هـ أ حـ)

السؤال الثالث

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] الزاوية المحيطية المرسومة فى ربع دائرة تكون ....

(أ) حادة. (ب) قائمة. (جـ) منفرجة. (د) مستقيمة.

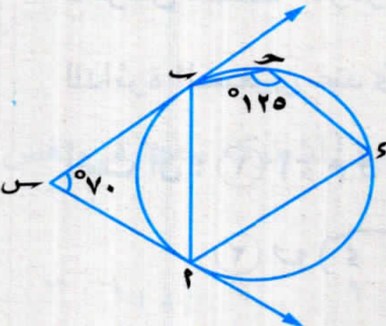
[٢] إذا كان المستقيم مماسًا للدائرة التى طول قطرها ٨ سم ، فإنه يبعد عن مركزها بمقدار يساوى .... سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

[٣] أ ب حـ د شكل رباعى دائرى فيه : ق (∠ أ) = ٣ ق (∠ حـ) فإن : ق (∠ أ) = ... °

(أ) ٤٥ (ب) ٩٠ (جـ) ١٢٠ (د) ١٣٥

(ب) فى الشكل المقابل :



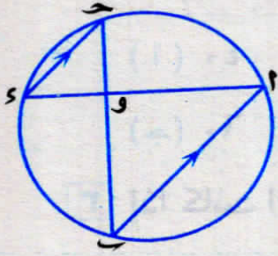
$\overleftrightarrow{\text{س أ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{س ب}}$ مماسان للدائرة عند أ ، ب

، ق (∠ أ س ب) = ٧٠° ، ق (∠ د حـ ب) = ١٢٥°

أثبت أن : $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ ينصف ∠ د أ س

السؤال الرابع

(أ) في الشكل المقابل :

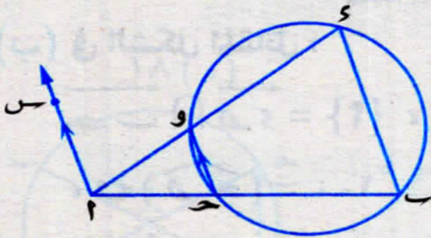


$\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{حـ ء}}$

، $\overline{\text{أ ء}} \cap \overline{\text{ب حـ}}$ = {و}

أثبت أن : $\triangle$ أ و ب متساوى الساقين.

(ب) في الشكل المقابل :



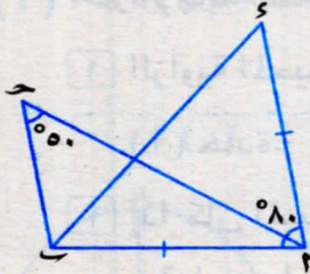
$\overleftrightarrow{\text{ء و}} \cap \overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ = {أ} ، $\overleftrightarrow{\text{أ س}}$ // $\overline{\text{حـ و}}$

برهن أن :

$\overleftrightarrow{\text{أ س}}$ مماس للدائرة المارة برؤوس $\triangle$ أ ب ء

السؤال الخامس

(أ) في الشكل المقابل :



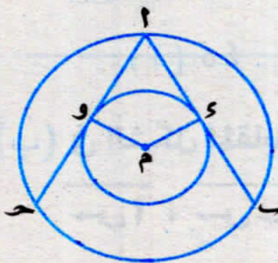
أ ب = أ ء ، ق (∠ ء أ ب) = °٨٠

، ق (∠ حـ) = °٥٠

أثبت أن :

النقط أ ، ب ، حـ ، ء تمر بها دائرة واحدة.

(ب) في الشكل المقابل :



دائرتان متحدتا المركز م ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ مماسان

للدائرة الصغرى عند ء ، و على الترتيب.

أثبت أن : ① أ ء م و رباعى دائرى.

② ق ($\overset{\frown}{\text{ء و}}$) + $\frac{1}{2}$ ق ($\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$) = °١٨٠



١٢ محافظة كفر الشيخ

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

المجموعة الأولى

◄ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

١ طول قطر المربع الذى مساحته ٥٠ سم^{٢} يساوى .... سم.

(أ) ١٠　　(ب) ٥ $\sqrt{٢}$　　(جـ) ١٠ $\sqrt{٢}$　　(د) ٥

٢ فى Δ أ ب جـ إذا كان أ ب > أ جـ　فإن : ق (∠ ب) .... ق (∠ جـ)

(أ) ≤　　(ب) >　　(جـ) =　　(د) <

٣ طول أصغر نصف قطر دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب يساوى ....

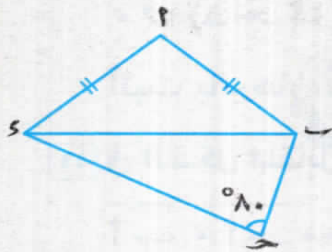
(أ) أ ب　　(ب) ٢ أ ب　　(جـ) $\frac{١}{٢}$ أ ب　　(د) $\frac{١}{٣}$ أ ب

٤ مركز الدائرة الداخلة لأى مثلث هو نقطة تقاطع ....

(أ) متوسطاته.　　(ب) ارتفاعاته.

(جـ) منصفات زواياه الداخلة.　　(د) أضلاعه.

٥ **فى الشكل المقابل :**



أ ب جـ ء شكل رباعى دائرى

، ق (∠ جـ) = ٨٠° ، أ ب = أ ء

فإن : ق (∠ أ ء ب) = ... °

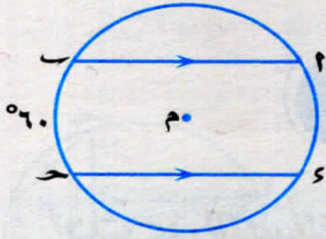
(أ) ٥٠　　(ب) ٤٠

(جـ) ٦٠　　(د) ٣٠

٦ النسبة بين قياس الزاوية المركزية إلى قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى نفس القوس تساوى ....

(أ) ١ : ٢　　(ب) ٦ : ٣　　(جـ) ١ : ١　　(د) ١ : ٣

٧ في الشكل المقابل :



م دائرة طول نصف قطرها ٦ سم

، ق (ب⌒حـ) = ٦٠° ، أب // ءحـ

فإن : طول أ⌒ء = ... سم.

(أ) π　　(ب) ٢ π　　(جـ) ٢٢　　(د) ٧

٨ م ، ن دائرتان طولا قطريهما متساويان فإذا كانت م ن = ٣ نق حيث نق طول نصف قطر الدائرة م فإن الدائرتين م ، ن ....

(أ) متباعدتان.　　(ب) متداخلتان.

(جـ) متقاطعتان.　　(د) متماستان من الخارج.

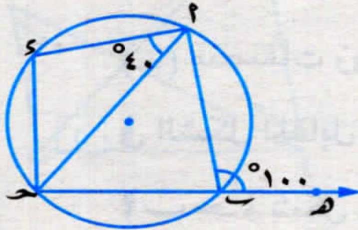
٩ إذا كانت م دائرة طول قطرها ١٢ سم ، م↔أ ⊥ ل حيث أ ∈ ل ، المستقيم ل مماس للدائرة م حيث م أ = (٢ س − ٤) سم فإن : س = ...

(أ) ٨　　(ب) ٦　　(جـ) ٤　　(د) ٥

المجموعة الثانية

أجب عن الأسئلة الآتية :

١٠ في الشكل المقابل :

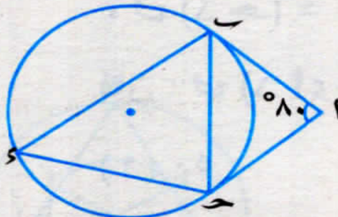


ق (∠ أ ب هـ) = ١٠٠°

، ق (∠ حـ أ ء) = ٤٠°

أثبت بالبرهان أن : ق (حـ⌒ء) = ق (أ⌒ء)

١١ في الشكل المقابل :

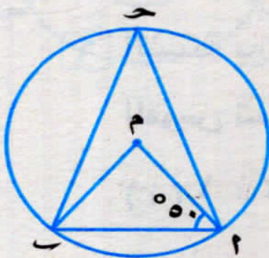


أب ، أحـ مماستان للدائرة عند ب ، حـ

، ق (∠ أ) = ٨٠°

أوجد بالبرهان : ق (∠ ب ء حـ)

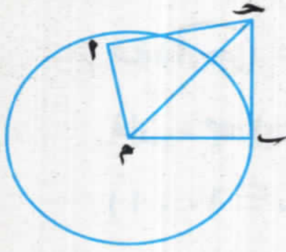
١٢ في الشكل المقابل :



م دائرة ، ق (∠ م أ ب) = ٥٠°

أوجد بالبرهان : ق (∠ أ حـ ب)

١٣ في الشكل المقابل :



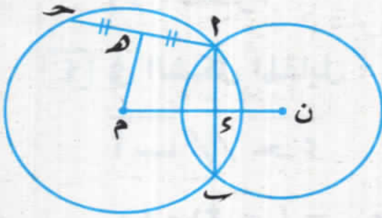
ب جـ مماسة للدائرة م عند ب

، م ب نصف قطر ، أ م = ٦ سم

، جـ م = ١٠ سم ، أ جـ = ٨ سم

أثبت بالبرهان أن : الشكل أ م ب جـ رباعي دائري.

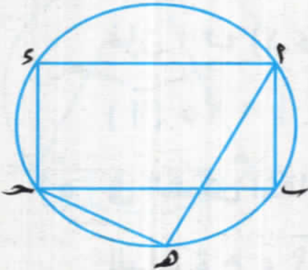
١٤ في الشكل المقابل :



م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ، ب

، هـ منتصف أ جـ ، أ ب = أ جـ

أثبت بالبرهان أن : م ء = م هـ



١٥ في الشكل المقابل :

أ ب جـ ء مستطيل ، أ هـ = ب جـ

أثبت بالبرهان أن : ء جـ = جـ هـ

١٦ أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة ، أ ء مماس للدائرة عند أ ، س ∈ أ ب

، ص ∈ أ جـ حيث س ص // ب جـ

أثبت بالبرهان أن : أ ء مماس للدائرة المارة بالنقاط أ ، س ، ص

١٣ محافظة البحيرة



أجب عن الأسئلة الآتية :

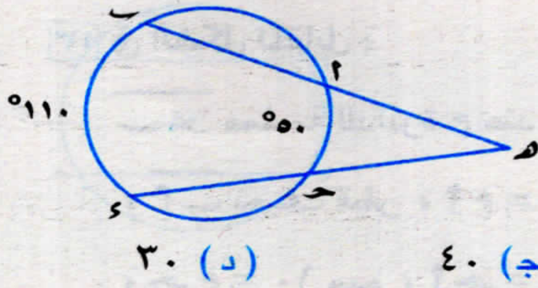
المجموعة الأولى

◄ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ دائرتان م ، ن طولا نصفي قطريهما ٨ سم ، ٥ سم على الترتيب فإذا كان سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = {أ} فإن : م ن = ... سم.

(أ) ٣ (ب) ١٣ (جـ) ٧ (د) ١٥

٢ في الشكل المقابل :



ق (أ حـ⌒) = ٥٠° ، ق (ب ء⌒) = ١١٠°

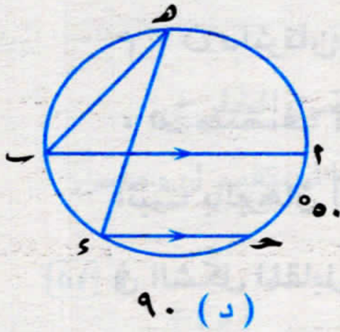
فإن : ق (∠ هـ) = ... °

(أ) ٦٠ (ب) ٥٠ (جـ) ٤٠ (د) ٣٠

٣ عدد الدوائر التى تمر بثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة هو ....

(أ) صفر. (ب) واحد. (جـ) اثنان. (د) عدد لا نهائى.

٤ في الشكل المقابل :



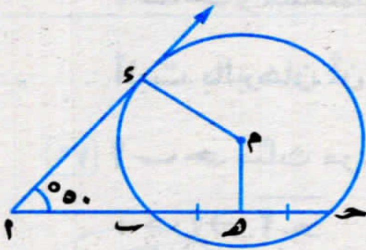
أب // حـ ء

، ق (أ حـ⌒) = ٥٠°

فإن : ق (∠ ء هـ ب) = ... °

(أ) ٢٥ (ب) ٥٠ (جـ) ١٠٠ (د) ٩٠

٥ في الشكل المقابل :



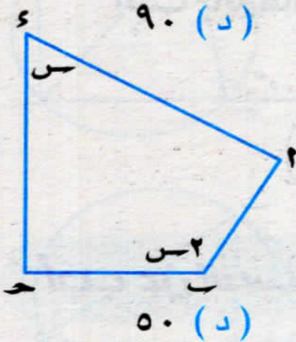
للدائرة م ، أء مماس عند ء ، هـ منتصف بحـ

، ق (∠ أ) = ٥٠°

فإن : ق (∠ ء م هـ) = ... °

(أ) ٥٠ (ب) ١٠٠ (جـ) ١٣٠ (د) ٩٠

٦ في الشكل المقابل :

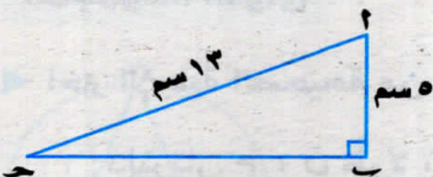


أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى

فإن : قيمة س = ... °

(أ) ١٢٠ (ب) ١٠٠ (جـ) ٦٠ (د) ٥٠

٧ في الشكل المقابل :



Δ أ ب حـ فيه ق (∠ ب) = ٩٠°

، أ حـ = ١٣ سم ، أ ب = ٥ سم

فإن : مساحة Δ أ ب حـ = ... سم^2.

(أ) ٦٥ (ب) ٣٢,٥ (جـ) ٦٠ (د) ٣٠

8 الزاوية التى قياسها ٧٥° تكملها زاوية قياسها .... °

(أ) ١٠٥ (ب) ١٨٠ (جـ) ١٥ (د) ٩٠

9 دائرة مركزها م طول نصف قطرها ٥ سم ، أ نقطة فى مستوى الدائرة م حيث أ ∌ سطح الدائرة م فإذا كان م أ = (٢ س − ٣) سم فإن : س ∈ ....

(أ) [٠ ، ٤] (ب)]٤ ، ∞[(جـ) [٤ ، ∞[(د)]٠ ، ٤]

المجموعة الثانية

◄ أجب عن الأسئلة الآتية :

10 فى الشكل المقابل :



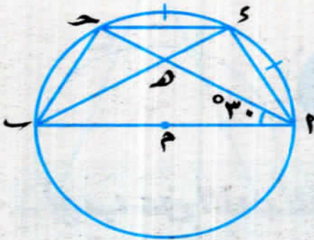
أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة م

حيث ق (∠ب) = ق (∠حـ) ، س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

، $\overline{\text{م ص}}$ ⊥ $\overline{\text{أ حـ}}$

أثبت أن : م س = م ص

11 فى الشكل المقابل :

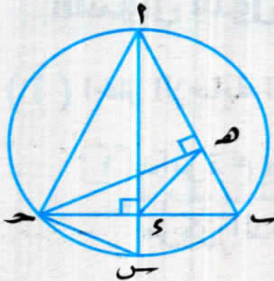


$\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة م ، ء منتصف $\overset{\frown}{\text{أ حـ}}$

، ق (∠حـ أ ب) = ٣٠°

أوجد : ق (∠ء ب أ) ، ق (∠حـ أ ء)

12 فى الشكل المقابل :

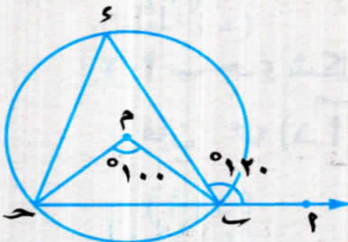


$\overline{\text{حـ هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$

برهن أن : (١) الشكل أ هـ ء حـ رباعى دائرى

(٢) $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$ ينصف ∠ هـ حـ س

13 فى الشكل المقابل :

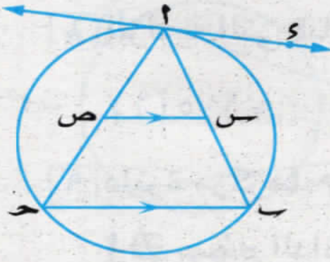


دائرة مركزها م ، ق (∠ب م حـ) = ١٠٠°

، ق (∠أ ب ء) = ١٢٠°

أوجد : ق (∠ء حـ ب)

١٤ في الشكل المقابل :

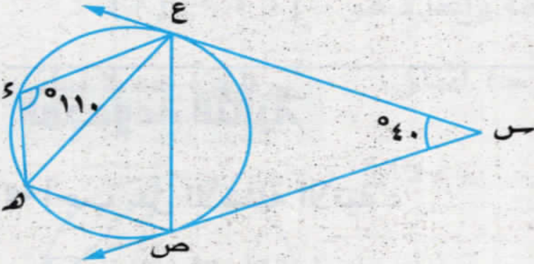


أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة

، $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ مماس للدائرة عند أ ، $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

أثبت أن : $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، س ، ص

١٥ في الشكل المقابل :



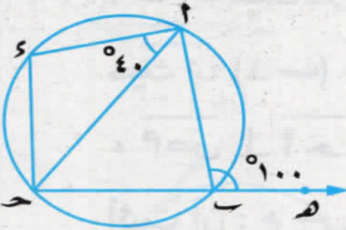
$\overleftarrow{\text{س ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{س ع}}$ مماسان للدائرة عند ص ، ع

، ق (∠ س) = ٤٠°

، ق (∠ ء) = ١١٠°

أثبت أن : ع ص = ع هـ

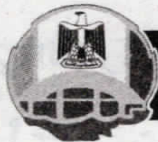
١٦ في الشكل المقابل :



ق (∠ أ ب هـ) = ١٠٠°

، ق (∠ حـ أ ء) = ٤٠°

أثبت أن : أ ء = ء حـ



١٤ محافظة الفيوم

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

السؤال الأول

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ دائرة م طول قطرها ١٠ سم ، $\overline{\text{أ ب}}$ وتر فيها طوله ٨ سم فإن بعد الوتر $\overline{\text{أ ب}}$ عن مركز الدائرة يساوى .... سم.

(أ) ٣　　(ب) ٤　　(جـ) ٥　　(د) ٨

٢ أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى فيه ق (∠ أ) = ٣ ق (∠ حـ)

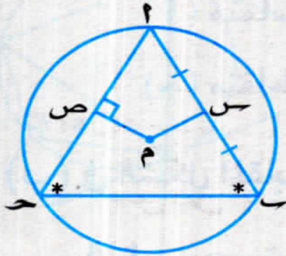
فإن : ق (∠ أ) = ... °

(أ) ٤٥　　(ب) ٦٠　　(جـ) ١٢٠　　(د) ١٣٥

٣ الزاوية المحيطية المرسومة فى ربع دائرة تكون ....

(أ) حادة. (ب) قائمة. (جـ) منفرجة. (د) مستقيمة.

(ب) فى الشكل المقابل :



أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة م

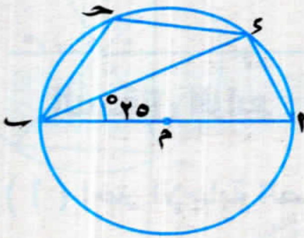
فيه ق (∠ ب) = ق (∠ جـ) ، س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

، م ص ⊥ $\overline{\text{أ جـ}}$

أثبت أن : م س = م ص

السؤال الثانى

(أ) فى الشكل المقابل :

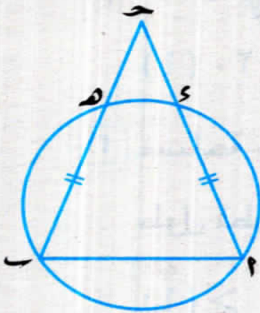


$\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة م

، ق (∠ ء ب أ) = ٢٥°

أوجد : ق (∠ جـ)

(ب) فى الشكل المقابل :



$\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}}$ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة

، $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ = {جـ}

أثبت أن : جـ ء = جـ هـ

السؤال الثالث

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ س ص ع مثلث قائم الزاوية فى ص فإن مركز الدائرة الخارجة للمثلث يقع فى منتصف ....

(أ) $\overline{\text{س ص}}$ (ب) $\overline{\text{ص ع}}$ (جـ) $\overline{\text{س ع}}$ (د) المثلث.

٢ مثلث متساوى الساقين أطوال أضلاعه ٣ سم ، س سم ، ٧ سم

فإن : س = ...

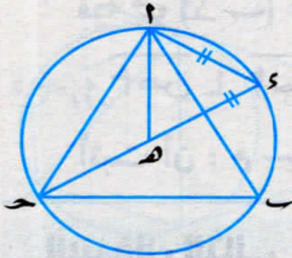
(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٧

٣ دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٩ سم ، ٤ سم فإذا كان م ن = ١٣ سم فإن الدائرتين تكونان ....

(أ) متماستين من الخارج. (ب) متماستين من الداخل.

(جـ) متقاطعتين. (د) متباعدتين.

(ب) فى الشكل المقابل :



Δ أ ب حـ متساوى الأضلاع

، أ ء = ء هـ

أثبت أن : Δ أ ء هـ متساوى الأضلاع.

السؤال الرابع

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ قياس القوس الذى يمثل ثلث قياس الدائرة يساوى ....°

(أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (جـ) ٩٠ (د) ١٢٠

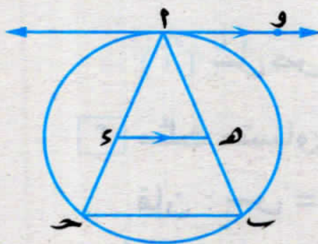
٢ مساحة سطح المربع الذى طول ضلعه ٦ سم .... مساحة سطح المربع الذى طول قطره ٨ سم.

(أ) $>$ (ب) $<$ (جـ) $=$ (د) $\leq$

٣ النسبة بين قياس الزاوية المركزية إلى قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى نفس القوس كنسبة ....

(أ) ٢ : ١ (ب) ١ : ٢ (جـ) ١ : ١ (د) ١ : ٣

(ب) فى الشكل المقابل :



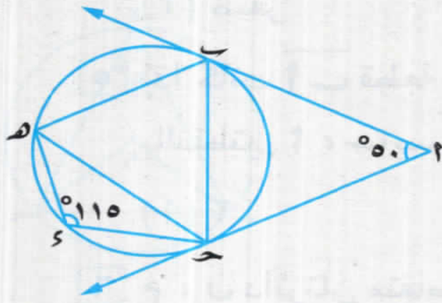
$\overleftrightarrow{\text{أو}}$ مماس للدائرة عند أ

، $\overleftrightarrow{\text{أو}}$ // $\overline{\text{هـ ء}}$

برهن أن : الشكل ء هـ ب حـ رباعى دائرى.

السؤال الخامس

(أ) فى الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أحـ}$ مماسان للدائرة عند ب ، حـ

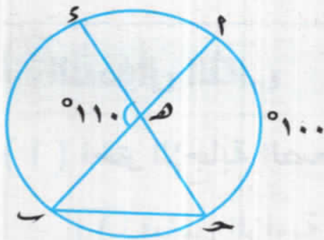
، ق (∠ أ) = ٥٠° ، ق (∠ حـ ء هـ) = ١١٥°

أثبت أن : ① $\overleftrightarrow{بحـ}$ ينصف ∠ أ ب هـ

② حـ ب = حـ هـ

③ $\overline{أحـ}$ // $\overline{ب هـ}$

(ب) فى الشكل المقابل :



ق (∠ ء هـ ب) = ١١٠° ، ق ($\overset{\frown}{أحـ}$) = ١٠٠°

أوجد : ق (∠ ء حـ ب)



١٥ محافظة المنيا

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

السؤال الأول

◄ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ المستقيمان الموازيان لثالث ....

(أ) متعامدان. (ب) متوازيان. (جـ) متقاطعان. (د) متخالفان.

٢ م دائرة طول نصف قطرها نق سم فإن نصف محيط الدائرة .... سم.

(أ) ٢ π نق (ب) $\frac{1}{4}$ π نق (جـ) $\frac{1}{2}$ π نق (د) π نق

٣ م دائرة طول قطرها ٦ سم ، أ ∈ $\overleftrightarrow{ل}$ حيث $\overline{مأ}$ ⊥ $\overleftrightarrow{ل}$ ، فإذا كان م أ = ٣ سم

فإن المستقيم ل يكون .... للدائرة.

(أ) مماسًا (ب) قاطعًا (جـ) خارجًا (د) قطرًا

٤ عدد محاور التماثل للدائرة ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى.

٥ إذا كانت $\overline{أب}$ قطعة مستقيمة طولها ٤ سم فإن طول نصف قطر أصغر دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب يساوى .... سم.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

٦ م ، ن دائرتان متقاطعتان طولا نصفى قطريهما ٣ سم ، ٥ سم

فإن : م ن ∋ ....

(أ)]٠ ، ٢[(ب)]٢ ، ٨[(جـ)]٨ ، ∞[(د)]٣ ، ∞[

السؤال الثانى

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ قياس الزاوية المحيطية يساوى .... قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس.

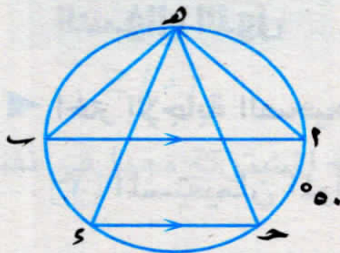
(أ) ضعف (ب) ثلث (جـ) نصف (د) ربع

٢ أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى فإذا كان ق (∠ أ) : ق (∠ حـ) = ١ : ٢

فإن : ق (∠ أ) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

٣ فى الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ // $\overline{حـ ء}$ ، ق $(\overset{\frown}{أحـ})$ = ٥٠°

، ق (∠ ب هـ ء) = (٣ س − ٥)°

فإن : س = ...

(أ) ٥٠ (ب) ١٥ (جـ) ١٠ (د) ٤٥

(ب) فى الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ وتران فى الدائرة م

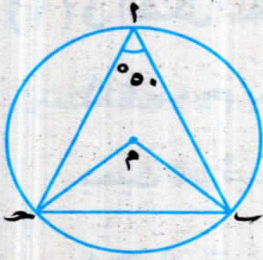
، $\overline{م س}$ ⊥ $\overline{أب}$ ، ص منتصف $\overline{أحـ}$

، ق (∠ أ ب حـ) = ٧٥°

، م س = م ص أوجد : ق (∠ ب أ حـ)

السؤال الثالث

(أ) في الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة م

، ق (∠ أ) = ٥٠°

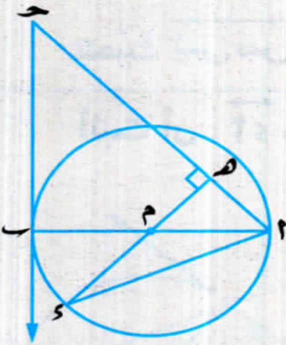
أوجد : (١) ق (∠ ب م حـ)

(٢) ق (∠ م ب حـ)

(ب) أوجد قياس القوس الذى يمثل $\frac{٣}{٥}$ قياس الدائرة ، وإذا كان طول نصف قطر الدائرة ٧ سم فأوجد طول هذا القوس. $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$

السؤال الرابع

(أ) في الشكل المقابل :



$\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة م

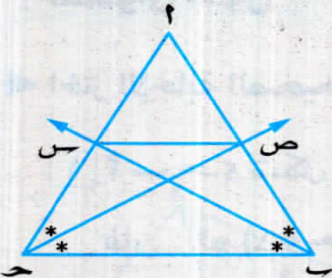
، $\overleftrightarrow{\text{حـ ب}}$ مماس للدائرة عند ب

، $\overline{\text{م هـ}} \perp \overline{\text{أ حـ}}$

أثبت أن : (١) الشكل هـ م ب حـ رباعى دائرى.

(٢) ق (∠ حـ) = ٢ ق (∠ ء أ ب)

(ب) في الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث فيه أ ب = أ حـ

، $\overrightarrow{\text{ب س}}$ ينصف ∠ أ ب حـ ويقطع $\overline{\text{أ حـ}}$ فى س

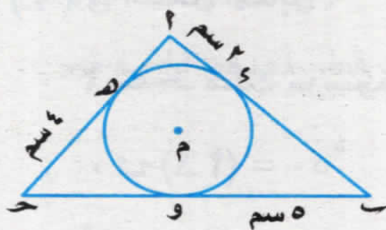
، $\overrightarrow{\text{حـ ص}}$ ينصف ∠ أ حـ ب

ويقطع $\overline{\text{أ ب}}$ فى ص

أثبت أن : الشكل ب حـ س ص رباعى دائرى.

السؤال الخامس

(أ) فى الشكل المقابل :



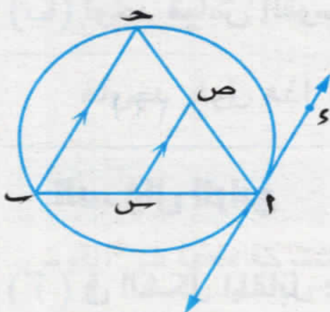
△ أ ب حـ يمس الدائرة م من الخارج فى النقط ء ، هـ ، و

بحيث أ ء = ٢ سم ، ب و = ٥ سم

، حـ هـ = ٤ سم

أوجد : محيط المثلث أ ب حـ

(ب) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة

، $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ مماس للدائرة عند أ

، س ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ ، ص ∈ $\overline{\text{أ حـ}}$

بحيث $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

أثبت أن : $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، س ، ص



١٦ محافظة أسيوط

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

السؤال الأول

◄ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

١ أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى ، هـ ∈ $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ ، هـ ∉ $\overline{\text{ب حـ}}$ ، ق (∠ أ) = ١٠٠°

فإن : ق (∠ ء حـ هـ) = ...°

(أ) ٨٠ (ب) ١٨٠ (جـ) ١٠٠ (د) ٩٠

٢ أ ب حـ مثلث فيه $(\text{أ ب})^2 = (\text{أ حـ})^2 - (\text{ب حـ})^2$ فإن : ∠ ب تكون ....

(أ) منفرجة. (ب) حادة. (جـ) مستقيمة. (د) قائمة.

٣ إذا كانت م ، ن دائرتين طولا نصفى قطريهما ٣ سم ، ٤ سم ، م ن = ٥ سم

فإن الدائرتين تكونان ....

(أ) متباعدتين. (ب) متقاطعتين. (جـ) متماستين. (د) متداخلتين.

٤ وتر طوله ٨ سم فى دائرة طول نصف قطرها ٥ سم ، فإنه يبعد عن مركزها .... سم.

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ١٠

٥ إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ٧ سم ، ل مستقيم فى مستواها ، $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ ل حيث أ ∈ ل ، ٢ م أ − ٥ = ٩ فإن : ل يكون .... للدائرة.

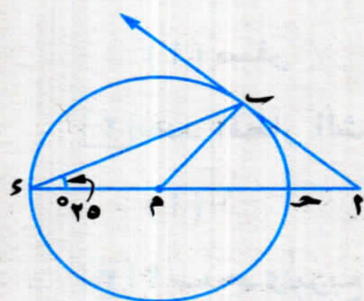
(أ) مماساً (ب) قاطعاً (جـ) خارجاً (د) قطراً

٦ قوس من دائرة قياسه 108° ، طول نصف قطر الدائرة يساوى ٥ سم ، فإن طول هذا القوس يساوى .... سم.

(أ) ٢ π (ب) ٣ π (جـ) ٥ π (د) ١٠ π

السؤال الثانى

(أ) فى الشكل المقابل :



أ نقطة خارج الدائرة م

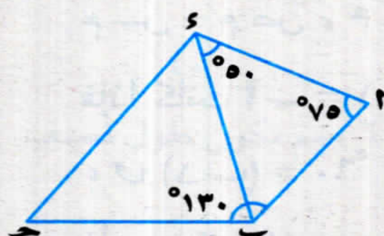
، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة عند ب

، رسم $\overleftrightarrow{\text{أ م}}$ فقطع الدائرة م عند حـ ، ء على الترتيب

، ق (∠ ب ء حـ) = ٢٥°

أوجد بالبرهان : ق (∠ أ)

(ب) فى الشكل المقابل :



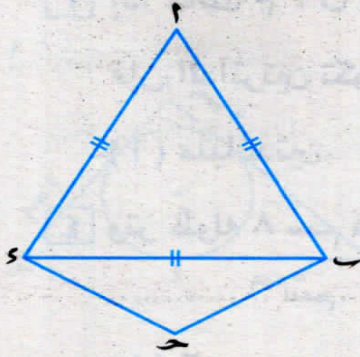
أ ب حـ ء شكل رباعى فيه ق (∠ أ ء ب) = ٥٠°

، ق (∠ أ) = ٧٥° ، ق (∠ أ ب حـ) = ١٣٠°

أثبت أن :

$\overline{\text{ب حـ}}$ مماسة للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، ء

السؤال الثالث



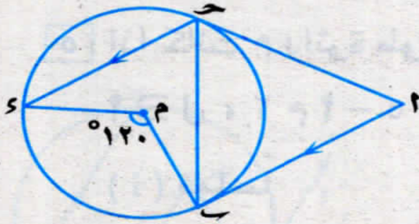
(أ) فى الشكل المقابل :

ا ب حـ ء شكل رباعى دائرى

، Δ ا ب ء متساوى الأضلاع.

أوجد بالبرهان : ق (∠ حـ)

(ب) فى الشكل المقابل :



$\overline{\text{ا ب}}$ ، $\overline{\text{ا حـ}}$ قطعتان مماستان للدائرة م ، $\overline{\text{ا ب}}$ // $\overline{\text{حـ ء}}$

، ق (∠ ب م ء) = ١٢٠°

أوجد بالبرهان : ① ق (∠ ب حـ ء)

② ق (∠ ا)

السؤال الرابع

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ عدد الدوائر التى تمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة يساوى ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

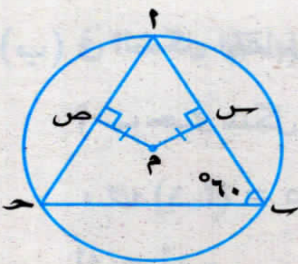
٢ عدد أقطار الشكل الرباعى يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

٣ ا ب حـ ء مربع مرسوم داخل دائرة فإن : ق ($\overset{\frown}{\text{ا ب}}$) = ... °

(أ) ٤٥ (ب) ٩٠ (جـ) ١٨٠ (د) ٣٦٠

(ب) فى الشكل المقابل :



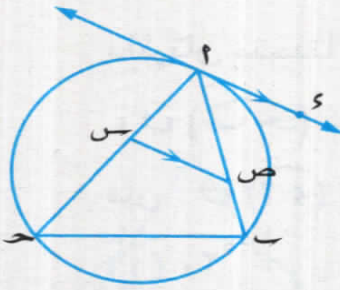
م س = م ص ، $\overline{\text{م س}}$ ⊥ $\overline{\text{ا ب}}$ ، $\overline{\text{م ص}}$ ⊥ $\overline{\text{ا حـ}}$

فإذا كانت ا ب = ١١ سم

، ق (∠ ب) = ٦٠°

فأوجد بالبرهان : محيط Δ ا ب حـ

السؤال الخامس

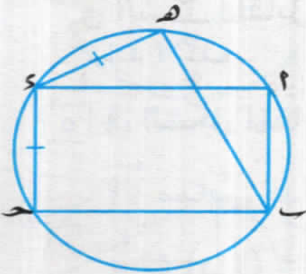


(أ) في الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{\text{أء}}$ مماس للدائرة عند أ ، س $\in$ $\overline{\text{أحـ}}$

، ص $\in$ $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{س ص}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أء}}$

أثبت أن : الشكل س حـ ب ص رباعي دائري.

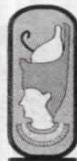


(ب) في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء مستطيل مرسوم داخل دائرة

، حـ ء = ء هـ

أثبت أن : ب هـ = أ ء

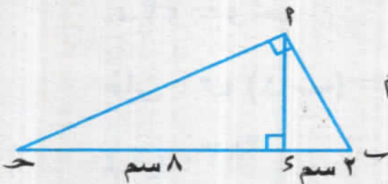


١٧ محافظة سوهاج

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

المجموعة الأولى

◀ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :



١ في الشكل المقابل :

$\triangle$ أ ب حـ قائم الزاوية في أ ، $\overline{\text{أء}}$ $\perp$ $\overline{\text{ب حـ}}$ ، ب ء = ٢ سم

، ء حـ = ٨ سم

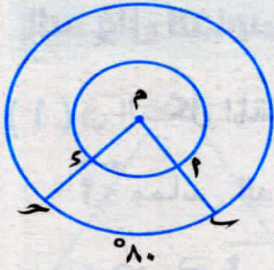
فإن : أ ء = ... سم.

(أ) ٤ (ب) ١٦ (جـ) ٨ (د) ٢

٢ أصغر دائرة يمكن رسمها تمر بالنقطتين أ ، ب حيث أ ب = ٦ سم يكون طول نصف قطرها .... سم.

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

٣ في الشكل المقابل :



دائرتان متحدتا المركز م

، ق (⌒ب حـ) = ٨٠°

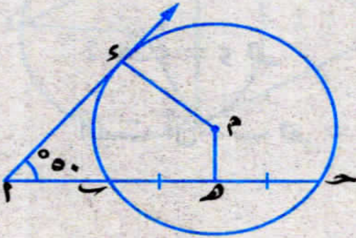
فإن : ق (⌒أ ء) = ...

(أ) ٢٠° (ب) ٤٠° (جـ) ٦٠° (د) ٨٠°

٤ محور تماثل الوتر المشترك $\overline{أب}$ لدائرتين متقاطعتين م ، ن هو ....

(أ) $\overline{من}$ (ب) $\overleftrightarrow{مأ}$ (جـ) $\overleftrightarrow{من}$ (د) $\overleftrightarrow{مب}$

٥ في الشكل المقابل :



$\overleftarrow{أء}$ مماس للدائرة م ، $\overleftarrow{أحـ}$ يقطع الدائرة م في ب ، حـ

، ق (∠ أ) = ٥٠° ، هـ منتصف $\overline{ب حـ}$

فإن : ق (∠ ء م هـ) = ...

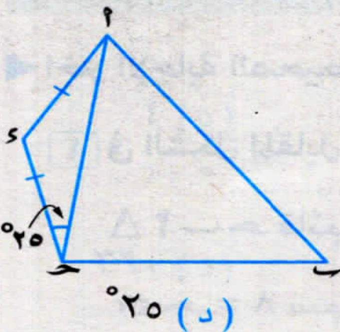
(أ) ٥٠° (ب) ٤٠° (جـ) ١٣٠° (د) ١١٠°

٦ دائرتان م ، ن متماستان طولا نصفي قطريهما ٢ سم ، ٥ سم

فإن : م ن ∈ ....

(أ)]٣ ، ٧[(ب)]٧ ، ∞[(جـ)]٠ ، ٣[(د) {٣ ، ٧}

٧ في الشكل المقابل :



إذا كان أ ب حـ ء شكلًا رباعيًا دائريًا ، ق (∠ أ حـ ء) = ٢٥°

، أ ء = ء حـ

فإن : ق (∠ ب) = ...

(أ) ١٣٠° (ب) ٦٥° (جـ) ٥٠° (د) ٢٥°

٨ مثلث له محور تماثل واحد وفيه طولا ضلعين ٨ سم ، ٤ سم

فإن : محيطه = ... سم.

(أ) ١٦ (ب) ٣٢ (جـ) ١٢ (د) ٢٠

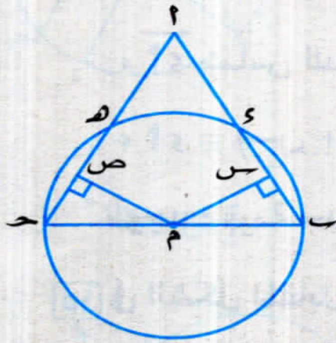
٩ إذا كان قياس الزاوية المماسية يساوي ٧٠° فإن قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس يساوي ....

(أ) ٣٥° (ب) ٧٠° (جـ) ١٤٠° (د) ١٠٥°

المجموعة الثانية

◄ أجب عن الأسئلة الآتية :

١٠ في الشكل المقابل :



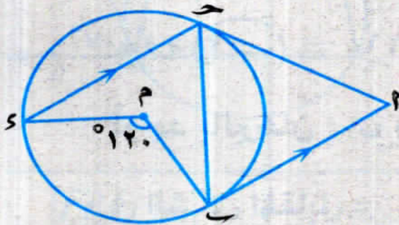
أ ب حـ مثلث فيه أ ب = أ حـ ، رُسمت دائرة م قطرها $\overline{\text{ب حـ}}$

فقطعت $\overline{\text{أ ب}}$ في ء ، $\overline{\text{أ حـ}}$ في هـ

، $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{م ص}} \perp \overline{\text{حـ هـ}}$

أثبت أن : ب ء = حـ هـ

١١ في الشكل المقابل :

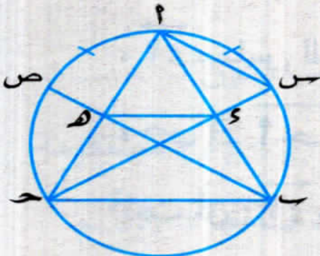


$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ قطعتان مماستان للدائرة م ، $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{حـ ء}}$

، ق (∠ ب م ء) = ١٢٠°

أثبت أن : Δ أ ب حـ متساوى الأضلاع.

١٢ في الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة

، س ∈ $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ ، ص ∈ $\overset{\frown}{\text{أ حـ}}$

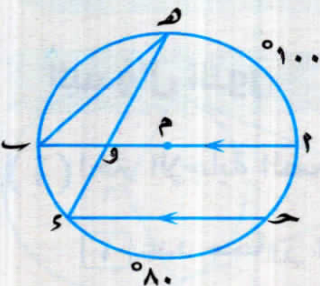
بحيث ق ($\overset{\frown}{\text{أ س}}$) = ق ($\overset{\frown}{\text{أ ص}}$)

، $\overline{\text{حـ س}} \cap \overline{\text{أ ب}}$ = {ء} ، $\overline{\text{ب ص}} \cap \overline{\text{أ حـ}}$ = {هـ}

أثبت أن : (١) الشكل ب حـ هـ ء رباعى دائرى.

(٢) ق (∠ ء هـ ب) = ق (∠ س أ ب)

١٣ في الشكل المقابل :



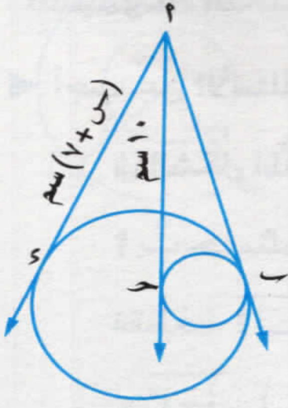
$\overline{\text{أ ب}}$ قطر في الدائرة م ، $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{حـ ء}}$

، ق ($\overset{\frown}{\text{حـ ء}}$) = ٨٠° ، ق ($\overset{\frown}{\text{أ هـ}}$) = ١٠٠°

أوجد بالبرهان : (١) ق (∠ ء هـ ب)

(٢) ق (∠ أ و هـ)

[١٤] في الشكل المقابل :



دائرتان متماستان من الداخل في نقطة ب

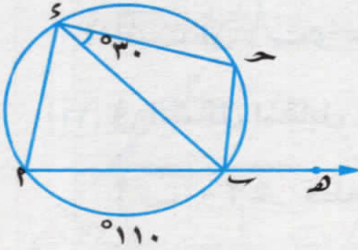
، $\overleftarrow{\text{٢ب}}$ مماس مشترك للدائرتين ، $\overleftarrow{\text{٢حـ}}$ مماس للدائرة الصغرى

، $\overleftarrow{\text{٢ء}}$ مماس للدائرة الكبرى ، فإذا كان : ٢حـ = ١٠ سم

، ٢ء = (س + ٧) سم

أوجد : قيمة س

[١٥] في الشكل المقابل :

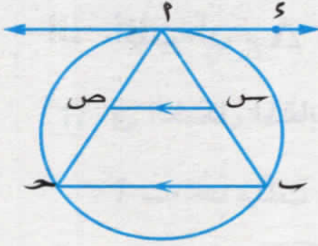


هـ ∈ $\overleftarrow{\text{٢ب}}$ ، هـ ∉ $\overline{\text{٢ب}}$

، ق $(\overset{\frown}{\text{٢ب}})$ = ١١٠° ، ق (∠ ب ء حـ) = ٣٠°

أوجد بالبرهان : ق (∠ هـ ب حـ)

[١٦] في الشكل المقابل :



٢ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة

، $\overleftrightarrow{\text{٢ء}}$ مماس للدائرة عند ٢ ، س ∈ $\overline{\text{٢ب}}$

، ص ∈ $\overline{\text{٢حـ}}$ ، $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

أثبت أن : $\overleftrightarrow{\text{٢ء}}$ مماس للدائرة المارة بالنقط ٢ ، س ، ص



١٨ محافظة قنا

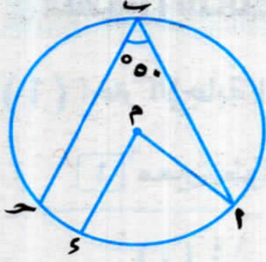
أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

السؤال الأول

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] عدد محاور التماثل لنصف الدائرة هو ....

(أ) صفر　　(ب) ١　　(جـ) ٢　　(د) عدد لا نهائي.



٢ فى الشكل المقابل :

ق (∠ أ م ء) .... ١٠٠°

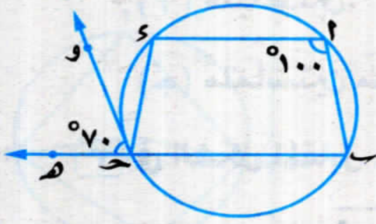
(أ) < (ب) >

(جـ) = (د) ≤

٣ قياس الزاوية الخارجة عن المثلث المتساوى الأضلاع يساوى ....

(أ) ٦٠° (ب) ٨٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

(ب) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى ، ق (∠ أ) = ١٠٠°

، هـ ∈ ب حـ ، حـ و مماس للدائرة عند حـ

، ق (∠ هـ حـ و) = ٧٠° أوجد : ق (∠ ء حـ و)

السؤال الثانى

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان : أ ب حـ ء رباعياً دائرياً وكانت ∠ ء قائمة فإن : ∠ ب تكون ....

(أ) حادة. (ب) قائمة. (جـ) منفرجة. (د) مستقيمة.

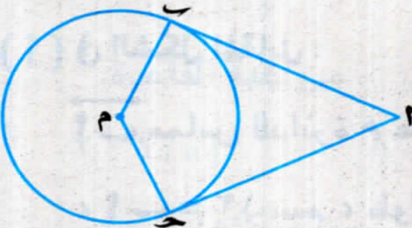
٢ إذا كان المثلث أ ب حـ قائم الزاوية فى ب وكان أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ٦ سم فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ يساوى .... سم.

(أ) ١٠ (ب) ٨ (جـ) ٦ (د) ٥

٣ الزاوية المحيطية المرسومة فى ثلث دائرة تكون ....

(أ) حادة. (ب) قائمة. (جـ) منفرجة. (د) مستقيمة.

(ب) فى الشكل المقابل :



أ ب ، أ حـ مماستان للدائرة م

عند ب ، حـ

برهن أن :

أ ب م حـ شكل رباعى دائرى.

السؤال الثالث

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

1 معين طول ضلعه ٧ سم فإن محيطه .... سم.

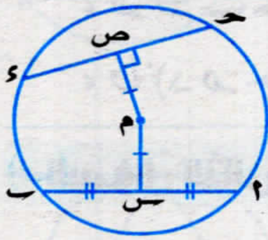
(أ) ١٤ (ب) ٢٨ (جـ) ٤٩ (د) ٧٠

2 إذا كان سطح الدائرة م ⋂ سطح الدائرة ن = {أ} فإن الدائرتين م ، ن تكونان ....

(أ) متباعدتين. (ب) متقاطعتين.

(جـ) متماستين من الخارج. (د) متماستين من الداخل.

3 فى الشكل المقابل :



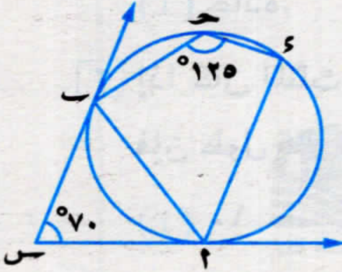
س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{م ص}} \perp \overline{\text{حـ ء}}$

، م س = م ص ، إذا كان ص ء = ٧ سم

فإن : طول $\overline{\text{أ ب}}$ = ... سم.

(أ) ٤٩ (ب) ١٤ (جـ) ٧ (د) ٣,٥

(ب) فى الشكل المقابل :



$\overrightarrow{\text{س أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{س ب}}$ مماسان للدائرة عند أ ، ب

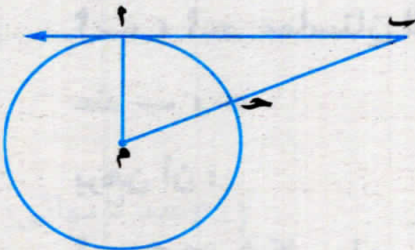
، أ ب حـ ء رباعى دائرى فيه

ق (∠ ب حـ ء) = ١٢٥° ، ق (∠ س) = ٧٠°

أثبت أن : $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overleftrightarrow{\text{س ب}}$

السؤال الرابع

(أ) فى الشكل المقابل :

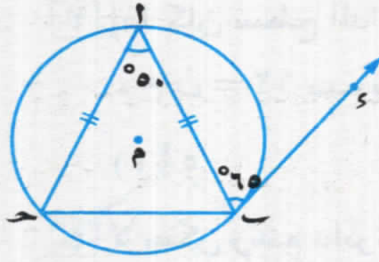


$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة م عند أ

، أ ب = ١٢ سم ، طول قطر الدائرة م = ١٠ سم

فأوجد : طول $\overline{\text{ب حـ}}$

(ب) فى الشكل المقابل :



المثلث أ ب حـ فيه أ ب = أ حـ ، الدائرة م تمر

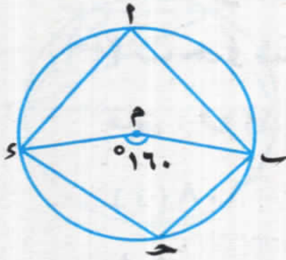
برؤوس المثلث أ ب حـ ، ق (∠ أ) = ٥٠°

، ق (∠ أ ب ء) = ٦٥°

برهن أن : $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ مماس للدائرة م

السؤال الخامس

(أ) فى الشكل المقابل :

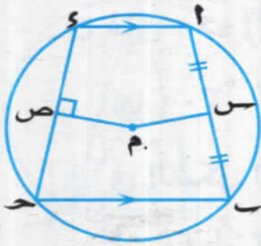


أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى

، ق (∠ ب م ء) = ١٦٠°

أوجد : ق (∠ حـ)

(ب) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء شكل رباعى مرسوم داخل الدائرة م

، $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ، س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{م ص}}$ ⊥ $\overline{\text{حـ ء}}$

أثبت أن : م س = م ص



١٩ محافظة الأقصر

أجب عن الأسئلة الآتية :

المجموعة الأولى

◄ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ نقطة تلاقى متوسطات المثلث تقسم كلاً منها بنسبة .... من جهة القاعدة.

(أ) ١ : ٣ (ب) ٤ : ٦ (جـ) ٢ : ١ (د) ١ : ٢

٢ المماس لدائرة طول قطرها ١٠ سم يكون على بعد .... من مركزها.

(أ) ٢٠ سم (ب) ١٠ سم (جـ) ٥ سم (د) ٤ سم

٣ إذا كان سطح الدائرة م ⋂ سطح الدائرة ن = {أ} وطول نصف قطر إحداهما ٧ سم ، م ن = ١٢ سم فإن طول نصف قطر الدائرة الأخرى = ... سم.

(أ) ٥ (ب) ١٧ (جـ) ٧ (د) ١٢

٤ لا يمكن رسم دائرة تمر برؤوس ....

(أ) المربع. (ب) المثلث. (جـ) المستطيل. (د) المعين.

٥ مساحة المعين الذى طولا قطريه ١٠ سم ، ١٤ سم تساوى .... سم^{٢}.

(أ) ٧٠ (ب) ٣٥ (جـ) ١٤٠ (د) ١٠٥

٦ أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى ، ق (∠ أ) : ق (∠ حـ) = ٢ : ٣

فإن : ق (∠ أ) = ...

(أ) ١٠٨° (ب) ٧٢° (جـ) ٨٠° (د) ١٠٠°

٧ △ أ ب حـ متساوى الأضلاع مرسوم داخل دائرة

فإن : ق ($\overset{\frown}{أ ب}$) الأصغر = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ٢٤٠°

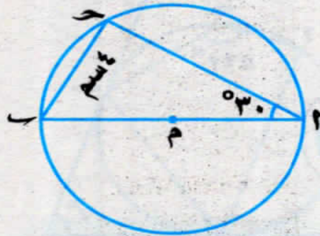
٨ فى الشكل المقابل :

$\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة م

، ق (∠ ب أ حـ) = ٣٠°

، ب حـ = ٤ سم

فإن : أ ب = ...



(أ) ٨ سم. (ب) ٤ سم. (جـ) ٢ سم. (د) ٤ $\sqrt{٣}$ سم.

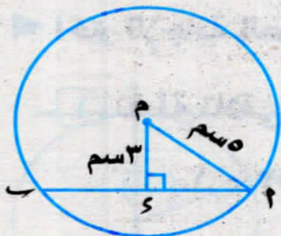
٩ فى الشكل المقابل :

$\overline{أ ب}$ وتر فى الدائرة م

، $\overline{م ء}$ ⊥ $\overline{أ ب}$

، م ء = ٣ سم ، نق = ٥ سم

فإن : أ ب = ... سم

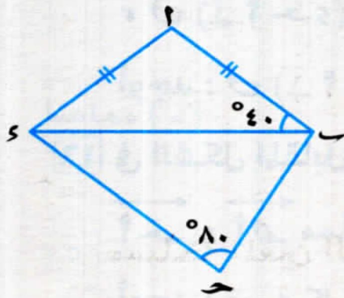


(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (د) ٦

المجموعة الثانية

◄ أجب عن الأسئلة الآتية :

١٠ في الشكل المقابل :

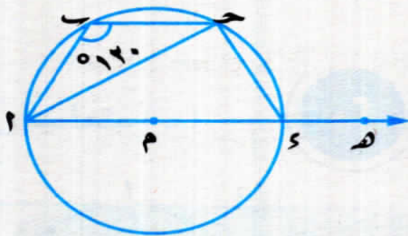


أ ب ح ء شكل رباعي

، أ ب = أ ء ، ق (∠ أ ب ء) = ٤٠° ، ق (∠ ح) = ٨٠°

أثبت أن : الشكل أ ب ح ء رباعي دائري.

١١ في الشكل المقابل :

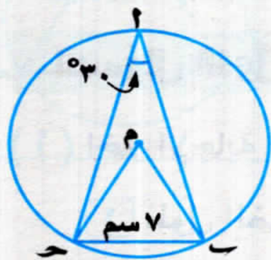


أء قطر في الدائرة م

، هـ ∈ أء ، ق (∠ ح ب أ) = ١٢٠°

أوجد : ق (∠ ح ء هـ) ، ق (∠ ح أ ء)

١٢ في الشكل المقابل :

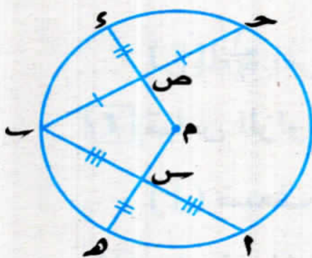


دائرة م ، ب ح = ٧ سم

، ق (∠ أ) = ٣٠°

أوجد : محيط الدائرة.

١٣ في الشكل المقابل :



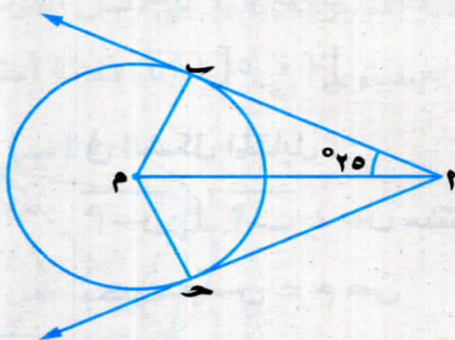
أ ب ، ب ح وتران في الدائرة م

، س منتصف أ ب ، ص منتصف ب ح

إذا كان هـ س = ص ء

أثبت أن : أ ب = ب ح

١٤ في الشكل المقابل :



أ ب ، أ ح مماسان للدائرة م

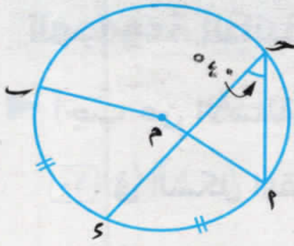
يمسانها عند ب ، ح على الترتيب

، ق (∠ ب أ م) = ٢٥°

① أثبت أن : م أ ينصف ∠ ب م ح

② أوجد : ق (∠ ب م ح)

١٥ فى الشكل المقابل :

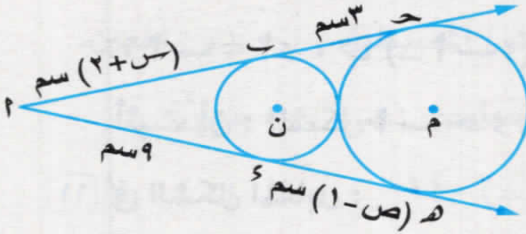


م دائرة ، ء منتصف $\overset{\frown}{أب}$

، ق (∠ أ حـ ء) = ٤٠°

أوجد : ق (∠ أ م ب)

١٦ فى الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{أحـ}$ ، $\overleftrightarrow{أهـ}$ مماسان للدائرتين ن ، م

أوجد : قيمة كل من س ، ص



٢٠ محافظة جنوب سيناء

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ طول الضلع المقابل للزاوية التى قياسها ٣٠° فى المثلث القائم الزاوية يساوى .... طول الوتر.

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٦}$

٢ قياس الزاوية المركزية .... قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى نفس القوس.

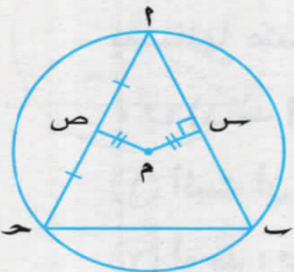
(أ) ضعف (ب) نصف (جـ) يساوى (د) ثلث

٣ م ، ن دائرتان متقاطعتان طولا نصفى قطريهما ٥ سم ، ٧ سم

فإن : م ن ∈ ....

(أ)]٥ ، ٧[(ب)]٢ ، ١٢[(جـ)]٥ ، ١٢[(د)]٢ ، ٧[

(ب) فى الشكل المقابل :



$\overline{مس}$ ⊥ $\overline{أب}$ ، ص منتصف $\overline{أحـ}$

بحيث م س = م ص

أثبت أن : Δ أ ب حـ متساوى الساقين.

السؤال الثانى

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان المستقيم ل يبعد ٥ سم عن مركز دائرة طول قطرها ٨ سم فإنه يكون .... للدائرة.

(أ) قاطعاً (ب) محور تماثل (جـ) خارجاً (د) مماساً

٢ إذا كان أ ب حـ ء شكلاً رباعياً دائرياً فيه ق (∠ أ) = ٦٠°

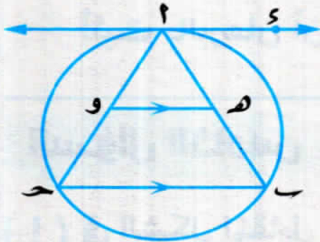
فإن : ق (∠ حـ) = ... °

(أ) ١٢٠ (ب) ٦٠ (جـ) ١٨٠ (د) ٩٠

٣ المماسان المرسومان من نهايتى قطر فى الدائرة ....

(أ) متساويان فى الطول. (ب) متوازيان. (جـ) متقاطعان. (د) متعامدان.

(ب) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة

، $\overleftrightarrow{أء}$ مماس ، $\overline{هـ و}$ // $\overline{ب حـ}$

أثبت أن : $\overleftrightarrow{أء}$ مماس للدائرة المارة برؤوس المثلث أ هـ و

السؤال الثالث

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ دائرة محيطها ٨ π وحدة طول فإن طول قطرها .... وحدة طول.

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ٨ (د) ١٦

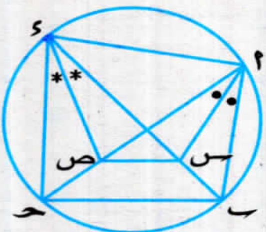
٢ لا يمكن رسم دائرة تمر برؤوس ....

(أ) المعين. (ب) المثلث. (جـ) المستطيل. (د) المربع.

٣ قياس الزاوية المماسية .... قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى نفس القوس.

(أ) نصف (ب) ضعف (جـ) يساوى (د) ثلاثة أمثال

(ب) فى الشكل المقابل :



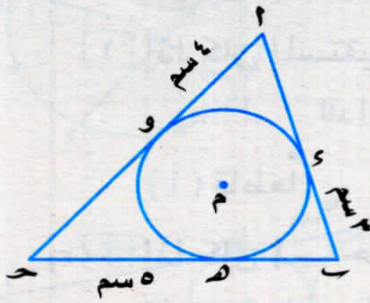
أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى

، $\overrightarrow{أس}$ ينصف ∠ ب أ حـ ، $\overrightarrow{ءص}$ ينصف ∠ ب ء حـ

أثبت بالبرهان أن : الشكل أ س ص ء رباعى دائرى.

السؤال الرابع

(أ) فى الشكل المقابل :



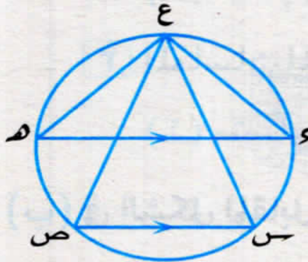
دائرة مرسومة داخل مثلث أ ب حـ

تمس أضلاعه فى النقط ء ، هـ ، و

فإذا كان : أ و = ٤ سم ، ب ء = ٣ سم ، هـ حـ = ٥ سم

أوجد : محيط △ أ ب حـ

(ب) فى الشكل المقابل :



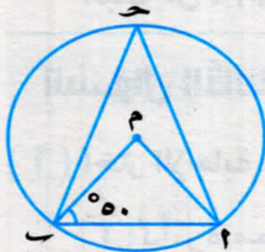
ء هـ ، س ص وتران متوازيان فى دائرة

، ع نقطة على الدائرة

أثبت بالبرهان أن : ق (∠ ء ع ص) = ق (∠ س ع هـ)

السؤال الخامس

(أ) فى الشكل المقابل :

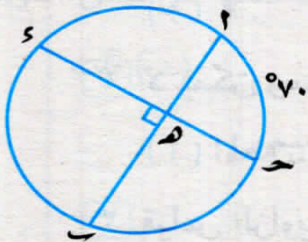


دائرة مركزها م ، أ ب وتر فيها

، ق (∠ أ ب م) = ٥٠°

أوجد بالبرهان : ق (∠ أ حـ ب)

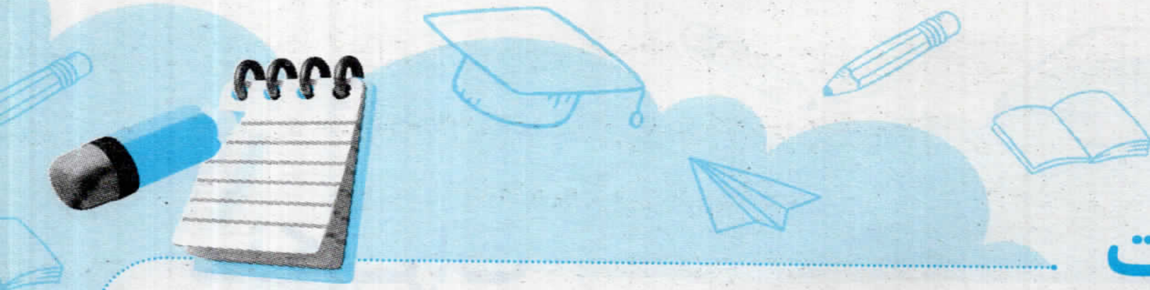
(ب) فى الشكل المقابل :



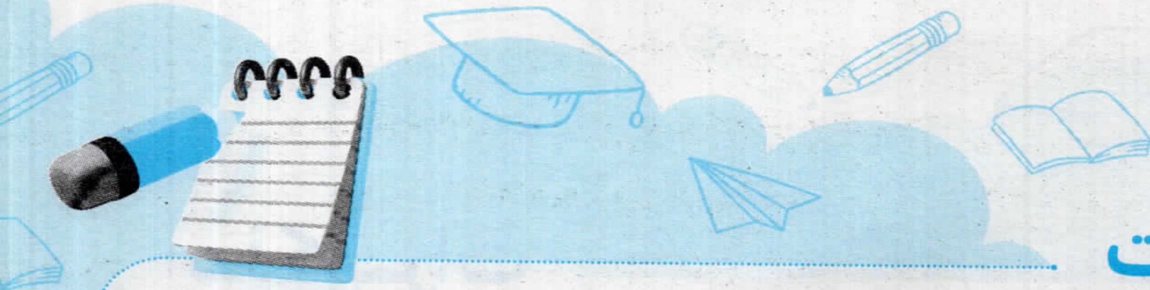
أ ب ، حـ ء وتران متقاطعان داخل دائرة فى نقطة هـ

فإذا كان : ق (⌒أ حـ) = ٧٠° ، ق (∠ ء هـ ب) = ٩٠°

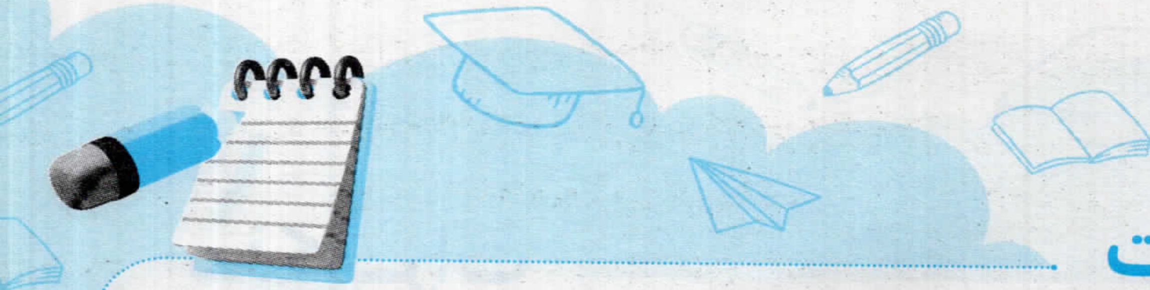
أوجد بالبرهان : ق (⌒ب ء)



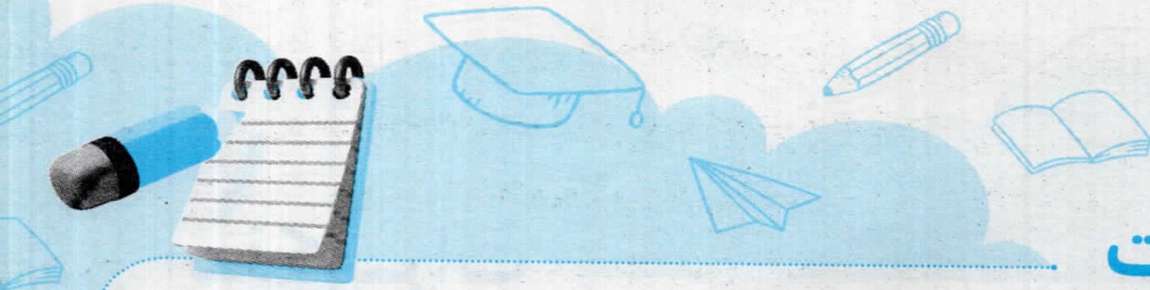
مذکـــرات



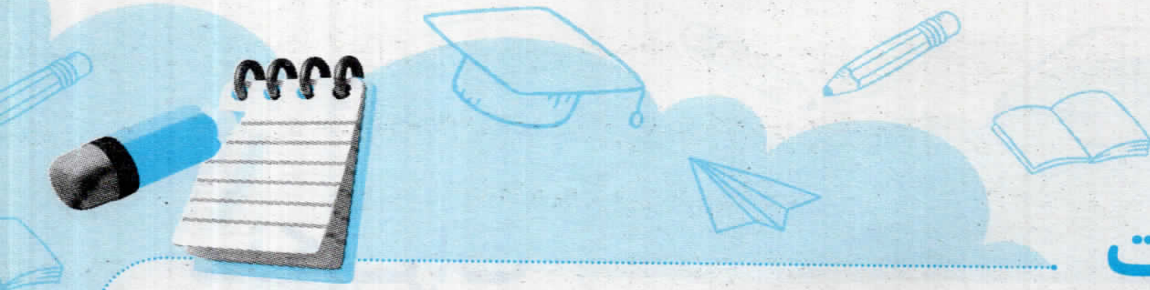
مذکـــرات



مذکـــرات

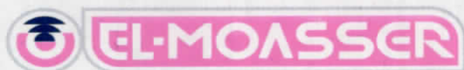


مذکرات



مذکرات

الآن بالمكتبات



فى: **اللغة الإنجليزية**
للمرحلة الإعدادية



الصف الثالث الإعدادى

الفصل الدراسى الثانى

الرياضيات

الجزء الخاص بالتقويم المستمر
يصرف مجانًا مع الكتاب









مكتبة الطلبة
للطبع والنشر والتوزيع
٣ شارع كامل صدقى - الفجالة
تليفون: ٢٥٩٠٢٩٩٧ - ٢٥٩٣٧٧٩١ - ٢٥٩٣٤٠١٢ /٠٢
www.gpseducation.com
الخط الساخن ١٥٠١٤



2026

المعاصر

إعداد نخبة من خبراء التعليم

الإجابات



الصف الثالث الإعدادى

الفصل الدراسى الثانى

الرياضيات

المعاصر

إعداد نخبة من خبراء التعليم

الإجابات

الرياضيات

الصف الثالث الإعدادي

الفصل الدراسى الثانى

٢٠٢٦



مكتبة الطلبة
للطبع والنشر والتوزيع
٣ شارع كامل صدقى - الفجالة
تليفون: ٢٥٩٠٢٩٩٧ - ٢٥٩٣٧٧٩١ - ٠٢/ ٢٥٩٣٤٠١٢
www.gpseducation.com

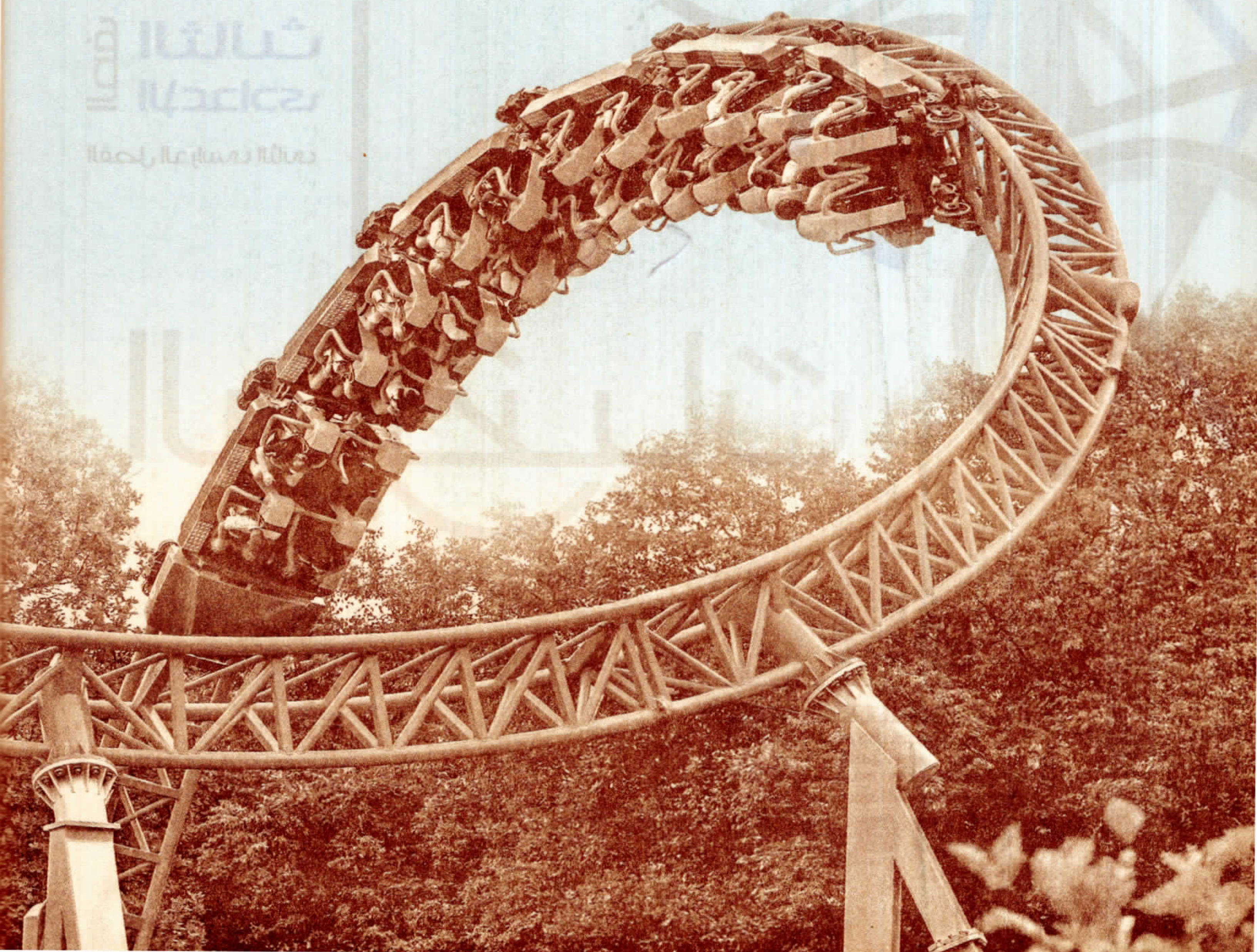


الخط الساخن
١٥٠١٤



إجابـــات تماريـــن

الجبـــر والاحتمـال



إجابات تمرين المراجعة

١ (٥ س − ٣ ص) (٥ س + ٣ ص)

٢ ٢ س^{٢} (س^{٣} + ٢٧)

= ٢ س^{٢} (س + ٣) (س^{٢} − ٣ س + ٩)

٣ (٢ ص + ٣) (ص + ١)

٤ ٢ (س^{٤} − ٩) = ٢ (س^{٢} − ٣) (س^{٢} + ٣)

٥ ٢ (س^{٢} − ١٠ س + ٢٤) = ٢ (س − ٦) (س − ٤)

٦ (س + ٤)^{٢}

٧ (٢ س + ٣) (٤ س^{٢} − ٦ س + ٩)

٨ (ص − ٥١) (ص + ١)

٩ (٥ س − ٣)^{٢}

١٠ (س − ٩) (س + ٩)

١١ ص (ص^{٤} − ١) = ص (ص^{٢} − ١) (ص^{٢} + ١)

= ص (ص − ١) (ص + ١) (ص^{٢} + ١)

١٢ (٣ س − ٢) (س + ٣)

١٣ (س − ٦) (س − ٢)

١٤ ٣ س (س^{٢} + ٤) + ٢ (س^{٢} + ٤)

= (س^{٢} + ٤) (٣ س + ٢)

١٥ (س − ٥) (س^{٢} + ٥ س + ٢٥)

١٦ (٢ س − ٣)^{٢}

١٧ أ^{٢} (أ + ٣) − ٩ (أ + ٣)

= (أ + ٣) (أ^{٢} − ٩)

= (أ + ٣) (أ + ٣) (أ − ٣)

١٨ − (٢ س^{٢} + ١٥ س + ٧) = − (٢ س + ١) (س + ٧)

١٩ (س − ٥) (س − ٢)

٢٠ (٣ س^{٢} − ٤ ص^{٢}) (٣ س^{٢} + ٤ ص^{٢})

٢١ (س^{٢} − ٤) (س^{٢} − ٥)

= (س − ٢) (س + ٢) (س^{٢} − ٥)

٢٢ (١ − ٢ س) (١ + ٢ س)

٢٣ (٥ س + ٢) (س − ١)

٢٤ ٣ س^{٢} (س^{٢} − ٥ س + ٤)

= ٣ س^{٢} (س − ٤) (س − ١)

٢٥ (٣ س − ١) (س − ٦)

٢٦ (٢ س + ٧ ص)^{٢}

٢٧ (س^{٣} − ٨ ص^{٣}) (س^{٣} + ٨ ص^{٣})

= (س − ٢ ص) (س^{٢} + ٢ س ص + ٤ ص^{٢})

× (س + ٢ ص) (س^{٢} − ٢ س ص + ٤ ص^{٢})

٢٨ ٢ ص^{٣} (ص − ٢) + ٧ (ص − ٢)

= (ص − ٢) (٢ ص^{٣} + ٧)

٢٩ (س^{٢} + ٣) (س^{٢} − ٨)

٣٠ (٩ س^{٢} − ٤ ص^{٢}) (س^{٢} − ص^{٢})

= (٣ س − ٢ ص) (٣ س + ٢ ص)

× (س − ص) (س + ص)

إجابات الوحدة الأولى

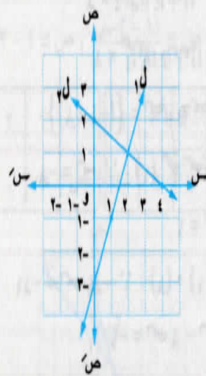
إجابات تمارين ١

١

١ ص = ٢ س − ٣ ، س = ٤ − ٢ ص

س	٠	١	٢
ص	−٣	−١	١

س	٠	٢	٤
ص	٢	١	٠

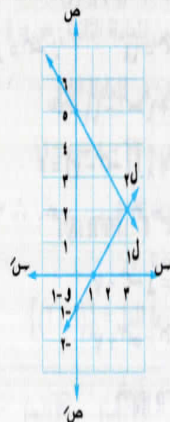


من الرسم مجموعة الحل = {(٢ ، ١)}

٢ ص = ٥ − س ، ص = س − ١

س	٠	−١	٣
ص	٥	٦	٢

س	٠	١	٣
ص	−١	٠	٢

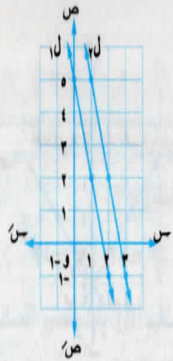


من الرسم مجموعة الحل = {(٣ ، ٢)}

٣ ص = ٥ − ٣ س ، ص = ٨ − ٣ س

س	٠	١	٢
ص	٥	٢	−١

س	١	٢	٣
ص	٥	٢	−١

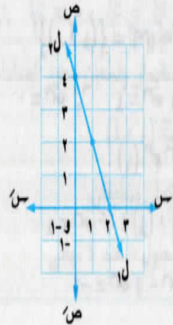


من الرسم مجموعة الحل = ∅

٤ ص = ٤ − ٢ س ، ص = ٤ − ٢ س

س	٠	١	٢
ص	٤	٢	٠

س	٠	١	٢
ص	٤	٢	٠



من الرسم :

مجموعة الحل = {(س ، ص) : ص = ٤ − ٢ س ، (س ، ص) ∈ ح × ح}

٥ ص = − ٢ س ، س = ٣ − ٢ ص

س	−١	٠	١
ص	٢	٠	−٢

س	−١	١	٣
ص	٢	١	٠

ارسم بنفسك.

من الرسم مجموعة الحل = {(−١ ، ٢)}

٦ ص = − ٣ ، ص = س − ٥

س	−٢	٠	٢
ص	−٣	−٣	−٣

س	١	٢	٣
ص	−٤	−٣	−٢

ارسم بنفسك.

من الرسم مجموعة الحل = {(٢ ، −٣)}

٢

١ ∵ س = ص (١)

، س + ٣ ص = ٨ (٢)

وبالتعويض من (١) فى (٢) : ∴ ص + ٣ ص = ٨

∴ ٤ ص = ٨ ∴ ص = ٢

وبالتعويض فى (١) : ∴ س = ٢

∴ مجموعة الحل = {(٢ ، ٢)}

٢ ∵ ص = س - ١ (١)

، ص + ٢ س = ٥ (٢)

وبالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ س - ١ + ٢ س = ٥

∴ ٣ س = ٦ ∴ س = ٢

وبالتعويض فى (١) : ∴ ص = ١

∴ مجموعة الحل = {(٢ ، ١)}

٣ بجمع المعادلتين ينتج أن :

٣ س = ١٢ ∴ س = ٤

وبالتعويض فى المعادلة الثانية :

∴ ٤ + ص = ٩ ∴ ص = ٥

∴ مجموعة الحل = {(٤ ، ٥)}

٤ بجمع المعادلتين ينتج أن :

٣ س = ١٥ ∴ س = ٥

وبالتعويض فى المعادلة الأولى :

∴ ٥ + ٥ ص = ٤ ∴ ٥ ص = -١

∴ ص = - ١/٥

∴ مجموعة الحل = {(٥ ، - ١/٥)}

٥ بالتعويض من المعادلة الأولى فى الثانية :

∴ ٣ (ص + ٤) + ٤ ص = ٥

∴ ٣ ص + ١٢ + ٤ ص = ٥

∴ ٧ ص = -٧ ∴ ص = -١

وبالتعويض فى المعادلة الأولى :

∴ س = -١ + ٤ ∴ س = ٣

∴ مجموعة الحل = {(٣ ، -١)}

٦ ∵ ٢ س - ص = ٣ وبالضرب × ٢

∴ ٤ س - ٢ ص = ٦ (١)

، ∵ س + ٢ ص = ٤ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ ٥ س = ١٠ ∴ س = ٢

وبالتعويض فى (٢) :

∴ ٢ + ٢ ص = ٤ ∴ ص = ١

∴ مجموعة الحل = {(٢ ، ١)}

٧ ∵ س - ٣ ص = ٥ وبالضرب × -٣

∴ -٣ س + ٩ ص = -١٥ (١)

، ∵ ٣ س + ٢ ص = ٤ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ ١١ ص = -١١ ∴ ص = -١

وبالتعويض فى (٢) :

∴ ٣ س - ٢ = ٤ ∴ س = ٢

∴ مجموعة الحل = {(٢ ، -١)}

٨ ∵ ٣ س + ٤ ص = ٢٤ (١)

، س - ٢ ص = -٢ وبالضرب × ٢

∴ ٢ س - ٤ ص = -٤ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ ٥ س = ٢٠ ∴ س = ٤

وبالتعويض فى (١) :

∴ ١٢ + ٤ ص = ٢٤ ∴ ص = ٣

∴ مجموعة الحل = {(٤ ، ٣)}

٩ بجمع المعادلتين ينتج أن :

س = -١

وبالتعويض فى المعادلة الثانية :

∴ ص + ٢ = ٣ ∴ ص = ١

∴ مجموعة الحل = {(-١ ، ١)}

١٠ من المعادلة الثانية :

∵ ٣ س = ص + ٨

∴ ص = ٣ س - ٨ (١)

وبالتعويض فى المعادلة الأولى :

∴ س + ٢ (٣ س - ٨) = ٥

∴ س + ٦ س - ١٦ = ٥

∴ ٧ س = ٢١ ∴ س = ٣

وبالتعويض فى المعادلة (١) :

∴ ص = ٣ × ٣ - ٨ ∴ ص = ١

∴ مجموعة الحل = {(٣ ، ١)}

١١ ∵ س + ٥ ص = ٢ وبالضرب × -٢

∴ -٢ س - ١٠ ص = -٤ (١)

، ٢ س - ٣ ص = -٩ (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ -١٣ ص = -١٣

∴ ص = ١

وبالتعويض فى (١) : ∴ س = -٣

∴ مجموعة الحل = {(-٣ ، ١)}

١٢ بضرب المعادلة الأولى × ٢

، ضرب المعادلة الثانية × ٣

∴ ٤ ص - ٦ س = ١٤ (١)

، ٩ ص + ٦ س = ١٢ (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ ١٣ ص = ٢٦

∴ ص = ٢

وبالتعويض فى المعادلة : ٣ ص + ٢ س = ٤

∴ ٦ + ٢ س = ٤ ∴ س = -١

∴ مجموعة الحل = {(-١ ، ٢)}

١٣ ∵ س + ٢ ص = ١

∴ س = ١ - ٢ ص (١)

، ٢ س + ٤ ص = -٥ (٢)

وبالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ ٢ (١ - ٢ ص) + ٤ ص = -٥

∴ ٢ - ٤ ص + ٤ ص = -٥

∴ ٢ = -٥ (وهذا تعارض)

∴ مجموعة الحل = ∅

١٤ ∵ س/٦ + ص/٣ = ١/٢ وبالضرب × ٦

∴ س + ٢ ص = ٢ (١)

، ∵ س/٢ + ٢ ص/٣ = ١ وبالضرب × ٦

∴ ٣ س + ٤ ص = ٦ (٢)

وبضرب المعادلة (١) × -٢

∴ -٢ س - ٤ ص = -٤ (٣)

بجمع (٢) ، (٣) : ∴ س = ٢

وبالتعويض فى (١) :

∴ ٢ + ٢ ص = ٢ ∴ ص = ٠

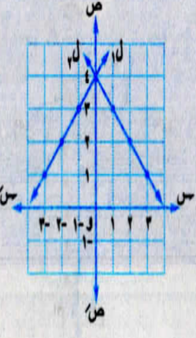
∴ مجموعة الحل = {(٢ ، ٠)}

٣

١ بيانيًا : ص = س + ٤ ، ص = ٤ - س

س	-١	-٢	-٣
ص	٣	٢	١

س	١	٢	٣
ص	٣	٢	١



من الرسم مجموعة الحل = {(٠ ، ٤)}

جبريًا : بالتعويض عن قيمة ص من المعادلة الأولى في المعادلة الثانية :

∴ س + س + ٤ = ٤ ∴ ٢س = ٠

∴ س = ٠ وبالتعويض في المعادلة الأولى :

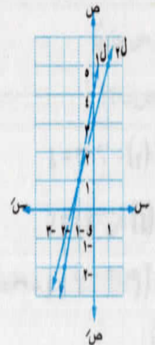
∴ ص = ٤

∴ مجموعة الحل = {(٠ ، ٤)}

٢ بيانيًا : ص = ٣س + ٤ ، ص = ٢س + ٣

س	-٢	-١	٠
ص	-٢	١	٤

س	-١	٠	١
ص	١	٣	٥



من الرسم : مجموعة الحل = {(-١ ، ١)}

جبريًا : بالتعويض عن ص = ٢س + ٣

بالمعادلة الأولى : ∴ ٣س - ٢س - ٣ + ٤ = ٠

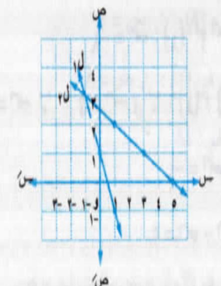
∴ س = -١ ∴ ص = ١

∴ مجموعة الحل = {(-١ ، ١)}

٣ بيانيًا : ص = ١ - ٢س ، س = ٥ - ٢ص

س	-١	٠	١
ص	٣	١	-١

س	١	٣	٥
ص	٢	١	٠



من الرسم : مجموعة الحل = {(-١ ، ٣)}

جبريًا : ∵ ٢س + ص = ١ وبالضرب في -٢

∴ -٤س - ٢ص = -٢ (١)

، س + ٢ص = ٥ (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ -٣س = ٣ ∴ س = -١

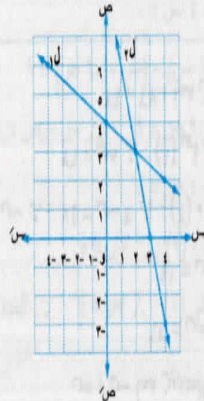
وبالتعويض في (٢) : ∴ ص = ٣

∴ مجموعة الحل = {(-١ ، ٣)}

٤ بيانيًا : س = ٨ - ٢ص ، ص = ٩ - ٣س

س	-٤	٠	٤
ص	٦	٤	٢

س	٢	٣	٤
ص	٣	٠	-٣



من الرسم : مجموعة الحل = {(٢ ، ٣)}

جبريًا : ∵ س + ٢ص = ٨ وبالضرب في -٣

∴ -٣س - ٦ص = -٢٤ (١)

، ٣س + ص = ٩ (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ -٥ص = -١٥ ∴ ص = ٣

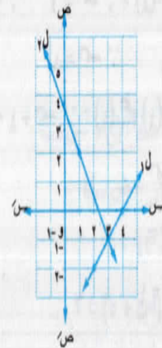
وبالتعويض في (٢) : ∴ س = ٢

∴ مجموعة الحل = {(٢ ، ٣)}

٥ بيانيًا : س = ٤ + ص ، ص = $\frac{٧ - ٣س}{٢}$

س	٢	٣	٤
ص	-٢	-١	٠

س	-١	١	٣
ص	٥	٢	-١



من الرسم : مجموعة الحل = {(٣ ، -١)}

جبريًا : ∵ س - ص = ٤ وبالضرب في ٢

∴ ٢س - ٢ص = ٨ (١)

، ٣س + ٢ص = ٧ (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ ٥س = ١٥ ∴ س = ٣

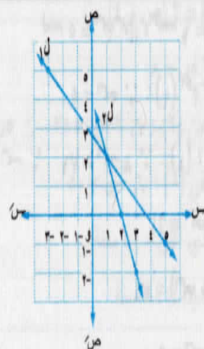
وبالتعويض في (١) : ∴ ص = -١

∴ مجموعة الحل = {(٣ ، -١)}

٦ بيانيًا : ص = $\frac{١١ - ٣س}{٤}$ ، ص = ٤ - ٢س

س	-٣	١	٥
ص	٥	٢	-١

س	١	٢	٣
ص	٢	٠	-٢



من الرسم : مجموعة الحل = {(١ ، ٢)}

جبريًا : من المعادلة الثانية : ص = ٤ - ٢س

وبالتعويض في المعادلة الأولى :

∴ ٣س + ١٦ - ٨س = ١١

∴ -٥س = -٥ ∴ س = ١

∴ ص = ٢

∴ مجموعة الحل = {(١ ، ٢)}

٤

١ (ب) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (ب)

٥ (أ) ٦ (أ) ٧ (د) ٨ (أ)

٩ (د) ١٠ (أ) ١١ (د) ١٢ (د)

١٣ (د) ١٤ (أ) ١٥ (ب) ١٦ (أ)

١٧ (جـ) ١٨ (ب)

٥

١ ∵ $م_1 = \frac{-٧}{٤}$ ، $م_2 = \frac{-٥}{-٢} = \frac{٥}{٢}$ ∴ $م_1 \neq م_2$

∴ المستقيمان متقاطعان في نقطة

∴ عدد الحلول = ١

٢ ∵ $م_1 = \frac{-٤}{٢} = -٢$ ، $م_2 = -٢$ ∴ $م_1 = م_2$

، ∵ المستقيم الأول يقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، ٥)

، المستقيم الثاني يقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، -٥)

∴ المستقيمان متوازيان لتساوي الميل واختلاف النقطتين.

∴ عدد الحلول = ٠

٣ ∵ $م_1 = \frac{-٩}{٦} = \frac{-٣}{٢}$ ، $م_2 = \frac{-٣}{٢}$ ∴ $م_1 = م_2$

، ∵ المستقيمان يقطعان محور الصادات في ذات النقطة (٠ ، ٤)

∴ المستقيمان منطبقان.

∴ عدد الحلول = عدد لا نهائي

٦

∵ (٣ ، -١) حل للمعادلة : أس + ب ص - ٥ = ٠

∴ ٣أ - ب = ٥ (١)

، ∵ (٣ ، -١) حل للمعادلة :

٣أس + ب ص = ١٧ ∴ ٩أ - ب = ١٧

∴ -٩أ + ب = -١٧ (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ -٦أ = -١٢ ∴ أ = ٢

وبالتعويض في (١) : ∴ ب = ١

٧

∵ (أ ، ٢ب) حل للمعادلة : ٣س - ص = ٥

∴ ٣أ - ٢ب = ٥ (١)

، ∵ (أ ، ٢ب) حل للمعادلة : س + ص = -١

∴ أ + ٢ب = -١ (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ ٤أ = ٤ ∴ أ = ١

وبالتعويض فى (٢) : ∴ ب = −١

حل آخر :

∵ ٣س − ص = ٥ (١)

، س + ص = −١ (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ ٤س = ٤ ∴ س = ١

وبالتعويض فى (٢) : ص = −٢

∴ (١ ، −٢) حل للمعادلتين

، ∵ (أ ، ٢ب) حل للمعادلتين

∴ (أ ، ٢ب) = (١ ، −٢)

∴ أ = ١ ، ٢ب = −٢ ∴ ب = −١

٨

∵ د(س) = أس^{٢} + ب ، د(١) = ٥

∴ أ + ب = ٥ (١)

، ∵ د(٢) = ١١ ∴ ٤أ + ب = ١١ (٢)

بطرح (١) من (٢) : ∴ ٣أ = ٦ ∴ أ = ٢

وبالتعويض فى (١) : ∴ ب = ٣

٩

∵ س = ٦ (١)

∴ و ب = ٦ وحدات طول.

وبالتعويض من (١) فى المعادلة : ٣ص = ٤س

∴ ٣ص = ٢٤ ∴ ص = ٨

∴ أ(٦ ، ٨) ∴ ب أ = ٨ وحدات طول.

فى Δ أ ب و :

∵ ق(∠ب) = ٩٠°

∴ أو = $\sqrt{٨^{٢} + ٦^{٢}}$ = ١٠ وحدات طول.

∴ محيط Δ أ ب و = ٨ + ٦ + ١٠ = ٢٤ وحدة طول.

١٠

∵ س + ص = ٦ (١)

، ص − ٢س = ٠

∴ ص = ٢س (٢)

بالتعويض من (٢) فى (١) : ∴ س + ٢س = ٦

∴ ٣س = ٦ ∴ س = ٢

وبالتعويض فى (٢) : ∴ ص = ٤ ∴ ب(٢ ، ٤)

∴ طول العمود الساقط من ب على أو يساوى ٤ وحدات طول

، ∵ أ ∈ المستقيم ل$_{١}$ ، أ ∈ $\overrightarrow{سس}$

عندما ص = ٠ فى المعادلة : س + ص = ٦

∴ س = ٦ ∴ أ(٦ ، ٠)

∴ أو = ٦ وحدات طول

∴ مساحة Δ أ ب و = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٤ = ١٢ وحدة مربعة

تطبيقات على حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين

١

نفرض أن العددين هما س ، ص

∴ س + ص = ٦٣ (١)

، س − ص = ١١ (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ ٢س = ٧٤ ∴ س = ٣٧

وبالتعويض فى (١) : ∴ ص = ٢٦

∴ العددان هما : ٣٧ ، ٢٦

٢

نفرض أن العددين هما س ، ص

∴ س + ص = ٥٤ (١)

، ص = ٢س (٢)

وبالتعويض من (٢) فى (١)

∴ س + ٢س = ٥٤ ∴ س = ١٨

وبالتعويض فى (٢) : ∴ ص = ٣٦

∴ العددان هما : ١٨ ، ٣٦

٣

نفرض أن العدد الأول س ، العدد الثانى ص

∴ ٣س + ٢ص = ١٣ (١)

، س + ٣ص = ١٦ (٢)

وبضرب المعادلة (٢) × −٣

∴ −٣س − ٩ص = −٤٨ (٣)

بجمع (١) ، (٣) :

∴ −٧ص = −٣٥ ∴ ص = ٥

وبالتعويض فى (٢) : ∴ س = ١

∴ العددان هما : ١ ، ٥

٤

نفرض أن الطول = س سم ، العرض = ص سم

∴ س − ص = ٤ (١)

، ٢(س + ص) = ٢٨

∴ س + ص = ١٤ (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ ٢س = ١٨ ∴ س = ٩

وبالتعويض فى (١) : ∴ ص = ٥

∴ الطول = ٩ سم ، العرض = ٥ سم

∴ مساحة المستطيل = ٩ × ٥ = ٤٥ سم^{٢}

٥

∵ جتا (أ + ب) = $\frac{١}{٢}$

∴ أ + ب = ٦٠° (١)

، ∵ ظا (٢أ − ب) = $\sqrt{٣}$

∴ ٢أ − ب = ٦٠° (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ ٣أ = ١٢٠°

∴ أ = $\frac{١٢٠°}{٣}$ = ٤٠°

وبالتعويض فى (١) : ∴ ب = ٢٠°

٦

نفرض أن عدد الفرق العربية = س فريقًا

، نفرض أن عدد الفرق غير العربية = ص فريقًا

∴ س + ص = ١٦ (١)

، ص − ٣س = ٤ بالضرب × −١

∴ ٣س − ص = −٤ (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ ٤س = ١٢ ∴ س = ٣

∴ عدد الفرق العربية = ٣ فرق

٧

نفرض أن عمر الأب = س سنة ، عمر الابن = ص سنة

∴ س + ص = ٥٥ (١)

، س − ٤ص = ٥ (٢)

بضرب المعادلة (٢) × −١

∴ −س + ٤ص = −٥ (٣)

بجمع (١) ، (٣) : ∴ ٥ص = ٥٠ ∴ ص = ١٠

وبالتعويض فى (١) : ∴ س = ٤٥

∴ عمر الابن = ١٠ سنوات ، عمر الأب = ٤٥ سنة

٨

نفرض أن قياس الزاوية الكبرى = س°

، قياس الزاوية الصغرى = ص°

∴ س + ص = ١٨٠ (١)

، ٢س = ٧ص

∴ ٢س − ٧ص = ٠ (٢)

من (١) : س = ١٨٠ − ص (٣)

بالتعويض فى (٢) : ∴ ٢(١٨٠ − ص) − ٧ص = ٠

∴ ٣٦٠ − ٩ص = ٠ ∴ ص = $\frac{٣٦٠}{٩}$ = ٤٠

من (٣) : ∴ س = ١٤٠

∴ قياسا الزاويتين : ١٤٠° ، ٤٠°

٩

نفرض أن قياس الزاوية الأولى = س°

، قياس الزاوية الثانية = ص°

∴ س + ص = ٩٠ (١)

، س − ص = ٥٠ (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ ٢ س = ١٤٠ ∴ س = ٧٠

وبالتعويض فى (١) : ∴ ص = ٢٠

∴ قياسا الزاويتين : ٧٠° ، ٢٠°

١٠

نفرض أن ثمن القلم = س جنيهًا

، ثمن الكتاب = ص جنيهًا

∴ ٤ س + ٢ ص = ٢٢ (١)

، ٥ س + ص = ٢٠ (٢)

وبضرب المعادلة (٢) فى −٢

∴ −١٠ س − ٢ ص = −٤٠ (٣)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ −٦ س = −١٨ ∴ س = ٣

وبالتعويض فى (٢) : ∴ ص = ٥

∴ ثمن القلم = ٣ جنيهات ، ثمن الكتاب = ٥ جنيهات

١١

نفرض أن رقم الآحاد = س و العشرات = ص

∴ س + ص = ٣ س ∴ ٢ س − ص = ٠ (١)

، ص − س = ٤ (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ س = ٤

وبالتعويض فى (٢) : ∴ ص = ٨

∴ العدد هو : ٨٤

١٢

نفرض أن رقم الآحاد = س والعشرات = ص

∴ س + ص = ١١ (١)

، (ص + ١٠ س) − (س + ١٠ ص) = ٢٧

∴ ٩ س − ٩ ص = ٢٧

∴ س − ص = ٣ (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ ٢ س = ١٤ ∴ س = ٧

وبالتعويض فى (١) : ∴ ص = ٤ ∴ العدد = ٤٧

١٣

نفرض أن رقم الآحاد = س و العشرات = ص

∴ س + ١٠ ص = ٥ (س + ص)

∴ ٥ ص − ٤ س = ٠ (١)

، (ص + ١٠ س) − (س + ١٠ ص) = ٩

∴ ٩ س − ٩ ص = ٩ ∴ س − ص = ١

∴ ٥ س − ٥ ص = ٥ (٢)

، بجمع (١) ، (٢) : ∴ س = ٥

وبالتعويض فى (١) : ∴ ص = ٤ ∴ العدد = ٤٥

١٤

نفرض أن العدد النسبى = $\frac{أ}{ب}$

∴ $\frac{أ-١}{ب-١} = \frac{١}{٢}$

∴ ٢أ − ٢ = ب − ١ ∴ ٢أ − ب = ١ (١)

، $\frac{أ}{ب+٥} = \frac{١}{٣}$

∴ ٣أ = ب + ٥ ∴ ٣أ − ب = ٥ (٢)

وبضرب المعادلة (١) × −١

∴ −٢أ + ب = −١ (٣)

وبجمع (٢) ، (٣) : ∴ أ = ٤

وبالتعويض فى (١) : ∴ ب = ٧

∴ العدد النسبى = $\frac{٤}{٧}$

١٥

نفرض أن عمر أحمد الآن = س سنة

، عمر أسامة الآن = ص سنة

∴ س + ص = ٤٣ (١)

، (س + ٥) − (ص + ٥) = ٣

∴ س − ص = ٣ (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ ٢ س = ٤٦ ∴ س = ٢٣

بالتعويض فى (٢) : ∴ ص = ٢٠

∴ عمر أحمد الآن = ٢٣ سنة

، عمر أسامة الآن = ٢٠ سنة

∴ عمر أحمد بعد ٧ سنوات = ٢٣ + ٧ = ٣٠ سنة

، عمر أسامة بعد ٧ سنوات = ٢٠ + ٧ = ٢٧ سنة

١٦

نفرض أن عمر مجدى الآن = س سنة

، عمر ابنته دينا الآن = ص سنة

∴ (س − ٥) = ٥ (ص − ٥)

∴ س − ٥ ص = −٢٠ (١)

، (س + ٤) = ٣ (ص + ٤)

∴ س − ٣ ص = ٨ (٢)

وبطرح (١) من (٢) : ∴ ٢ ص = ٢٨ ∴ ص = ١٤

وبالتعويض فى (١) : ∴ س = ٥٠

∴ عمر مجدى الآن = ٥٠ سنة

، عمر ابنته دينا = ١٤ سنة

١٧

نفرض أن طول المستطيل = س سم ، وعرضه = ص سم

∴ ٢ (س + ص) = ٢٤

∴ س + ص = ١٢ (١)

، س − ٤ = ص + ٢

∴ س − ص = ٦ (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ ٢ س = ١٨ ∴ س = ٩

∴ طول ضلع المربع = ٩ − ٤ = ٥ سم

∴ مساحة المربع = ٢٥ سم^{٢}

١٨

∵ أ ب جـ ء معين

∴ ق (∠ أ جـ ب) = ق (∠ أ جـ ء)

∴ س = $\frac{ص}{٣}$ (١)

، ∵ ق (∠ ب) + ق (∠ ب جـ ء) = ١٨٠°

∴ ص + س + $\frac{ص}{٣}$ = ١٨٠° (٢)

وبالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ ص + $\frac{ص}{٣}$ + $\frac{ص}{٣}$ = ١٨٠°

∴ $\frac{٣ ص}{٣}$ + $\frac{ص}{٣}$ + $\frac{ص}{٣}$ = ١٨٠°

∴ $\frac{٥ ص}{٣}$ = ١٨٠° ∴ ص = ١٨٠° ÷ $\frac{٥}{٣}$ = ١٠٨°

١٩

∵ أ ب = أ جـ ∴ ٢ س + ص = ٨ (١)

، ٢ س + ص + س + ص + ٨ = ٢٢

∴ ٣ س + ٢ ص = ١٤ (٢)

وبضرب المعادلة (١) × (−٢)

∴ −٤ س − ٢ ص = −١٦ (٣)

وبجمع (٢) ، (٣) :

∴ − س = −٢ ∴ س = ٢

، بالتعويض فى (١) : ∴ ص = ٤



١

بفرض أن : $\frac{١}{ل}$ = س ، $\frac{١}{م}$ = ص

∴ س + ص = ٣ (١) ، $\frac{٢}{ل}$ = ٢ س ، $\frac{٣}{م}$ = ٣ ص

∴ ٢ س + ٣ ص = ١٠ (٢)

وبضرب (١) × −٢

∴ −٢ س − ٢ ص = −٦ (٣)

وبجمع (٢) ، (٣) :

∴ ص = ٤ وبالتعويض فى (١) : ∴ س = −١

، ∵ $\frac{١}{ل}$ = س ∴ $\frac{١}{ل}$ = −١ ∴ ل = −١

∵ $\frac{١}{م}$ = ص ∴ $\frac{١}{م}$ = ٤ ∴ م = $\frac{١}{٤}$

٢

نفرض أن عدد الورقات فئة ٢٥ قرشًا = س

، عدد الورقات فئة ٥٠ قرشًا = ص

∴ س + ص = ٢١ (١)

، ٢٥ س + ٥٠ ص = ٨٠٠

وبالقسمة على ٢٥ : ∴ س + ٢ ص = ٣٢ (٢)

وبطرح (١) من (٢) : ∴ ص = ١١

وبالتعويض فى (١) : ∴ س = ١٠

∴ عدد الورقات فئة ٢٥ قرشًا = ١٠ ورقات

، عدد الورقات فئة ٥٠ قرشًا = ١١ ورقة

إجابات تمارين ٢

١

١ (أ) ٢ (أ) ٣ (جـ) ٤ (جـ)

٥ (ب) ٦ (ب) ٧ (جـ) ٨ (أ)

٩ (ب) ١٠ (أ) ١١ (جـ) ١٢ (ب)

٢

١ د (س) = س٢ + ٢ س − ٣

س	−٤	−٣	−٢	−١	٠	١	٢
ص	٥	٠	−٣	−٤	−٣	٠	٥

من الرسم : مجموعة الحل = {−٣ ، ١}

٢ ∵ س٢ + ٢ س − ٣ = ٠

∴ (س + ٣) (س − ١) = ٠

∴ س + ٣ = ٠ ، ومنها س = −٣

أ، س − ١ = ٠ ، ومنها س = ١

∴ مجموعة الحل = {−٣ ، ١}

٣ ∵ أ = ١ ، ب = ٢ ، حـ = −٣

∴ س = (−٢ ± √(٤ + ١٢)) / ٢ = (−٢ ± √١٦) / ٢

= (−٢ ± ٤) / ٢ = −١ ± ٢

∴ م.ح = {−٣ ، ١}

٤ م.ح = {−٣ ، ١}

٣

د (س) = س٢ − ٢ س

س	−١	٠	١	٢	٣
ص	٣	٠	−١	٠	٣

من الرسم : م.ح = {٠ ، ٢}

٤

د (س) = س٢ − ٤ س + ٣

س	−١	٠	١	٢	٣	٤	٥
ص	٨	٣	٠	−١	٠	٣	٨

من الرسم : ١ القيمة الصغرى = −١

٢ معادلة محور التماثل هى : س = ٢

٣ م . ح = {١ ، ٣}

٥

د (س) = −س٢ + ٦ س − ١١

س	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
ص	−١١	−٦	−٣	−٢	−٣	−٦	−١١

من الرسم : م.ح = ∅

٦

د (س) = ٦ س − س٢ − ٩

س	٠	١	٢	٣	٤	٥
ص	−٩	−٤	−١	٠	−١	−٤

من الرسم :

١ القيمة العظمى = ٠ ٢ م.ح = {٣}

٧

١ ∵ أ = ٣ ، ب = −٥ ، حـ = ١

∴ س = (٥ ± √(٢٥ − ١٢)) / ٦ = (٥ ± √١٣) / ٦

∴ س ≈ ١,٤ أ، س ≈ ٠,٢

∴ م.ح = {١,٤ ، ٠,٢}

٢ ∵ أ = ١ ، ب = −٤ ، حـ = ١

∴ س = (٤ ± √(١٦ − ٤)) / ٢ = (٤ ± √١٢) / ٢

∴ س ≈ ٠,٢٧ أ، س ≈ ٣,٧٣

∴ م.ح = {٠,٢٧ ، ٣,٧٣}

٣ ∵ أ = ٢ ، ب = −٤ ، حـ = ١

∴ س = (٤ ± √(١٦ − ٨)) / ٤ = (٤ ± √٨) / ٤

∴ س ≈ ٠,٢٩٣ أ، س ≈ ١,٧٠٧

∴ م.ح = {٠,٢٩٣ ، ١,٧٠٧}

٤ ∵ أ = ٣ ، ب = −٦ ، حـ = ١

∴ س = (٦ ± √(٣٦ − ١٢)) / ٦ = (٦ ± √٢٤) / ٦

∴ س ≈ ٠,١٨٤ أ، س ≈ ١,٨١٦

∴ م.ح = {٠,١٨٤ ، ١,٨١٦}

٥ ∵ أ = ٢ ، ب = ٥ ، حـ = ٠

∴ س = (−٥ ± √(٢٥ − ٠)) / ٤ = (−٥ ± ٥) / ٤

∴ س = صفر / ٤ = ٠ أ، س = −١٠ / ٤ = −٢,٥

∴ م.ح = {٠ ، −٢,٥}

٦ ∵ أ = ١ ، ب = ٣ ، حـ = ٥

∴ س = (−٣ ± √(٩ − ٢٠)) / ٢ = (−٣ ± √−١١) / ٢

∴ م.ح = ∅

٧ ∵ أ = ١ ، ب = ٨ ، حـ = ٩

∴ س = (−٨ ± √(٦٤ − ٣٦)) / ٢ = (−٨ ± ٢√٧) / ٢

= −٤ ± ٢,٦٥

∴ م.ح = {−١,٣٥ ، −٦,٦٥}

٨ ∵ أ = ١ ، ب = -٥ ، حـ = ٢

∴ س = (٥ ± √(٢٥ - ٨)) / ٢ = (٥ ± √١٧) / ٢

= (٥ ± ٤,١٢) / ٢

∴ س ≈ ٤,٥٦ أو س ≈ ٠,٤٤

∴ م.ح = {٤,٥٦ ، ٠,٤٤}

8

١ ∵ س² - ٢س - ٤ = ٠

∴ أ = ١ ، ب = -٢ ، حـ = -٤

∴ س = (٢ ± √(٤ + ١٦)) / ٢ = (٢ ± √٢٠) / ٢

∴ س ≈ ٣,٢٣٦ أو س ≈ -١,٢٣٦

∴ م.ح = {٣,٢٣٦ ، -١,٢٣٦}

٢ ∵ س² - س - ٤ = ٠

∴ أ = ١ ، ب = -١ ، حـ = -٤

∴ س = (١ ± √(١ + ١٦)) / ٢ = (١ ± √١٧) / ٢

∴ س ≈ ٢,٥٦٢ أو س ≈ -١,٥٦٢

∴ م.ح = {٢,٥٦٢ ، -١,٥٦٢}

٣ ∵ ٢س² + ٣س - ٦ = ٠

∴ أ = ٢ ، ب = ٣ ، حـ = -٦

∴ س = (-٣ ± √(٩ + ٤٨)) / ٤ = (-٣ ± √٥٧) / ٤

∴ س ≈ ١,١٣٧ أو س ≈ -٢,٦٣٧

∴ م.ح = {١,١٣٧ ، -٢,٦٣٧}

٤ ∵ س² - ١١س + ٩ = ٠

∴ أ = ١ ، ب = -١١ ، حـ = ٩

∴ س = (١١ ± √(١٢١ - ٣٦)) / ٢ = (١١ ± √٨٥) / ٢

∴ س ≈ ١٠,١١٠ أو س ≈ ٠,٨٩٠

∴ م.ح = {١٠,١١٠ ، ٠,٨٩٠}

٥ بضرب المعادلة فى س :

∴ س² + ٤ = ٦س

∴ س² - ٦س + ٤ = ٠

∴ أ = ١ ، ب = -٦ ، حـ = ٤

∴ س = (٦ ± √(٣٦ - ١٦)) / ٢ = (٦ ± √٢٠) / ٢

∴ س ≈ ٥,٢٣٦ أو س ≈ ٠,٧٦٤

∴ م.ح = {٥,٢٣٦ ، ٠,٧٦٤}

٦ بضرب المعادلة فى س² :

∴ ٨ + س = س²

∴ س² - س - ٨ = ٠

∴ أ = ١ ، ب = -١ ، حـ = -٨

∴ س = (١ ± √(١ + ٣٢)) / ٢ = (١ ± √٣٣) / ٢

∴ س ≈ ٣,٣٧٢ أو س ≈ -٢,٣٧٢

∴ م.ح = {٣,٣٧٢ ، -٢,٣٧٢}

٧ ∵ س(٥ - س) = ٣

∴ ٥س - س² = ٣

∴ -س² + ٥س - ٣ = ٠

∴ أ = -١ ، ب = ٥ ، حـ = -٣

∴ س = (-٥ ± √(٢٥ - ١٢)) / -٢ = (-٥ ± √١٣) / -٢

∴ س ≈ ٤,٣٠٣ أو س ≈ ٠,٦٩٧

∴ م.ح = {٤,٣٠٣ ، ٠,٦٩٧}

٨ بالضرب فى ٩ :

∴ س² - ١٢س = -١٨

∴ س² - ١٢س + ١٨ = ٠

∴ أ = ١ ، ب = -١٢ ، حـ = ١٨

∴ س = (١٢ ± √(١٤٤ - ٧٢)) / ٢ = (١٢ ± √٧٢) / ٢

∴ س ≈ ١٠,٢٤٣ أو س ≈ ١,٧٥٧

∴ م.ح = {١٠,٢٤٣ ، ١,٧٥٧}

تطبيقات على حل معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد

1

∵ -٠,٢ س² + ٢س = ٠

∴ أ = -٠,٢ ، ب = ٢ ، حـ = ٠

∴ س = (-٢ ± √٤) / -٠,٤

∴ س = ١٠ أو س = ٠ (مرفوض)

∴ المسافة التى يقطعها الدولفين من بداية قفزه من الماء ليصطدم بالماء مرة أخرى = ١٠ قدم

2

∵ -٠,٣ س² + ٠,٧٨ س + ٠,٣٨ = ٠

∴ أ = -٠,٣ ، ب = ٠,٧٨ ، حـ = ٠,٣٨

∴ س = (-٠,٧٨ ± √(٠,٦٠٨٤ + ٠,٤٥٦)) / -٠,٦

= (-٠,٧٨ ± √١,٠٦٤٤) / -٠,٦

∴ س ≈ ٣ أو س ≈ -٠,٤ (مرفوض)

∴ البعد الأفقى عن المدفع الذى تصله القذيفة حتى تصطدم بالأرض = ٣ كم تقريباً.

3

∵ ١٦٠ = ٢٤ ن + ٤,٩ ن²

∴ ٤,٩ ن² + ٢٤ ن - ١٦٠ = ٠

∴ أ = ٤,٩ ، ب = ٢٤ ، حـ = -١٦٠

∴ ن = (-٢٤ ± √(٥٧٦ + ٣١٣٦)) / ٩,٨ = (-٢٤ ± √٣٧١٢) / ٩,٨

∴ ن ≈ ٣,٧٧ أو ن ≈ -٨,٦٧ (مرفوض)

∴ يتمكن الثعبان من الهرب فى أقل من ٣,٧٧ ثانية



١ ٢ ٢ {-٣} ٣ ٧ ٤ -١

إجابات تمارين ٣

1

١ بالتعويض من المعادلة الأولى فى الثانية :

∴ (٢ص)² + ص² = ٢٠

∴ ٤ص² + ص² = ٢٠

∴ ٥ص² = ٢٠ ∴ ص² = ٤

∴ ص = ٢ أو ص = -٢

∴ س = ٤ أو س = -٤

∴ م.ح = {(٤ ، ٢) ، (-٤ ، -٢)}

٢ ∵ س - ٣ = ٠ ∴ س = ٣

وبالتعويض فى المعادلة الثانية :

∴ ٩ + ص² = ٢٥ ∴ ص² = ١٦

∴ ص = ٤ أو ص = -٤

∴ م.ح = {(٣ ، ٤) ، (٣ ، -٤)}

٣ ∵ س - ٢ص = ٠ ∴ س = ٢ص (١)

وبالتعويض فى المعادلة الثانية :

∴ (٢ص)² - ص² = ٣

∴ ٤ص² - ص² = ٣

∴ ٣ص² = ٣ ∴ ص² = ١

∴ ص = ١ أو ص = -١

من (١) : ∴ س = ٢ أو س = -٢

∴ م.ح = {(٢ ، ١) ، (-٢ ، -١)}

٤ ∵ س - ص = ٠ ∴ س = ص (١)

وبالتعويض فى المعادلة الثانية :

∴ س² + س × س + س² = ٢٧

∴ ٣س² = ٢٧ ∴ س² = ٩

∴ س = ٣ أو س = -٣

من (١) : ∴ ص = ٣ أو ص = -٣

∴ م.ح = {(٣ ، ٣) ، (-٣ ، -٣)}

٥ ∵ ص − ٢ س = ٠   ∴ ص = ٢ س (١)

وبالتعويض فى المعادلة الثانية :

∴ س (٢ س) = ١٨

∴ ٢ س^{٢} = ١٨   ∴ س^{٢} = ٩

∴ س = ٣ أ، س = −٣

من (١) : ∴ ص = ٦ أ، ص = −٦

∴ م.ح = {(٣ ، ٦) ، (−٣ ، −٦)}

٦ ∵ س + ص = ٠   ∴ س = − ص (١)

بالتعويض فى المعادلة الثانية : ∴ ص^{٢} = − ص

∴ ص^{٢} + ص = ٠   ∴ ص (ص + ١) = ٠

∴ ص = ٠ أ، ص = −١

من (١) : ∴ س = ٠ أ، س = ١

∴ م.ح = {(٠ ، ٠) ، (١ ، −١)}

٧ ∵ س − ص = ٠   ∴ س = ص (١)

بالتعويض فى المعادلة الثانية : ∴ ص = ٤/ص

∴ ص^{٢} = ٤

∴ ص = ٢ أ، ص = −٢

من (١) : ∴ س = ٢ أ، س = −٢

∴ م.ح = {(٢ ، ٢) ، (−٢ ، −٢)}

٢

١ بالتعويض من المعادلة الأولى فى الثانية :

∴ (س − ١)^{٢} + س = ٧

∴ س^{٢} − ٢ س + ١ + س − ٧ = ٠

∴ س^{٢} − س − ٦ = ٠

∴ (س − ٣) (س + ٢) = ٠

∴ س = ٣ أ، س = −٢

وبالتعويض فى المعادلة الأولى :

∴ ص = ٢ أ، ص = −٣

∴ م.ح = {(٣ ، ٢) ، (−٢ ، −٣)}

٢ بالتعويض من المعادلة الأولى فى الثانية :

∴ (٥ − ص)^{٢} − ص^{٢} = ٥٥

∴ ٢٥ − ١٠ ص + ص^{٢} − ص^{٢} = ٥٥

∴ −١٠ ص = ٣٠   ∴ ص = −٣

وبالتعويض فى المعادلة الأولى : ∴ س = ٨

∴ م.ح = {(٨ ، −٣)}

٣ ∵ س − ص = ١   ∴ س = ١ + ص (١)

بالتعويض فى المعادلة الثانية :

∴ (١ + ص)^{٢} + ص^{٢} = ٢٥

∴ ١ + ٢ ص + ص^{٢} + ص^{٢} = ٢٥

∴ ٢ ص^{٢} + ٢ ص − ٢٤ = ٠

∴ ص^{٢} + ص − ١٢ = ٠

∴ (ص + ٤) (ص − ٣) = ٠

∴ ص = −٤ أ، ص = ٣

ومن (١) : ∴ س = −٣ أ، س = ٤

∴ م.ح = {(−٣ ، −٤) ، (٤ ، ٣)}

٤ ∵ س − ص − ٢ = ٠ ∴ س = ص + ٢ (١)

بالتعويض فى المعادلة الثانية :

∴ (ص + ٢)^{٢} − ص^{٢} = ٠

∴ ص^{٢} + ٤ ص + ٤ − ص^{٢} = ٠

∴ ٤ ص = −٤   ∴ ص = −١

من (١) : ∴ س = ١   ∴ م.ح = {(١ ، −١)}

٥ ∵ ٢ س + ص = ١٠   ∴ ص = ١٠ − ٢ س (١)

بالتعويض فى المعادلة الثانية :

∴ س^{٢} + (١٠ − ٢ س)^{٢} = ٢٥

∴ س^{٢} + ١٠٠ − ٤٠ س + ٤ س^{٢} − ٢٥ = ٠

∴ ٥ س^{٢} − ٤٠ س + ٧٥ = ٠

∴ س^{٢} − ٨ س + ١٥ = ٠

∴ (س − ٣) (س − ٥) = ٠

∴ س = ٣ أ، س = ٥

من (١) : ∴ ص = ٤ أ، ص = ٠

∴ م.ح = {(٣ ، ٤) ، (٥ ، ٠)}

٦ ∵ ص − س = ٣   ∴ ص = س + ٣ (١)

بالتعويض فى المعادلة الثانية :

∴ س^{٢} − ٢ س + ٣ (س + ٣) = ١٥

∴ س^{٢} − ٢ س + ٣ س + ٩ − ١٥ = ٠

∴ س^{٢} + س − ٦ = ٠

∴ (س + ٣) (س − ٢) = ٠

∴ س = −٣ أ، س = ٢

من (١) : ∴ ص = ٠ أ، ص = ٥

∴ م.ح = {(−٣ ، ٠) ، (٢ ، ٥)}

٧ ∵ ص + ٢ س = ٧

∴ ص = ٧ − ٢ س (١)

بالتعويض فى المعادلة الثانية :

∴ ٢ س^{٢} + س + ٣ (٧ − ٢ س) = ١٩

∴ ٢ س^{٢} + س + ٢١ − ٦ س − ١٩ = ٠

∴ ٢ س^{٢} − ٥ س + ٢ = ٠

∴ (٢ س − ١) (س − ٢) = ٠

∴ س = ١/٢ أ، س = ٢

من (١) : ∴ ص = ٦ أ، ص = ٣

∴ م.ح = {(١/٢ ، ٦) ، (٢ ، ٣)}

٣

١ ∵ س + ص = ٧   ∴ ص = ٧ − س (١)

بالتعويض فى المعادلة الثانية :

∴ س (٧ − س) = ١٢

∴ ٧ س − س^{٢} = ١٢

∴ س^{٢} − ٧ س + ١٢ = ٠

∴ (س − ٣) (س − ٤) = ٠

∴ س = ٣ أ، س = ٤

من (١) : ∴ ص = ٤ أ، ص = ٣

∴ م.ح = {(٣ ، ٤) ، (٤ ، ٣)}

٢ ∵ س + ص = ٥   ∴ ص = ٥ − س (١)

، ∵ س ص/٦ = ١   ∴ س ص = ٦ (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ س (٥ − س) = ٦

∴ ٥ س − س^{٢} − ٦ = ٠

∴ س^{٢} − ٥ س + ٦ = ٠

∴ (س − ٢) (س − ٣) = ٠

∴ س = ٢ أ، س = ٣

من (١) : ∴ ص = ٣ أ، ص = ٢

∴ م.ح = {(٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢)}

٣ ∵ ص − س = ٢   ∴ ص = س + ٢ (١)

بالتعويض فى المعادلة الثانية :

∴ س^{٢} + س (س + ٢) − ٤ = ٠

∴ س^{٢} + س^{٢} + ٢ س − ٤ = ٠

∴ ٢ س^{٢} + ٢ س − ٤ = ٠

∴ س^{٢} + س − ٢ = ٠

∴ (س + ٢) (س − ١) = ٠

∴ س = −٢ أ، س = ١

من (١) : ∴ ص = ٠ أ، ص = ٣

∴ م.ح = {(−٢ ، ٠) ، (١ ، ٣)}

٤ ∵ س − ٢ ص − ١ = ٠

∴ س = ٢ ص + ١ (١)

بالتعويض فى المعادلة الثانية :

∴ (٢ ص + ١)^{٢} − ص (٢ ص + ١) = ٠

∴ ٤ ص^2 + ٤ ص + ١ − ٢ ص^2 − ص = ٠
∴ ٢ ص^2 + ٣ ص + ١ = ٠
∴ (٢ ص + ١) (ص + ١) = ٠
∴ ص = −$\frac{1}{2}$ أ، ص = −١
من (١) : ∴ س = ٠ أ، س = −١
∴ م.ح = {(٠ ، −$\frac{1}{2}$) ، (−١ ، −١)}

[٥] ∵ س + ٢ ص = ٤ ∴ س = ٤ − ٢ ص (١)
وبالتعويض فى المعادلة الثانية :
∴ (٤ − ٢ ص)^2 + ص (٤ − ٢ ص) + ص^2 = ٧
∴ ١٦ − ١٦ ص + ٤ ص^2 + ٤ ص
− ٢ ص^2 + ص^2 − ٧ = ٠
∴ ٣ ص^2 − ١٢ ص + ٩ = ٠
∴ ص^2 − ٤ ص + ٣ = ٠
∴ (ص − ١) (ص − ٣) = ٠
∴ ص = ١ أ، ص = ٣
ومن (١) : ∴ س = ٢ أ، س = −٢
∴ م.ح = {(٢ ، ١) ، (−٢ ، ٣)}

[٦] ∵ ص − س = ٣ ∴ ص = ٣ + س (١)
وبالتعويض فى المعادلة الثانية :
∴ س^2 + (٣ + س)^2 − س (٣ + س) = ١٢
∴ س^2 + ٩ + ٦ س + س^2 − ٣ س − س^2 − ١٢ = ٠
∴ س^2 + ٣ س − ٤ = ٠
∴ (س − ١) (س + ٤) = ٠
∴ س = ١ أ، س = −٤
ومن (١) : ∴ ص = ٤ أ، ص = −١
∴ م.ح = {(١ ، ٤) ، (−٤ ، −١)}

[٧] ∵ س − ص = ١٠ ∴ س = ص + ١٠ (١)
وبالتعويض فى المعادلة الثانية :
∴ (ص + ١٠)^2 − ٤ ص (ص + ١٠) + ص^2 = ٥٢

∴ ص^2 + ٢٠ ص + ١٠٠ − ٤ ص^2
− ٤٠ ص + ص^2 − ٥٢ = ٠
∴ −٢ ص^2 − ٢٠ ص + ٤٨ = ٠
∴ ص^2 + ١٠ ص − ٢٤ = ٠
∴ (ص + ١٢) (ص − ٢) = ٠
∴ ص = −١٢ أ، ص = ٢
من (١) : ∴ س = −٢ أ، س = ١٢
∴ م.ح = {(−٢ ، −١٢) ، (١٢ ، ٢)}

[٤]

[١] بالتعويض من المعادلة الأولى فى الثانية :
∴ ص^2 + ٣ ص − ١٠ = ٠
∴ (ص − ٢) (ص + ٥) = ٠
∴ ص = ٢ أ، ص = −٥
∴ م.ح = {(٠ ، ٢) ، (٠ ، −٥)}

[٢] بالتعويض من المعادلة الثانية فى الأولى :
∴ ص^2 − ٢ ص = ٨ ∴ ص^2 − ٢ ص − ٨ = ٠
∴ (ص + ٢) (ص − ٤) = ٠
∴ ص = −٢ أ، ص = ٤
وبالتعويض فى المعادلة الأولى :
∴ س = ٤ أ، س = ١٦
∴ م.ح = {(٤ ، −٢) ، (١٦ ، ٤)}

[٣] ∵ س^2 + ٢ س ص = ٢
∴ س (س + ٢ ص) = ٢
، ∵ س + ٢ ص = ٢
∴ ٢ س = ٢ ∴ س = ١
وبالتعويض فى المعادلة الأولى :
∴ ١ + ٢ ص = ٢ ∴ ص = $\frac{1}{2}$
∴ م.ح = {(١ ، $\frac{1}{2}$)}

[٤] ∵ س^2 + ٢ س ص + ص^2 + ص = ٦
∴ (س + ص)^2 + ص = ٦
، ∵ س + ص = ٢
∴ ٢^2 + ص = ٦ ∴ ص = ٢
وبالتعويض فى المعادلة الأولى :
∴ س + ٢ = ٢ ∴ س = صفر
∴ م.ح = {(٠ ، ٢)}

[٥] ∵ س + ص = ٢
∴ س = ٢ − ص (١)
، ∵ $\frac{1}{س}$ + $\frac{1}{ص}$ = ٢
∴ ص + س = ٢ س ص
∴ ص + س − ٢ س ص = ٠ (٢)
بالتعويض من (١) فى (٢) :
∴ ص + ٢ − ص − ٢ ص (٢ − ص) = ٠
∴ ص + ٢ − ص − ٤ ص + ٢ ص^2 = ٠
∴ ٢ ص^2 − ٤ ص + ٢ = ٠
∴ ص^2 − ٢ ص + ١ = ٠
∴ (ص − ١)^2 = ٠ ∴ ص = ١
من (١) : ∴ س = ١
∴ م.ح = {(١ ، ١)}

[٥]
[١] (أ) [٢] (د) [٣] (ب) [٤] (د)
[٥] (ب) [٦] (د) [٧] (د) [٨] (أ)

تطبيقات على حل معادلتين فى متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية

[١]
∵ س − ص = ٢ (١)
، س ص = ٢٤ (٢)
من (١) : ∴ س = ٢ + ص (٣)

وبالتعويض من (٣) فى (٢) :
∴ (٢ + ص) ص = ٢٤
∴ ٢ ص + ص^2 = ٢٤
∴ ص^2 + ٢ ص − ٢٤ = ٠
∴ (ص − ٤) (ص + ٦) = ٠
∴ ص = ٤ أ، ص = −٦ (مرفوض)
وبالتعويض فى (٣) : ∴ س = ٦
∴ العددان هما : ٦ ، ٤

[٢]
نفرض أن العددين هما : س ، ص
∴ س + ص = ٩ (١)
، س^2 − ص^2 = ٤٥ (٢)
، من (١) : ∴ س = ٩ − ص (٣)
وبالتعويض من (٣) فى (٢) :
∴ (٩ − ص)^2 − ص^2 = ٤٥
∴ ٨١ − ١٨ ص + ص^2 − ص^2 = ٤٥
∴ ٨١ − ١٨ ص = ٤٥
∴ ٣٦ = ١٨ ص ∴ ص = ٢
وبالتعويض فى (٣) :
∴ س = ٩ − ٢ = ٧
∴ العددان هما : ٧ ، ٢

[٣]
نفرض أن العددين هما : س ، ص
∴ س − ٣ ص = ١ (١)
، س^2 + ص^2 = ١٧ (٢)
من (١) : ∴ س = ١ + ٣ ص (٣)
وبالتعويض فى (٢) : ∴ (١ + ٣ ص)^2 + ص^2 = ١٧
∴ ١ + ٦ ص + ٩ ص^2 + ص^2 − ١٧ = ٠

∴ ١٠ ص^{٢} + ٦ ص − ١٦ = ٠

∴ ٥ ص^{٢} + ٣ ص − ٨ = ٠

∴ (٥ ص + ٨) (ص − ١) = ٠

∴ ص = $\frac{-٨}{٥}$ (مرفوض) أ، ص = ١

ومن (٣) : ∴ س = ٤ ∴ العددان هما : ١ ، ٤

٤

نفرض أن طول المستطيل = س سم ، عرضه = ص سم

∴ (س + ص) × ٢ = ١٨

∴ س + ص = ٩ (١)

، س ص = ١٨ (٢)

من (١) : ∴ ص = ٩ − س (٣)

بالتعويض في (٢) : ∴ س (٩ − س) = ١٨

∴ ٩ س − س^{٢} = ١٨

∴ س^{٢} − ٩ س + ١٨ = ٠

∴ (س − ٣) (س − ٦) = ٠ ∴ س = ٣ أ، س = ٦

وبالتعويض في (٣) : ∴ ص = ٦ أ، ص = ٣

∴ بعدا المستطيل هما : ٦ سم ، ٣ سم

٥

نفرض أن طول المستطيل = س سم ، عرضه = ص سم

∴ س − ص = ٣ (١)

، س ص = ٢٨ (٢)

من (١) : ∴ س = ص + ٣ (٣)

بالتعويض في (٢) : ∴ ص (ص + ٣) = ٢٨

∴ ص^{٢} + ٣ ص − ٢٨ = ٠

∴ (ص + ٧) (ص − ٤) = ٠

∴ ص = −٧ (مرفوض) أ، ص = ٤

بالتعويض في (٣) : ∴ س = ٧

∴ بعدا المستطيل هما : ٧ سم ، ٤ سم

∴ محيط المستطيل = (٧ + ٤) × ٢ = ٢٢ سم

٦

نفرض أن طولي قطري المعين هما : س سم ، ص سم

∴ س − ص = ٤ (١)

، ∵ محيط المعين = ٤٠ سم

∴ طول ضلعه = ١٠ سم

، ∵ قطري المعين متعامدان وينصف كل منهما الآخر

∴ $(\frac{١}{٢}$ س$)^{٢}$ + $(\frac{١}{٢}$ ص$)^{٢}$ = $(١٠)^{٢}$

∴ $\frac{١}{٤}$ س^{٢} + $\frac{١}{٤}$ ص^{٢} = ١٠٠

∴ س^{٢} + ص^{٢} = ٤٠٠ (٢)

من (١) : ∴ س = ص + ٤ (٣)

بالتعويض في (٢) :

∴ (ص + ٤)^{٢} + ص^{٢} = ٤٠٠

∴ ص^{٢} + ٨ ص + ١٦ + ص^{٢} − ٤٠٠ = ٠

∴ ٢ ص^{٢} + ٨ ص − ٣٨٤ = ٠

∴ ص^{٢} + ٤ ص − ١٩٢ = ٠

∴ (ص + ١٦) (ص − ١٢) = ٠

∴ ص = −١٦ (مرفوض) أ، ص = ١٢

بالتعويض في (٣) : ∴ س = ١٦

∴ طولا القطرين هما : ١٦ سم ، ١٢ سم

٧

نفرض أن طول ضلع المربع الأكبر = س أمتار

، طول ضلع المربع الأصغر = ص أمتار

∴ ٤ س − ٤ ص = ٨

∴ س − ص = ٢ (١)

، س^{٢} − ص^{٢} = ٢٠ (٢)

من (١) : ∴ س = ٢ + ص (٣)

وبالتعويض في (٢) : ∴ (٢ + ص)^{٢} − ص^{٢} = ٢٠

∴ ٤ + ٤ ص + ص^{٢} − ص^{٢} = ٢٠

∴ ٤ ص = ١٦ ∴ ص = ٤

ومن (٣) : ∴ س = ٦

∴ طول ضلع المربع الأكبر = ٦ أمتار

، طول ضلع المربع الأصغر = ٤ أمتار

٨

نفرض أن طولي ضلعي القائمة هما :

س سم ، ص سم

∴ س + ص + ١٣ = ٣٠

∴ س + ص = ١٧ (١)

، س^{٢} + ص^{٢} = ١٦٩ (٢)

من (١) : ∴ س = ١٧ − ص (٣)

بالتعويض في (٢) :

∴ (١٧ − ص)^{٢} + ص^{٢} = ١٦٩

∴ ص^{٢} − ٣٤ ص + ٢٨٩ + ص^{٢} − ١٦٩ = ٠

∴ ٢ ص^{٢} − ٣٤ ص + ١٢٠ = ٠

∴ ص^{٢} − ١٧ ص + ٦٠ = ٠

∴ (ص − ١٢) (ص − ٥) = ٠

∴ ص = ١٢ أ، ص = ٥

بالتعويض في (٣) : ∴ س = ٥ أ، س = ١٢

∴ طولا ضلعي القائمة هما : ٥ سم ، ١٢ سم

٩

نفرض أن طول الوتر = س سم

، طول الضلع الآخر = ص سم

∴ س + ص + ٥ = ٣٠

∴ س + ص = ٢٥ (١)

، س^{٢} = ص^{٢} + ٢٥ (٢)

من (١) : ∴ س = ٢٥ − ص (٣)

وبالتعويض في (٢) :

∴ (٢٥ − ص)^{٢} = ص^{٢} + ٢٥

∴ ٦٢٥ − ٥٠ ص + ص^{٢} − ص^{٢} − ٢٥ = ٠

∴ ٦٠٠ − ٥٠ ص = ٠ ∴ ٥٠ ص = ٦٠٠

∴ ص = ١٢ سم

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ٥ = ٣٠ سم^{٢}

١٠

نفرض أن طولي ضلعي القائمة هما : س سم ، ص سم

∴ س − ص = ٣ (١)

، س^{٢} + ص^{٢} = ٢٢٥ (٢)

من (١) : ∴ س = ٣ + ص (٣)

وبالتعويض في (٢) :

∴ (٣ + ص)^{٢} + ص^{٢} = ٢٢٥

∴ ٩ + ٦ ص + ص^{٢} + ص^{٢} − ٢٢٥ = ٠

∴ ٢ ص^{٢} + ٦ ص − ٢١٦ = ٠

∴ ص^{٢} + ٣ ص − ١٠٨ = ٠

∴ (ص + ١٢) (ص − ٩) = ٠

∴ ص = −١٢ (مرفوض) أ، ص = ٩

وبالتعويض في (٣) : ∴ س = ١٢

∴ محيط المثلث = ٩ + ١٢ + ١٥ = ٣٦ سم

١١

∴ س ص = ٧٧ (١)

، س − ٢ = ص + ٢

∴ س = ص + ٤ (٢)

وبالتعويض في (١) : ∴ (ص + ٤) ص = ٧٧

∴ ص^{٢} + ٤ ص − ٧٧ = ٠

∴ (ص + ١١) (ص − ٧) = ٠

∴ ص = −١١ (مرفوض) أ، ص = ٧

بالتعويض في (٢) : ∴ س = ١١

∴ طول ضلع المربع = س - ٢ = ٩ سم

∴ مساحة المربع = ٨١ سم^{2}

١٢

في Δ أ ب حـ :

∵ ق(∠أ) = ٩٠° ، أ ء ⊥ ب حـ

∴ (أ ب)^{2} = ب ء × ب حـ

∴ ص^{2} = س × (س + ص - ١)

∴ ص^{2} = س^{2} + س ص - س (١)

، ∵ ب حـ = ٩ سم

∴ س + ص - ١ = ٩

∴ س = - ص + ١٠ (٢)

وبالتعويض عن (٢) في (١) :

∴ ص^{2} = (- ص + ١٠)^{2} + (- ص + ١٠) ص - (- ص + ١٠)

∴ ص^{2} = ص^{2} - ٢٠ ص + ١٠٠ - ص^{2} + ١٠ ص + ص - ١٠

∴ ص^{2} + ٩ ص - ٩٠ = ٠

∴ (ص - ٦) (ص + ١٥) = ٠

∴ ص = ٦ أ، ص = -١٥ (مرفوض)

وبالتعويض في (٢) : ∴ س = ٤

١٣

نفرض أن رقم الآحاد = س ، رقم العشرات = ص

∴ س = ٢ ص (١)

، س ص = $\frac{1}{2}$ (س + ١٠ ص)

∴ س ص = $\frac{1}{2}$ س + ٥ ص (٢)

بالتعويض من (١) في (٢) :

∴ ٢ ص^{2} = ص + ٥ ص ∴ ٢ ص^{2} = ٦ ص

∴ ٢ ص = ٦ (حيث ص ≠ ٠) ∴ ص = ٣

من (١) : ∴ س = ٦ ∴ العدد هو : ٣٦

١٤

نفرض أن رقم الآحاد س ورقم العشرات ص

∴ ص - س = ١ ∴ ص = س + ١ (١)

، (س + ١٠ ص) (ص + ١٠ س) = ٢٥٢ (٢)

وبالتعويض من (١) في (٢) :

∴ [س + ١٠ (س + ١)] [س + ١ + ١٠ س] = ٢٥٢

∴ (١١ س + ١٠) (١١ س + ١) = ٢٥٢

∴ ١٢١ س^{2} + ١٢١ س + ١٠ - ٢٥٢ = ٠

∴ ١٢١ س^{2} + ١٢١ س - ٢٤٢ = ٠

∴ س^{2} + س - ٢ = ٠ ∴ (س + ٢) (س - ١) = ٠

∴ س = -٢ (مرفوض) أ، س = ١

بالتعويض في (١) : ∴ ص = ٢

∴ العدد الأصلي هو : ٢١

١٥

نفرض أن الإحداثي السيني = س

، الإحداثي الصادي = ص

∴ ص = ٢ س^{2} (١)

∵ النقطة تتحرك على المستقيم

∴ النقطة تحقق معادلته

∴ ٥ س - ٢ ص - ١ = ٠ (٢)

بالتعويض من (١) في (٢) :

∴ ٥ س - ٢ (٢ س^{2}) - ١ = ٠

∴ -٤ س^{2} + ٥ س - ١ = ٠

∴ ٤ س^{2} - ٥ س + ١ = ٠

∴ (٤ س - ١) (س - ١) = ٠

∴ س = $\frac{1}{4}$ أ، س = ١

من (١) : ∴ ص = $\frac{1}{8}$ أ، ص = ٢

∴ النقطة هي : ($\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{8}$) أ، (١ ، ٢)



للمتفوقين

١

∵ س^{2} - ٢ س ص + ص^{2} = ٩

∴ (س - ص)^{2} = ٩ ، ∵ س > ص

∴ س - ص = ٣ ∴ س = ٣ + ص (١)

وبالتعويض في المعادلة : س^{2} + ص^{2} = ١٧

∴ (٣ + ص)^{2} + ص^{2} = ١٧

∴ ٩ + ٦ ص + ص^{2} + ص^{2} - ١٧ = ٠

∴ ٢ ص^{2} + ٦ ص - ٨ = ٠

∴ ص^{2} + ٣ ص - ٤ = ٠

∴ (ص + ٤) (ص - ١) = ٠

∴ ص = -٤ أ، ص = ١

وبالتعويض في (١) :

∴ س = -١ أ، س = ٤

٢

(١) بالتعويض من المعادلة الأولى في الثانية :

∴ ص^{2} - ٢ ص - ٢ = ٠

∴ ص = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{2} - ٤ أ حـ}}{٢ أ}$

∴ ص = $\frac{٢ \pm \sqrt{٤ - ٤ \times ١ \times (-٢)}}{٢ \times ١}$ = $\frac{٢ \pm \sqrt{٤ + ٨}}{٢}$

= $\frac{٢ \pm \sqrt{١٢}}{٢}$ = $\frac{٢ \pm ٢\sqrt{٣}}{٢}$ = ١ ± $\sqrt{٣}$

∴ ص = ١ + $\sqrt{٣}$ أ، ص = ١ - $\sqrt{٣}$

وبالتعويض في المعادلة الأولى

∴ س = ١ + $\sqrt{٣}$ أ، س = ١ - $\sqrt{٣}$

∴ م.ح = {(١ + $\sqrt{٣}$ ، ١ + $\sqrt{٣}$) ، (١ - $\sqrt{٣}$ ، ١ - $\sqrt{٣}$)}

(٢) ∵ $\sqrt{س}$ + ص = ٥

∴ $\sqrt{س}$ = ٥ - ص (١)

وبتربيع الطرفين : ∴ س = ٢٥ - ١٠ ص + ص^{2}

وبالتعويض في المعادلة : س + ص = ٧

∴ ٢٥ - ١٠ ص + ص^{2} + ص = ٧

∴ ص^{2} - ٩ ص + ١٨ = ٠

∴ (ص - ٣) (ص - ٦) = ٠

∴ ص = ٣ وبالتعويض في (١) : ∴ س = ٤

أ، ص = ٦ (مرفوض)

(لأن من المعادلة (١) : ٥ - ٦ = -١ ولا يمكن أن يكون $\sqrt{س}$ عددًا سالبًا)

∴ م.ح = {(٤ ، ٣)}

٣

∵ (-٢ ، ٤) حل للمعادلة : أ س + ب ص = ٢

∴ -٢ أ + ٤ ب = ٢

∴ أ - ٢ ب = -١ ∴ أ = ٢ ب - ١ (١)

، ∵ (-٢ ، ٤) حل للمعادلة : أ ب س ص + ٢ س^{2} = ٠

∴ -٨ أ ب + ٨ = ٠ ∴ أ ب = ١ (٢)

وبالتعويض من (١) في (٢) :

∴ (٢ ب - ١) ب = ١ ∴ ٢ ب^{2} - ب - ١ = ٠

∴ (٢ ب + ١) (ب - ١) = ٠

∴ ب = -$\frac{1}{2}$ (مرفوض) أ، ب = ١

وبالتعويض في (١) : ∴ أ = ١

∴ (أ ، ب) = (١ ، ١)

إجابات الوحدة الثانية

إجابات تمارين ٤

١

١ (د)	٢ (أ)	٣ (ب)	٤ (ب)
٥ (أ)	٦ (جـ)	٧ (جـ)	٨ (جـ)
٩ (د)	١٠ (جـ)	١١ (ب)	١٢ (ب)
١٣ (جـ)	١٤ (أ)	١٥ (أ)	١٦ (د)
١٧ (د)	١٨ (أ)	١٩ (أ)	٢٠ (جـ)
٢١ (جـ)	٢٢ (جـ)		

٢

١ د(س) = ٥ (س + ٢)

∴ ص(د) = {−٢}

٢ د(س) = س (س − ٢)

∴ ص(د) = {٠ ، ٢}

٣ د(س) = (٥ + ٣س) (٥ − ٣س)

∴ ص(د) = {$\frac{-٥}{٣}$ ، $\frac{٥}{٣}$}

٤ د(س) = ٥س (س + ٢) (س − ٢)

∴ ص(د) = {٠ ، ٢ ، −٢}

٥ د(س) = (س − ٥) (س^{٢} + ٥س + ٢٥)

∴ ص(د) = {٥}

٦ د(س) = ٢س (س + ٣) (س^{٢} − ٣س + ٩)

∴ ص(د) = {٠ ، −٣}

٧ د(س) = (س − ٤) (س + ١)

∴ ص(د) = {−١ ، ٤}

٨ د(س) = (٢س + ٣) (س − ٤)

∴ ص(د) = {$\frac{-٣}{٢}$ ، ٤}

٩ د(س) = س^{٢} (٢س − ٣) (س + ٢)

∴ ص(د) = {٠ ، $\frac{٣}{٢}$ ، −٢}

١٠ د(س) = (س + ٢) (س − ٧)

∴ ص(د) = {−٢ ، ٧}

١١ د(س) = (س + ٢) (س − ١)

∴ ص(د) = {−٢ ، ١}

١٢ نضع د(س) على الصورة : س^{٢} + ٢س − ٦ = ٠

∴ أ = ١ ، ب = ٢ ، جـ = −٦

∴ س = $\frac{-٢ \pm \sqrt{٤ + ٢٤}}{٢}$

∴ س = −١ + $\sqrt{٧}$ أ، س = −١ − $\sqrt{٧}$

∴ ص(د) = {−١ + $\sqrt{٧}$ ، −١ − $\sqrt{٧}$}

١٣ نضع د(س) على الصورة : ٢س^{٢} − س + ٥ = ٠

∴ أ = ٢ ، ب = −١ ، جـ = ٥

∴ س = $\frac{١ \pm \sqrt{١ - ٤٠}}{٤}$ = $\frac{١ \pm \sqrt{-٣٩}}{٤}$

∵ $\sqrt{-٣٩}$ ∉ ح ∴ ص(د) = ∅

١٤ د(س) = (س^{٣} − ٤س) − (٣س^{٢} − ١٢)

= س (س^{٢} − ٤) − ٣ (س^{٢} − ٤)

= (س − ٣) (س^{٢} − ٤)

= (س − ٣) (س − ٢) (س + ٢)

∴ ص(د) = {٣ ، ٢ ، −٢}

١٥ د(س) = (س^{٣} − ٨) + (س^{٢} − ٢س)

= (س − ٢) (س^{٢} + ٢س + ٤) + س (س − ٢)

= (س − ٢) (س^{٢} + ٣س + ٤)

∴ ص(د) = {٢}

٣

∵ د(٥) = (٥)^{٣} − ٢(٥)^{٢} − ٧٥

= ١٢٥ − ٥٠ − ٧٥ = ٠

∴ العدد ٥ أحد أصفار الدالة د

٤

∵ ص(د) = {−٢ ، ٢} ∴ د(٢) = ٠

∴ ٢^{٢} + أ = ٠ ∴ ٤ + أ = ٠

∴ أ = −٤

٥

∵ ص(د) = {٠ ، ١} ∴ د(٠) = ٠

∴ ب = ٠

∴ د(س) = أس^{٢} + س

، ∵ د(١) = ٠ ∴ أ × ١^{٢} + ١ = ٠

∴ أ + ١ = ٠ ∴ أ = −١

٦

∵ د(٣) = ٠ ∴ ٩أ + ٣ب + ١٥ = ٠

∴ ٣أ + ب + ٥ = ٠ (١)

، ∵ د(٥) = ٠

∴ ٢٥أ + ٥ب + ١٥ = ٠

∴ ٥أ + ب + ٣ = ٠ (٢)

وبطرح (١) من (٢) :

∴ ٢أ − ٢ = ٠

∴ أ = ١ ومن (١)

∴ ٣ × ١ + ب + ٥ = ٠

∴ ب = −٨

٧

∵ ص(د) = {٢ ، −٢} ∴ د(٢) = ٠

∴ ٢$^{ك+١}$ − ٢٥٦ = ٠ ∴ ٢$^{ك+١}$ = ٢٥٦

∴ ٢$^{ك+١}$ = ٢^{٨} ∴ ك + ١ = ٨

∴ ك = ٧



١

∵ ص(هـ) = {−٢ ، ٠} ∴ هـ(٠) = ٠

∴ جـ = ٠ ، هـ(−٢) = ٠

∴ ٤أ − ٢ب = ٠ ∴ ٢أ − ب = ٠ (١)

، ∵ هـ(٣) = ١٥ ∴ ٩أ + ٣ب = ١٥

∴ ٣أ + ب = ٥ (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ ٥أ = ٥ ∴ أ = ١

بالتعويض فى (١) : ∴ ب = ٢

∴ هـ(س) = س^{٢} + ٢س

∴ هـ(٢) = (٢)^{٢} + ٢ × ٢ = ٨

٢

∵ ص(د) − ص(ر) = {٣}

∴ د(٣) = ٠ ∴ ٩ − ك = ٠ ∴ ك = ٩

∴ د(س) = س^{٢} − ٩

∴ د(س) = (س − ٣) (س + ٣)

∴ ص(د) = {٣ ، −٣} ∴ ص(ر) = {−٣}

∴ ر(−٣) = ٠ ∴ ٢ × −٣ − م = ٠

∴ −٦ − م = ٠ ∴ م = −٦

إجابات تمارين ٥

١

١ مجال ن = ح − {٢}

٢ مجال ن = ح − {−٢}

٣ مجال ن = ح

٤ مجال ن = ح − {٠}

٥ ∵ ن(س) = $\frac{س^{٢} + ١}{س (س - ١)}$

∴ مجال ن = ح − {٠ ، ١}

٦ ∵ ن(س) = $\frac{س^{٢} + ٩}{(س + ٤) (س - ٤)}$

∴ مجال ن = ح − {−٤ ، ٤}

٧ مجال ن = ح

٨ ∵ ن(س) = $\frac{س^{٢} + ٢٥}{س (س^{٢} + ٢٥)}$

∴ مجال ن = ح − {٠}

٩ ∵ ن(س) = $\frac{س^{٢} - ٤}{(س - ٣) (س + ٢)}$

∴ مجال ن = ح − {٣ ، −٢}

١٠ ∵ ن(س) = $\frac{س^{٢} - ٤س + ٣}{٨ (س + ١) (س^{٢} - س + ١)}$

∴ مجال ن = ح − {−١}

١١ ∵ ن(س) = $\frac{س^{٢} - ٥س + ٦}{(س^{٢} + ٩) (س - ٣) (س + ٢)}$

∴ مجال ن = ح − {٣ ، −٢}

12 ∵ $ن(س) = \frac{س^2 - ٣}{س^2 - ٣س + ٥}$

بوضع $س^2 - ٣س + ٥ = ٠$

∴ أ = ١ ، ب = −٣ ، حـ = ٥

∴ $س = \frac{٣ \pm \sqrt{٩ - ٢٠}}{٢} = \frac{٣ \pm \sqrt{-١١}}{٢}$

، ∵ $\sqrt{-١١} \notin ح$ ∴ مجال ن = ح

2

باعتبار أن الكسور الجبرية فى كل مسألة هى : $ن_1$ ، $ن_2$ ، $ن_3$ ، $ن_4$

على الترتيب يكون الحل كالآتى :

1 مجال $ن_1$ = ح ، مجال $ن_2$ = ح − {٠}

∴ المجال المشترك = ح − {٠}

2 مجال $ن_1$ = ح − {−٥} ، مجال $ن_2$ = ح − {٧}

∴ المجال المشترك = ح − {−٥ ، ٧}

3 مجال $ن_1$ = ح − {٢}

∵ $ن_2(س) = \frac{س + ٢}{(س + ٣)(س - ٣)}$

∴ مجال $ن_2$ = ح − {−٣ ، ٣}

∴ المجال المشترك = ح − {٢ ، −٣ ، ٣}

4 ∵ $ن_1(س) = \frac{س}{(س + ٢)(س - ٢)}$

∴ مجال $ن_1$ = ح − {−٢ ، ٢}

، مجال $ن_2$ = ح − {٢}

∴ المجال المشترك = ح − {−٢ ، ٢}

5 ∵ $ن_1(س) = \frac{س^2 + ٣س}{س(س + ٣)(س - ٣)}$

∴ مجال $ن_1$ = ح − {٠ ، −٣ ، ٣}

، $ن_2(س) = \frac{س^2 + ٣س + ٩}{(س - ٣)(س^2 + ٣س + ٩)}$

∴ مجال $ن_2$ = ح − {٣}

∴ المجال المشترك = ح − {٠ ، −٣ ، ٣}

6 ∵ $ن_1(س) = \frac{س - ٤}{(س - ٢)(س - ٣)}$

∴ مجال $ن_1$ = ح − {٢ ، ٣}

، $ن_2(س) = \frac{٢س}{س(س + ٣)(س - ٣)}$

∴ مجال $ن_2$ = ح − {٠ ، −٣ ، ٣}

∴ المجال المشترك = ح − {٢ ، ٣ ، ٠ ، −٣}

7 ∵ $ن_1(س) = \frac{س^2 + ٤}{(س + ٢)(س - ٢)}$

∴ مجال $ن_1$ = ح − {−٢ ، ٢}

، $ن_2(س) = \frac{٧}{(س + ٢)^2}$

∴ مجال $ن_2$ = ح − {−٢}

∴ المجال المشترك = ح − {−٢ ، ٢}

8 مجال $ن_1$ = ح − {−٤}

، مجال $ن_2$ = ح − {٣}

، مجال $ن_3$ = ح

∴ المجال المشترك = ح − {−٤ ، ٣}

9 مجال $ن_1$ = ح

، ∵ $ن_2(س) = \frac{٣}{(س + ٣)(س - ٣)}$

∴ مجال $ن_2$ = ح − {−٣ ، ٣}

، $ن_3(س) = \frac{٧س}{س(س - ٣)}$

∴ مجال $ن_3$ = ح − {٠ ، ٣}

∴ المجال المشترك = ح − {٠ ، −٣ ، ٣}

10 ∵ $ن_1(س) = \frac{س^2 - ٤}{(س - ٢)(س - ٣)}$

∴ مجال $ن_1$ = ح − {٢ ، ٣}

، $ن_2(س) = \frac{٧}{(س + ٣)(س - ٣)}$

∴ مجال $ن_2$ = ح − {−٣ ، ٣}

، $ن_3(س) = \frac{س^2 - ٢س - ٤}{(س + ٢)(س - ١)}$

∴ مجال $ن_3$ = ح − {−٢ ، ١}

∴ المجال المشترك = ح − {٢ ، ٣ ، −٣ ، −٢ ، ١}

3

1 (جـ)	2 (د)	3 (أ)	4 (د)
5 (د)	6 (د)	7 (جـ)	8 (جـ)
9 (د)	10 (جـ)	11 (جـ)	12 (جـ)
13 (جـ)	14 (جـ)	15 (أ)	16 (د)
17 (أ)	18 (ب)	19 (أ)	20 (جـ)

4

$ن(س) = \frac{٢س + ١}{(س - ٣)(س - ٢)}$

∴ مجال ن = ح − {٣ ، ٢} ، $ن(٠) = \frac{١}{٦}$

، ن(٢) ليس لها معنى لأن ٢ ∉ مجال ن

5

∵ مجال ن = ح − {٣}

∴ عند س = ٣ فإن المقام = ٠

∴ ٩ − ٣أ + ٩ = ٠

∴ ٣أ = ١٨ ∴ أ = ٦

6

∵ ن(أ) غير معرفة

∴ عند س = أ فإن المقام = ٠

∴ $٤أ^2 - ١٢أ + ٩ = ٠$ ∴ $(٢أ - ٣)^2 = ٠$

∴ ٢أ − ٣ = ٠ ∴ $أ = \frac{٣}{٢}$

7

∵ المجال = ح − {٢ ، م}

∴ عند س = ٢ ∴ $س^2 - ٥س + م = ٠$

∴ ٤ − ٥ × ٢ + م = ٠ ∴ م = ٦

∴ $د(س) = \frac{س}{س^2 - ٥س + ٦}$

∴ $د(س) = \frac{س}{(س - ٢)(س - ٣)}$

∴ مجال د = ح − {٢ ، ٣} ∴ حـ = ٣

8

∵ المجال = ح − {−٢} ∴ عند س = −٢

∴ س + أ = ٠ ∴ −٢ + أ = ٠

∴ أ = ٢ ∴ $د(س) = \frac{س + ب}{س + ٢}$

، ∵ د(٠) = ٣ ∴ $\frac{٠ + ب}{٠ + ٢} = ٣$

∴ $\frac{ب}{٢} = ٣$ ∴ ب = ٦

9

∵ ص(د) = {٤}

∴ عند س = ٤ ∴ $أس^2 - ٦س + ٨ = ٠$

∴ $أ \times ٤^2 - ٦ \times ٤ + ٨ = ٠$ ∴ ١٦أ − ١٦ = ٠

∴ ١٦أ = ١٦ ∴ أ = ١

، ∵ مجال د = ح − {٢}

∴ عند س = ٢ ∴ ب س − ٤ = ٠

∴ ٢ب − ٤ = ٠ ∴ ٢ب = ٤

∴ ب = ٢

للمتفوقين

1

∵ مجال ن = ح − {١ ، ٣}

∴ عند س = ١ فإن : $س^2 + هـ س + و = ٠$

∴ ١ + هـ + و = ٠ ∴ هـ + و = −١ (١)

، عند س = ٣ فإن : $س^2 + هـ س + و = ٠$

∴ ٩ + ٣هـ + و = ٠ ∴ ٣هـ + و = −٩ (٢)

بطرح (١) من (٢) : ∴ ٢هـ = −٨ ∴ هـ = −٤

وبالتعويض فى (١) : ∴ و = ٣

٢

$\because$ المجال المشترك $= \text{ح} - \{٣\}$

، مجال $\text{ن}_١ = \text{ح}$ $\therefore ٣ \notin$ مجال $\text{ن}_٢$

$\therefore$ عند $\text{س} = ٣$ فإن: $\text{س}^٢ - ٦\text{س} - \text{أ} = ٠$

$\therefore ٩ - ١٨ - \text{أ} = ٠$ $\therefore \text{أ} = -٩$

إجابات تمارين ٦

١

[١] $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٢(\text{س}+٤)}{\text{س}+٤}$

$\therefore$ مجال $\text{ن} = \text{ح} - \{-٤\}$ ، $\text{ن}(\text{س}) = ٢$

[٢] $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}(\text{س}-٢)}{\text{س}(\text{س}+٣)}$

$\therefore$ مجال $\text{ن} = \text{ح} - \{٠ ، -٣\}$ ، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}-٢}{\text{س}+٣}$

[٣] $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}(\text{س}-٤)}{(\text{س}-٤)(\text{س}+٤)}$

$\therefore$ مجال $\text{ن} = \text{ح} - \{٤ ، -٤\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}+٤}$

[٤] $\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س}-٢)(\text{س}+٢)}{(\text{س}-٢)(\text{س}^٢+٢\text{س}+٤)}$

$\therefore$ مجال $\text{ن} = \text{ح} - \{٢\}$ ، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}+٢}{\text{س}^٢+٢\text{س}+٤}$

[٥] $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٤\text{س}(٣\text{س}-٢)}{٢\text{س}(٣\text{س}-٢)}$

$\therefore$ مجال $\text{ن} = \text{ح} - \{٠ ، \frac{٢}{٣}\}$ ، $\text{ن}(\text{س}) = ٢$

[٦] $\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س}-٢)(\text{س}+٢)}{(\text{س}-٢)(\text{س}-٣)}$

$\therefore$ مجال $\text{ن} = \text{ح} - \{٢ ، ٣\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}+٢}{\text{س}-٣}$

[٧] $\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س}-٣)^٢}{٢\text{س}(\text{س}-٣)(\text{س}+٣)}$

$\therefore$ مجال $\text{ن} = \text{ح} - \{٠ ، ٣ ، -٣\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}-٣}{٢\text{س}(\text{س}+٣)}$

[٨] $\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س}+٣)(\text{س}-٢)}{(\text{س}+٣)(\text{س}-٥)}$

$\therefore$ مجال $\text{ن} = \text{ح} - \{-٣ ، ٥\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}-٢}{\text{س}-٥}$

[٩] $\text{ن}(\text{س}) = \frac{(٢\text{س}+٣)(\text{س}+٢)}{(٢\text{س}-١)(٢\text{س}+٣)}$

$\therefore$ مجال $\text{ن} = \text{ح} - \{\frac{١}{٢} ، \frac{-٣}{٢}\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}+٢}{٢\text{س}-١}$

[١٠] $\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س}+١)(\text{س}^٢-\text{س}+١)}{\text{س}(\text{س}^٢-\text{س}+١)}$

$\therefore$ مجال $\text{ن} = \text{ح} - \{٠\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}+١}{\text{س}}$

[١١] $\text{ن}(\text{س}) = \frac{-(\text{س}+٢)(\text{س}-٣)}{(\text{س}-٢)(\text{س}-٣)}$

$\therefore$ مجال $\text{ن} = \text{ح} - \{٢ ، ٣\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{-(\text{س}+٢)}{\text{س}-٢}$

[١٢] $\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س}-٣)(\text{س}-١)}{\text{س}(\text{س}-٣)}$

$\therefore$ مجال $\text{ن} = \text{ح} - \{٠ ، ٣\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}-١}{\text{س}}$

[١٣] $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\frac{\text{س}^٢+١}{\text{س}}}{\frac{٤\text{س}^٢+٤}{\text{س}}}$

$\therefore$ مجال $\text{ن} = \text{ح} - \{٠\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢+١}{٤\text{س}^٢+٤} = \frac{\text{س}^٢+١}{٤(\text{س}^٢+١)} = \frac{١}{٤}$

[١٤] $\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س}^٣-١)+(\text{س}^٢-١)}{\text{س}-١}$

$= \frac{(\text{س}-١)(\text{س}^٢+\text{س}+١)+(\text{س}-١)(\text{س}+١)}{\text{س}-١}$

$= \frac{(\text{س}-١)(\text{س}^٢+٢\text{س}+٢)}{\text{س}-١}$

$\therefore$ مجال $\text{ن} = \text{ح} - \{١\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \text{س}^٢ + ٢\text{س} + ٢$

٢

[١] $\because \text{ن}_١(\text{س}) = \frac{(٢\text{س}-٣)(٢\text{س}+٣)}{٣(٢\text{س}-٣)}$

$\therefore$ مجال $\text{ن}_١ = \text{ح} - \{\frac{٣}{٢}\}$ ، $\text{ن}_١(\text{س}) = \frac{٢\text{س}+٣}{٣}$

، $\because \text{ن}_٢(\text{س}) = \frac{\text{س}(٢\text{س}+٣)}{٣\text{س}}$

$\therefore$ مجال $\text{ن}_٢ = \text{ح} - \{٠\}$ ، $\text{ن}_٢(\text{س}) = \frac{٢\text{س}+٣}{٣}$

$\therefore \text{ن}_١(\text{س}) = \text{ن}_٢(\text{س})$

لجميع قيم $\text{س} \in \text{ح} - \{\frac{٣}{٢} ، ٠\}$

[٢] $\because \text{ن}_١(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢-٣\text{س}+٩}{(\text{س}+٣)(\text{س}^٢-٣\text{س}+٩)}$

$\therefore$ مجال $\text{ن}_١ = \text{ح} - \{-٣\}$

، $\text{ن}_١(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}+٣}$

، $\because \text{ن}_٢(\text{س}) = \frac{٢}{٢(\text{س}+٣)}$

$\therefore$ مجال $\text{ن}_٢ = \text{ح} - \{-٣\}$

، $\text{ن}_٢(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}+٣}$

$\therefore \text{ن}_١(\text{س}) = \text{ن}_٢(\text{س})$ لجميع قيم

$\text{س} \in \text{ح} - \{-٣\}$

[٣] $\because \text{ن}_١(\text{س}) = \frac{(\text{س}-٢)(\text{س}+٢)}{(\text{س}-٢)(\text{س}+٣)}$

$\therefore$ مجال $\text{ن}_١ = \text{ح} - \{٢ ، -٣\}$

، $\text{ن}_١(\text{س}) = \frac{\text{س}+٢}{\text{س}+٣}$

، $\because \text{ن}_٢(\text{س}) = \frac{\text{س}(\text{س}-٢)(\text{س}+٢)}{\text{س}(\text{س}-٣)(\text{س}+٣)}$

$\therefore$ مجال $\text{ن}_٢ = \text{ح} - \{٠ ، ٣ ، -٣\}$

، $\text{ن}_٢(\text{س}) = \frac{\text{س}+٢}{\text{س}+٣}$

$\therefore \text{ن}_١(\text{س}) = \text{ن}_٢(\text{س})$ لجميع قيم

$\text{س} \in \text{ح} - \{٠ ، ٢ ، ٣ ، -٣\}$

[٤] $\because \text{ن}_١(\text{س}) = \frac{(\text{س}+٤)(\text{س}-٣)}{(\text{س}+٤)(\text{س}+١)}$

$\therefore$ مجال $\text{ن}_١ = \text{ح} - \{-٤ ، -١\}$

، $\text{ن}_١(\text{س}) = \frac{\text{س}-٣}{\text{س}+١}$

، $\because \text{ن}_٢(\text{س}) = \frac{(\text{س}-٣)(\text{س}+١)}{(\text{س}+١)^٢}$

$\therefore$ مجال $\text{ن}_٢ = \text{ح} - \{-١\}$ ، $\text{ن}_٢(\text{س}) = \frac{\text{س}-٣}{\text{س}+١}$

$\therefore \text{ن}_١(\text{س}) = \text{ن}_٢(\text{س})$

لجميع قيم $\text{س} \in \text{ح} - \{-٤ ، -١\}$

٣

[١] $\because \text{ن}_١(\text{س}) = \frac{٣\text{س}}{٣(\text{س}-٢)}$

$\therefore$ مجال $\text{ن}_١ = \text{ح} - \{٢\}$ ، $\text{ن}_١(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}-٢}$ (١)

، $\because \text{ن}_٢(\text{س}) = \frac{٢\text{س}}{٢(\text{س}-٢)}$

$\therefore$ مجال $\text{ن}_٢ = \text{ح} - \{٢\}$ ، $\text{ن}_٢(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}-٢}$ (٢)

من (١) ، (٢) : $\therefore \text{ن}_١ = \text{ن}_٢$

[٢] $\because \text{ن}_١(\text{س}) = \frac{\text{س}}{(\text{س}-١)(\text{س}+١)}$ ، $\therefore$ مجال $\text{ن}_١ = \text{ح} - \{-١ ، ١\}$ (١)

، $\because \text{ن}_٢(\text{س}) = \frac{٥\text{س}}{٥(\text{س}-١)(\text{س}+١)}$

∴ مجال $ن_٢$ = ح − {١ ، −١}

، $ن_٢(س) = \frac{س}{(س-١)(س+١)}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $ن_١ = ن_٢$

٣ ∵ $ن_١(س) = \frac{٢ س}{٢ (س+٢)}$

∴ مجال $ن_١$ = ح − {−٢}

، $ن_١(س) = \frac{س}{س+٢}$ (١)

، ∵ $ن_٢(س) = \frac{س(س+٢)}{(س+٢)^٢}$

∴ مجال $ن_٢$ = ح − {−٢}

، $ن_٢(س) = \frac{س}{س+٢}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $ن_١ = ن_٢$

٤ ∵ $ن_١(س) = \frac{(س-١)(س^٢+س+١)}{س(س^٢+س+١)}$

∴ مجال $ن_١$ = ح − {٠}

، $ن_١(س) = \frac{س-١}{س}$ (١)

، ∵ $ن_٢(س) = \frac{(س-١)(س^٢+١)}{س(س^٢+١)}$

∴ مجال $ن_٢$ = ح − {٠}

، $ن_٢(س) = \frac{س-١}{س}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $ن_١ = ن_٢$

٥ ∵ $ن_١(س) = \frac{س(س-١)}{س^٢(س-٢)}$

∴ مجال $ن_١$ = ح − {٠ ، ٢}

، $ن_١(س) = \frac{س-١}{س(س-٢)}$ (١)

، ∵ $ن_٢(س) = \frac{(س-٢)(س-١)}{س(س-٢)^٢}$

∴ مجال $ن_٢$ = ح − {٠ ، ٢}

، $ن_٢(س) = \frac{س-١}{س(س-٢)}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $ن_١ = ن_٢$

٦ ∵ $ن_١(س) = \frac{س^٢}{س^٢(س-١)}$

∴ مجال $ن_١$ = ح − {٠ ، ١}

، $ن_١(س) = \frac{١}{س-١}$ (١)

، ∵ $ن_٢(س) = \frac{س(س^٢+س+١)}{س(س-١)(س^٢+س+١)}$

∴ مجال $ن_٢$ = ح − {٠ ، ١}

، $ن_٢(س) = \frac{١}{س-١}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $ن_١ = ن_٢$

٧ ∵ $ن_١(س) = \frac{س(س^٢+١)}{(س^٣+س^٢)+(س+١)}$

$= \frac{س(س^٢+١)}{س^٢(س+١)+(س+١)}$

$= \frac{س(س^٢+١)}{(س+١)(س^٢+١)}$

∴ مجال $ن_١$ = ح − {−١}

، $ن_١(س) = \frac{س}{س+١}$ (١)

، ∵ $ن_٢(س) = \frac{س}{س+١}$

∴ مجال $ن_٢$ = ح − {−١} (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $ن_١ = ن_٢$

٤

١ ∵ $ن_١(س) = \frac{س-١}{س}$

∴ مجال $ن_١$ = ح − {٠} (١)

، ∵ $ن_٢(س) = \frac{س-١}{س}$

∴ مجال $ن_٢$ = ح − {٠} (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن : $ن_١ = ن_٢$

لأن : $ن_١(س) = ن_٢(س)$

، مجال $ن_١$ = مجال $ن_٢$

٢ ∵ $ن_١(س) = \frac{٢ س(س^٢+٣)}{(س-١)(س^٢+٣)}$

∴ مجال $ن_١$ = ح − {١}

، $ن_١(س) = \frac{٢ س}{س-١}$ (١)

، ∵ $ن_٢(س) = \frac{٢ س}{س-١}$

∴ مجال $ن_٢$ = ح − {١} (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن : $ن_١ = ن_٢$

لأن : $ن_١(س) = ن_٢(س)$

، مجال $ن_١$ = مجال $ن_٢$

٣ ∵ $ن_١(س) = \frac{س+٥}{(س-٥)(س+٥)}$

∴ مجال $ن_١$ = ح − {٥ ، −٥}

، $ن_١(س) = \frac{١}{س-٥}$ (١)

، ∵ $ن_٢(س) = \frac{٣}{٣(س-٥)}$

∴ مجال $ن_٢$ = ح − {٥}

، $ن_٢(س) = \frac{١}{س-٥}$ (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن : $ن_١ \neq ن_٢$

لأن : مجال $ن_١$ ≠ مجال $ن_٢$

٤ ∵ $ن_١(س) = \frac{(س-٢)(س+٣)}{(س+١)(س+٣)}$

∴ مجال $ن_١$ = ح − {−١ ، −٣}

، $ن_١(س) = \frac{س-٢}{س+١}$ (١)

، ∵ $ن_٢(س) = \frac{س-٢}{س+١}$

∴ مجال $ن_٢$ = ح − {−١} (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن : $ن_١ \neq ن_٢$

لأن : مجال $ن_١$ ≠ مجال $ن_٢$

٥ ∵ $ن_١(س) = \frac{(س-٢)(س+٢)}{(س-٢)(س+٣)}$

∴ مجال $ن_١$ = ح − {٢ ، −٣}

، $ن_١(س) = \frac{س+٢}{س+٣}$ (١)

، ∵ $ن_٢(س) = \frac{(س-٢)(س+٢)}{(س-٣)(س+٣)}$

∴ مجال $ن_٢$ = ح − {٣ ، −٣}

، $ن_٢(س) = \frac{س+٢}{س+٣}$ (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن : $ن_١ \neq ن_٢$

لأن : مجال $ن_١$ ≠ مجال $ن_٢$

٦ ∵ $ن_١(س) = \frac{(س+١)(س^٢-س+١)}{س(س^٢-س+١)}$

∴ مجال $ن_١$ = ح − {٠}

، $ن_١(س) = \frac{س+١}{س}$ (١)

، ∵ $ن_٢(س) = \frac{(س^٣+س^٢)+(س+١)}{س(س^٢+١)}$

$= \frac{س^٢(س+١)+(س+١)}{س(س^٢+١)}$

$= \frac{(س^٢+١)(س+١)}{س(س^٢+١)}$

∴ مجال $ن_٢$ = ح − {٠}

، $ن_٢(س) = \frac{س+١}{س}$ (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن : $ن_١ = ن_٢$

لأن : $ن_١(س) = ن_٢(س)$

، مجال $ن_١$ = مجال $ن_٢$

٧ ∵ $\text{ن}_{١}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}} - \frac{١}{\text{س}} = \frac{\text{س} - ١}{\text{س}}$

∴ مجال $\text{ن}_{١} = \text{ح} - \{٠\}$ ، $\text{ن}_{١}(\text{س}) = \frac{\text{س} - ١}{\text{س}}$ (١)

، ∵ مجال $\text{ن}_{٢} = \text{ح} - \{٠\}$ ، $\text{ن}_{٢}(\text{س}) = -\frac{\text{س} - ١}{\text{س}}$ (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن : $\text{ن}_{١} \ne \text{ن}_{٢}$

لأن : $\text{ن}_{١}(\text{س}) \ne \text{ن}_{٢}(\text{س})$

٥

١ (د) ٢ (جـ) ٣ (ب) ٤ (أ)
٥ (ب) ٦ (د) ٧ (ب) ٨ (ب)
٩ (جـ) ١٠ (جـ)

٦

∵ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٤}{\text{س}^{٢} - \text{أ}} = \frac{\text{س} - ٢}{\text{س} + ٢}$

∴ $\frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٢)}{\text{س}^{٢} - \text{أ}} = \frac{\text{س} - ٢}{\text{س} + ٢}$

∴ $\frac{\text{س} - ٢}{\text{س}^{٢} - \text{أ}} = \frac{١}{\text{س} + ٢}$

∴ $(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢) = \text{س}^{٢} - \text{أ}$

∴ $\text{س}^{٢} - ٤ = \text{س}^{٢} - \text{أ}$ ∴ $\text{أ} = ٤$



للمتفوقين

١

∵ $\frac{\text{س}^{٢} - \text{ك}\,\text{س} + \text{م}}{\text{س} - ٣} = \text{س} - ٢$

∴ $\text{س}^{٢} - \text{ك}\,\text{س} + \text{م} = (\text{س} - ٢)(\text{س} - ٣)$

∴ $\text{س}^{٢} - \text{ك}\,\text{س} + \text{م} = \text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦$

∴ $\text{ك} = ٥$ ، $\text{م} = ٦$

٢

∵ مجال $\text{ن}_{١} = \text{ح} - \{-\text{أ}\}$ ∴ $-\text{أ} \notin$ مجال $\text{ن}_{١}$

، ∵ $\text{ن}_{١} = \text{ن}_{٢}$ ∴ $-\text{أ} \notin$ مجال $\text{ن}_{٢}$

∴ $-\text{أ}$ جذر للمعادلة : $\text{س}^{٣} + \text{أ}\text{س}^{٢} + \text{س} + ٥ = ٠$

∴ $(-\text{أ})^{٣} + \text{أ}(-\text{أ})^{٢} - \text{أ} + ٥ = ٠$

∴ $-\text{أ}^{٣} + \text{أ}^{٣} - \text{أ} + ٥ = ٠$ ∴ $-\text{أ} + ٥ = ٠$

∴ $\text{أ} = ٥$ ∴ $\text{ن}_{١}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س} + ٥}$

، $\text{ن}_{٢}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٣} + \text{ب}\,\text{س}}{\text{س}^{٣} + ٥\text{س}^{٢} + \text{س} + ٥}$

، ∵ $\text{ن}_{١} = \text{ن}_{٢}$ ∴ $\text{ن}_{١}(\text{س}) = \text{ن}_{٢}(\text{س})$

∴ $\frac{\text{س}}{\text{س} + ٥} = \frac{\text{س}^{٣} + \text{ب}\,\text{س}}{\text{س}^{٣} + ٥\text{س}^{٢} + \text{س} + ٥}$

∴ $\frac{\text{س}}{\text{س} + ٥} = \frac{\text{س}(\text{س}^{٢} + \text{ب})}{\text{س}^{٢}(\text{س} + ٥) + (\text{س} + ٥)}$

∴ $\frac{\text{س}}{\text{س} + ٥} = \frac{\text{س}(\text{س}^{٢} + \text{ب})}{(\text{س}^{٢} + ١)(\text{س} + ٥)}$ ∴ $\text{ب} = ١$

إجابات تمارين ٧

١

١ (ب) ٢ (أ) ٣ (جـ) ٤ (د)
٥ (جـ) ٦ (ب) ٧ (ب) ٨ (جـ)

٢

١ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٢\text{س}}{\text{س} + ٢} + \frac{٤}{\text{س} + ٢}$

∴ مجال $\text{ن} = \text{ح} - \{-٢\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٢\text{س} + ٤}{\text{س} + ٢} = \frac{٢(\text{س} + ٢)}{\text{س} + ٢} = ٢$

٢ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٣\text{س}}{\text{س} - ٣} - \frac{٩}{\text{س} - ٣}$

∴ مجال $\text{ن} = \text{ح} - \{٣\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٣\text{س} - ٩}{\text{س} - ٣} = \frac{٣(\text{س} - ٣)}{\text{س} - ٣} = ٣$

٣ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٢\text{س}^{٢}}{٢\text{س} + ٥} + \frac{٢\text{س}^{٢} - ٢٥}{٢\text{س} + ٥}$

∴ مجال $\text{ن} = \text{ح} - \left\{\frac{-٥}{٢}\right\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٤\text{س}^{٢} - ٢٥}{٢\text{س} + ٥}$

$= \frac{(٢\text{س} + ٥)(٢\text{س} - ٥)}{٢\text{س} + ٥}$

$= ٢\text{س} - ٥$

٤ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢}}{(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)} - \frac{\text{س}}{(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)}$

∴ مجال $\text{ن} = \text{ح} - \{١ ، -١\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} - \text{س}}{(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)}$

$= \frac{\text{س}(\text{س} - ١)}{(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)} = \frac{\text{س}}{\text{س} + ١}$

٣

١ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}(\text{س} + ٢)} + \frac{\text{س} + ١}{\text{س} + ٢}$

∴ مجال $\text{ن} = \text{ح} - \{٠ ، -٢\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س} + ٢} + \frac{\text{س} + ١}{\text{س} + ٢} = \frac{\text{س} + ٢}{\text{س} + ٢} = ١$

٢ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س} - ٤} - \frac{\text{س} + ٤}{(\text{س} + ٤)(\text{س} - ٤)}$

∴ مجال $\text{ن} = \text{ح} - \{٤ ، -٤\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س} - ٤} - \frac{١}{\text{س} - ٤} = \frac{\text{س} - ١}{\text{س} - ٤}$

٣ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٣)}{\text{س} + ٣} + \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢)}{\text{س} + ٢}$

∴ مجال $\text{ن} = \text{ح} - \{-٣ ، -٢\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = (\text{س} - ٢) + (\text{س} - ٢) = ٢\text{س} - ٤$

٤ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}(\text{س} + ٣)}{(\text{س} + ٣)(\text{س} - ١)} - \frac{\text{س} - ٢}{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ١)}$

∴ مجال $\text{ن} = \text{ح} - \{-٣ ، ١ ، ٢\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س} - ١} - \frac{١}{\text{س} - ١} = \frac{\text{س} - ١}{\text{س} - ١} = ١$

٥ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٤}{(\text{س} + ٢)(\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٤)} + \frac{(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)}{(\text{س} + ٢)(\text{س} - ١)}$

∴ مجال $\text{ن} = \text{ح} - \{-٢ ، ١\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س} + ٢} + \frac{\text{س} + ١}{\text{س} + ٢} = \frac{\text{س} + ٢}{\text{س} + ٢} = ١$

٦ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٢(\text{س} + ٣)}{(\text{س} + ٣)(\text{س} - ٢)} - \frac{\text{س}(\text{س} - ٦)}{(\text{س} - ٦)(\text{س} - ٢)}$

∴ مجال $\text{ن} = \text{ح} - \{-٣ ، ٢ ، ٦\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٢}{\text{س} - ٢} - \frac{\text{س}}{\text{س} - ٢}$

$= \frac{٢ - \text{س}}{\text{س} - ٢} = \frac{-(\text{س} - ٢)}{\text{س} - ٢} = -١$

٧ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س} - ٦}{(٢\text{س} - ٣)(\text{س} - ٦)} + \frac{\text{س} - ٥}{(٢\text{س} - ٣)(\text{س} - ٥)}$

∴ مجال $\text{ن} = \text{ح} - \left\{\frac{٣}{٢} ، ٦ ، ٥\right\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{١}{٢\text{س} - ٣} + \frac{١}{٢\text{س} - ٣} = \frac{٢}{٢\text{س} - ٣}$

٨ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س} + ٢)(\text{س} - ١)}{(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)} - \frac{\text{س} + ٥}{(\text{س} + ٥)(\text{س} + ١)}$

∴ مجال $\text{ن} = \text{ح} - \{١ ، -١ ، -٥\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س} + ٢}{\text{س} + ١} - \frac{١}{\text{س} + ١} = \frac{\text{س} + ١}{\text{س} + ١} = ١$

٩ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٣(\text{س} + ٥)}{(\text{س} + ٢)(\text{س} + ٥)} + \frac{(٢\text{س} + ١)(\text{س} - ٢)}{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢)}$

∴ مجال $\text{ن} = \text{ح} - \{-٢ ، -٥ ، ٢\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٣}{\text{س} + ٢} + \frac{٢\text{س} + ١}{\text{س} + ٢}$

$= \frac{٢\text{س} + ٤}{\text{س} + ٢} = \frac{٢(\text{س} + ٢)}{\text{س} + ٢} = ٢$

١٠ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٣(\text{س}-٢)}{(\text{س}-٢)(\text{س}+٢)} - \frac{\text{س}(\text{س}-٣)}{\text{س}(\text{س}+٢)(\text{س}-٣)}$

∴ مجال ن $= \text{ح} - \{٠ ، ٢ ، -٢ ، ٣\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٣}{\text{س}+٢} - \frac{١}{\text{س}+٢} = \frac{٢}{\text{س}+٢}$

٤

١ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}-٢}{\text{س}} + \frac{\text{س}+٣}{٢\text{س}}$

∴ مجال ن $= \text{ح} - \{٠\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٢(\text{س}-٢)+٣+\text{س}}{٢\text{س}}$

$= \frac{٢\text{س}-٤+٣+\text{س}}{٢\text{س}} = \frac{٣\text{س}-١}{٢\text{س}}$

٢ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}-٢} - \frac{\text{س}}{\text{س}+٢}$

∴ مجال ن $= \text{ح} - \{٢ ، -٢\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}(\text{س}+٢) - \text{س}(\text{س}-٢)}{(\text{س}-٢)(\text{س}+٢)}$

$= \frac{\text{س}^٢+٢\text{س}-\text{س}^٢+٢\text{س}}{(\text{س}-٢)(\text{س}+٢)}$

$= \frac{٤\text{س}}{(\text{س}-٢)(\text{س}+٢)}$

٣ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٢}{\text{س}+٣} + \frac{\text{س}+٣}{\text{س}(\text{س}+٣)}$

∴ مجال ن $= \text{ح} - \{-٣ ، ٠\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٢\text{س}+\text{س}+٣}{\text{س}(\text{س}+٣)} = \frac{٣\text{س}+٣}{\text{س}(\text{س}+٣)}$

٤ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}+٣}{٢\text{س}} - \frac{\text{س}}{٢\text{س}-١}$

∴ مجال ن $= \text{ح} - \{٠ ، \frac{١}{٢}\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س}+٣)(٢\text{س}-١) - ٢\text{س}^٢}{٢\text{س}(٢\text{س}-١)}$

$= \frac{٢\text{س}^٢+٥\text{س}-٣-٢\text{س}^٢}{٢\text{س}(٢\text{س}-١)}$

$= \frac{٥\text{س}-٣}{٢\text{س}(٢\text{س}-١)}$

٥ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}(\text{س}+٢)} + \frac{\text{س}+٢}{(\text{س}+٢)(\text{س}-٢)}$

∴ مجال ن $= \text{ح} - \{٠ ، -٢ ، ٢\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}+٢} + \frac{١}{\text{س}-٢}$

$= \frac{\text{س}-٢+\text{س}+٢}{(\text{س}+٢)(\text{س}-٢)}$

$= \frac{٢\text{س}}{(\text{س}+٢)(\text{س}-٢)}$

٦ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٢\text{س}-١}{(\text{س}-٢)(\text{س}+١)} - \frac{١}{\text{س}-٢}$

∴ مجال ن $= \text{ح} - \{٢ ، -١\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٢\text{س}-١-\text{س}-١}{(\text{س}-٢)(\text{س}+١)}$

$= \frac{\text{س}-٢}{(\text{س}-٢)(\text{س}+١)} = \frac{١}{\text{س}+١}$

٧ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٣\text{س}-٤}{(\text{س}-٣)(\text{س}-٢)} + \frac{٢(\text{س}+٣)}{(\text{س}+٣)(\text{س}-٢)}$

∴ مجال ن $= \text{ح} - \{٣ ، ٢ ، -٣\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٣\text{س}-٤}{(\text{س}-٣)(\text{س}-٢)} + \frac{٢}{\text{س}-٢}$

$= \frac{٣\text{س}-٤+٢\text{س}-٦}{(\text{س}-٣)(\text{س}-٢)}$

$= \frac{٥\text{س}-١٠}{(\text{س}-٣)(\text{س}-٢)}$

$= \frac{٥(\text{س}-٢)}{(\text{س}-٣)(\text{س}-٢)} = \frac{٥}{\text{س}-٣}$

٨ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢+٢\text{س}+٤}{(\text{س}-٢)(\text{س}^٢+٢\text{س}+٤)} + \frac{(\text{س}-٤)(\text{س}+٣)}{(\text{س}-٣)(\text{س}+٣)}$

∴ مجال ن $= \text{ح} - \{٢ ، ٣ ، -٣\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}-٢} + \frac{\text{س}-٤}{\text{س}-٣}$

$= \frac{(\text{س}-٣)+(\text{س}-٢)(\text{س}-٤)}{(\text{س}-٢)(\text{س}-٣)}$

$= \frac{\text{س}-٣+\text{س}^٢-٦\text{س}+٨}{(\text{س}-٢)(\text{س}-٣)}$

$= \frac{\text{س}^٢-٥\text{س}+٥}{(\text{س}-٢)(\text{س}-٣)}$

٩ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٣\text{س}-٢}{(٣\text{س}-٢)(\text{س}+١)} - \frac{٣\text{س}-٤}{(٢\text{س}-٥)(\text{س}+١)}$

∴ مجال ن $= \text{ح} - \{\frac{٢}{٣} ، -١ ، \frac{٥}{٢}\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}+١} - \frac{٣\text{س}-٤}{(٢\text{س}-٥)(\text{س}+١)}$

$= \frac{٢\text{س}-٥-٣\text{س}+٤}{(٢\text{س}-٥)(\text{س}+١)}$

$= \frac{-(\text{س}+١)}{(٢\text{س}-٥)(\text{س}+١)} = \frac{-١}{٢\text{س}-٥}$

١٠ مجال ن $= \text{ح} - \{٣\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س}+٣)(\text{س}-٣) - \text{س}^٢}{\text{س}-٣}$

$= \frac{\text{س}^٢-٩-\text{س}^٢}{\text{س}-٣} = \frac{-٩}{\text{س}-٣}$

٥

١ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢}{\text{س}-١} - \frac{\text{س}}{\text{س}-١}$

∴ مجال ن $= \text{ح} - \{١\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢-\text{س}}{\text{س}-١} = \frac{\text{س}(\text{س}-١)}{\text{س}-١} = \text{س}$

٢ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٣\text{س}(\text{س}+٢)}{(\text{س}-٢)(\text{س}+٢)} - \frac{٦}{\text{س}-٢}$

∴ مجال ن $= \text{ح} - \{٢ ، -٢\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٣\text{س}}{\text{س}-٢} - \frac{٦}{\text{س}-٢} = \frac{٣\text{س}-٦}{\text{س}-٢}$

$= \frac{٣(\text{س}-٢)}{\text{س}-٢} = ٣$

٣ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢+٢\text{س}+٤}{(\text{س}-٢)(\text{س}^٢+٢\text{س}+٤)} + \frac{(\text{س}+٣)(\text{س}-٣)}{(\text{س}+٣)(\text{س}-٢)}$

∴ مجال ن $= \text{ح} - \{٢ ، -٣\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}-٢} + \frac{\text{س}-٣}{\text{س}-٢} = \frac{\text{س}-٢}{\text{س}-٢} = ١$

٤ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}(\text{س}+١)}{(\text{س}-١)(\text{س}+١)} + \frac{\text{س}-٥}{(\text{س}-٥)(\text{س}-١)}$

∴ مجال ن $= \text{ح} - \{-١ ، ١ ، ٥\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}-١} + \frac{١}{\text{س}-١} = \frac{\text{س}+١}{\text{س}-١}$

٥ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٢\text{س}(\text{س}-٤)}{(٢\text{س}-٣)(\text{س}-٤)} - \frac{٣(٢\text{س}+٣)}{(٢\text{س}-٣)(٢\text{س}+٣)}$

∴ مجال ن $= \text{ح} - \{\frac{٣}{٢} ، \frac{-٣}{٢} ، ٤\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٢\text{س}}{٢\text{س}-٣} - \frac{٣}{٢\text{س}-٣} = ١$

٦ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}+٣}{\text{س}^٢-٩} - \frac{٢\text{س}+٢}{\text{س}^٢-٢\text{س}-٣}$

$= \frac{\text{س}+٣}{(\text{س}-٣)(\text{س}+٣)} - \frac{٢(\text{س}+١)}{(\text{س}-٣)(\text{س}+١)}$

∴ مجال ن $= \text{ح} - \{٣ ، -٣ ، -١\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}-٣} - \frac{٢}{\text{س}-٣} = \frac{-١}{\text{س}-٣}$

٧ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٢\text{س}-٦}{\text{س}^٢-٩} + \frac{٨}{\text{س}^٢+٢\text{س}-٣}$

$= \frac{٢(\text{س}-٣)}{(\text{س}-٣)(\text{س}+٣)} + \frac{٨}{(\text{س}+٣)(\text{س}-١)}$

∴ مجال ن $= \text{ح} - \{٣ ، -٣ ، ١\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٢}{\text{س}+٣} + \frac{٨}{(\text{س}+٣)(\text{س}-١)}$

$= \frac{٢(\text{س}-١)+٨}{(\text{س}+٣)(\text{س}-١)}$

$= \frac{٢\text{س}+٦}{(\text{س}+٣)(\text{س}-١)}$

$= \frac{٢(\text{س}+٣)}{(\text{س}+٣)(\text{س}-١)} = \frac{٢}{\text{س}-١}$

[٨] $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}-٥}{(\text{س}-٥)(٢\text{س}-٣)}$

$+ \frac{\text{س}+٣}{-(٢\text{س}-٣)(\text{س}-٦)}$

∴ مجال ن $= \text{ح} - \{٥ ، \frac{٣}{٢} ، ٦\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{١}{٢\text{س}-٣} - \frac{\text{س}+٣}{(٢\text{س}-٣)(\text{س}-٦)}$

$= \frac{\text{س}-٦-\text{س}-٣}{(٢\text{س}-٣)(\text{س}-٦)}$

$= \frac{-٩}{(٢\text{س}-٣)(\text{س}-٦)}$

[٩] $\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س}-٢)(\text{س}+٢)}{(\text{س}+٢)(\text{س}-١)}$

$+ \frac{-٥(٢\text{س}-١)}{-(٢\text{س}-١)(\text{س}-١)}$

∴ مجال ن $= \text{ح} - \{-٢ ، ١ ، \frac{١}{٢}\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}-٢}{\text{س}-١} + \frac{٥}{\text{س}-١} = \frac{\text{س}+٣}{\text{س}-١}$

[١٠] $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}-٣}{(\text{س}-٣)(\text{س}-٤)} + \frac{\text{س}-٣}{\text{س}-٣}$

∴ مجال ن $= \text{ح} - \{٣ ، ٤\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}-٤} + ١$

$= \frac{١}{\text{س}-٤} + \frac{\text{س}-٤}{\text{س}-٤} = \frac{\text{س}-٣}{\text{س}-٤}$

٦

$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}(\text{س}-٥)}{(\text{س}-٣)(\text{س}-٥)}$

$- \frac{\text{س}^٢+٣\text{س}+٩}{(\text{س}-٣)(\text{س}^٢+٣\text{س}+٩)}$

∴ مجال ن $= \text{ح} - \{٥ ، ٣\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}-٣} - \frac{١}{\text{س}-٣} = \frac{\text{س}-١}{\text{س}-٣}$

∴ ن(١) = صفر ، ن(٥) غير معرفة لأن ٥ ∉ مجال ن

٧

$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}+٣}{(\text{س}+٣)^٢} + \frac{\text{س}+٢}{\text{س}+٣}$

∴ مجال ن $= \text{ح} - \{-٣\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}+٣} + \frac{\text{س}+٢}{\text{س}+٣} = \frac{\text{س}+٣}{\text{س}+٣} = ١$

ن(−٣) غير معرفة لأن −٣ ∉ مجال ن

، ن(٢٠١٦) = ١

٨

$\text{ن}(\text{س}) = \frac{١٢}{٣(٢\text{س}-١)(٢\text{س}+١)}$

$- \frac{٢}{٢\text{س}(٢\text{س}-١)}$

∴ مجال ن $= \text{ح} - \{٠ ، \frac{١}{٢} ، -\frac{١}{٢}\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٤}{(٢\text{س}-١)(٢\text{س}+١)}$

$- \frac{١}{\text{س}(٢\text{س}-١)}$

$= \frac{٤\text{س}-(٢\text{س}+١)}{\text{س}(٢\text{س}-١)(٢\text{س}+١)}$

$= \frac{٢\text{س}-١}{\text{س}(٢\text{س}-١)(٢\text{س}+١)}$

$= \frac{١}{\text{س}(٢\text{س}+١)}$

ن(٠) غير معرفة لأن ٠ ∉ مجال ن

، $\text{ن}(-١) = \frac{١}{-١(٢\times-١+١)} = ١$

٩

∵ $\text{ن}_١(\text{س}) = \frac{٣-٢}{\text{س}-١} = \frac{١}{\text{س}-١}$

∴ مجال $\text{ن}_١ = \text{ح} - \{١\}$

، $\text{ن}_١(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}-١}$

، ∵ $\text{ن}_٢(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢}{\text{س}^٢(\text{س}-١)}$

∴ مجال $\text{ن}_٢ = \text{ح} - \{٠ ، ١\}$

، $\text{ن}_٢(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}-١}$ ∴ $\text{ن}_١(\text{س}) = \text{ن}_٢(\text{س})$

لجميع قيم س ∈ ح − {٠ ، ١}

١٠

[١] $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}(\text{س}-٢)}{\text{س}^٢(\text{س}^٢-٣\text{س}+٢)} + \frac{\text{س}^٢-٤}{\text{س}^٢+\text{س}-٢}$

$= \frac{\text{س}(\text{س}-٢)}{\text{س}^٢(\text{س}-٢)(\text{س}-١)}$

$+ \frac{(\text{س}-٢)(\text{س}+٢)}{(\text{س}-١)(\text{س}+٢)}$

∴ مجال ن $= \text{ح} - \{٠ ، ٢ ، ١ ، -٢\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}(\text{س}-١)} + \frac{\text{س}-٢}{\text{س}-١}$

$= \frac{١+\text{س}^٢-٢\text{س}}{\text{س}(\text{س}-١)} = \frac{\text{س}^٢-٢\text{س}+١}{\text{س}(\text{س}-١)}$

$= \frac{(\text{س}-١)^٢}{\text{س}(\text{س}-١)} = \frac{\text{س}-١}{\text{س}}$

[٢] ∵ ن(س) = ٠   ∴ $\frac{\text{س}-١}{\text{س}} = ٠$

∴ س − ١ = ٠   ∴ س = ١

، ∵ ١ ∉ مجال ن   ∴ م . ح = ∅

١١

$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢+\text{س}+١}{\text{س}^٤-\text{س}} - \frac{\text{س}+٣}{\text{س}^٢+٢\text{س}-٣}$

$= \frac{\text{س}^٢+\text{س}+١}{\text{س}(\text{س}-١)(\text{س}^٢+\text{س}+١)}$

$- \frac{\text{س}+٣}{(\text{س}+٣)(\text{س}-١)}$

∴ مجال ن $= \text{ح} - \{٠ ، ١ ، -٣\}$

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}(\text{س}-١)} - \frac{١}{\text{س}-١}$

$= \frac{١-\text{س}}{\text{س}(\text{س}-١)} = \frac{-(\text{س}-١)}{\text{س}(\text{س}-١)} = \frac{-١}{\text{س}}$

، ∵ ن(أ) = −٢   ∴ $\frac{-١}{\text{أ}} = -٢$

∴ −٢أ = −١   ∴ $\text{أ} = \frac{١}{٢}$

١٢

∵ $\frac{\text{ك}+٥-\text{س}^٢}{\text{س}^٢-٣\text{س}}$ معكوسًا جمعيًا للكسر $\frac{\text{س}}{\text{س}-٣}$

∴ $\frac{-(\text{ك}+٥-\text{س}^٢)}{\text{س}(\text{س}-٣)} = \frac{\text{س}}{\text{س}-٣}$

∴ $-(\text{ك}+٥-\text{س}^٢) = \text{س}^٢$

∴ $\text{س}^٢-٥-\text{ك} = \text{س}^٢$

∴ −٥ − ك = ٠   ∴ ك = −٥

١٣

∵ ص($\text{د}_١$) = {٥} ∴ عند س = ٥

∴ س − أ = ٠   ∴ ٥ − أ = ٠   ∴ أ = ٥

، ∵ مجال $\text{د}_١ = \text{ح} - \{٣\}$

∴ عند س = ٣   ∴ س + ب = ٠

∴ ٣ + ب = ٠   ∴ ب = −٣

∴ $\text{د}_١(\text{س}) = \frac{\text{س}-٥}{\text{س}-٣}$

∴ $\text{د}_١(\text{س}) + \text{د}_٢(\text{س}) = \frac{\text{س}-٥}{\text{س}-٣} + \frac{\text{س}-١}{\text{س}-٣}$

∴ المجال = ح − {٣}

، $\text{د}_١(\text{س}) + \text{د}_٢(\text{س})$

$= \frac{\text{س}-٥+\text{س}-١}{\text{س}-٣} = \frac{٢\text{س}-٦}{\text{س}-٣} = \frac{٢(\text{س}-٣)}{\text{س}-٣} = ٢$

١٤

∵ مجال ن = ح − {٠ ، ٤}   ∴ أ = −٤

∴ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{ب}}{\text{س}} + \frac{٩}{\text{س}-٤}$

، ∵ ن(٥) = ٢   ∴ $\frac{\text{ب}}{٥} + ٩ = ٢$

∴ $\frac{\text{ب}}{٥} = -٧$ ∴ ب = −٣٥

للمتفوقين

∵ مجال الكسر الجبرى $\frac{٥}{\text{س}-٢} = \text{ح} - \{٢\}$

∴ مجال الكسر الجبرى $\frac{\text{م}}{٢\text{س}+\text{ك}} = \text{ح} - \{٢\}$

∴ عندما س = ٢ ∴ ٢س + ك = ٠

∴ ٢ × ٢ + ك = ٠ ∴ ك = −٤

، ∵ $\frac{٥}{\text{س}-٢}$ معكوس جمعي للكسر $\frac{\text{م}}{٢\text{س}-٤}$

∴ $\frac{\text{م}}{٢(\text{س}-٢)} = \frac{-٥}{\text{س}-٢}$

∴ $\frac{\text{م}}{٢} = -٥$ ∴ م = −١٠

إجابات تمارين ٨

١

(١) (د)	(٢) (جـ)	(٣) (د)	(٤) (د)
(٥) (أ)	(٦) (د)	(٧) (د)	(٨) (أ)
(٩) (ب)	(١٠) (د)	(١١) (د)	(١٢) (د)
(١٣) (ب)	(١٤) (ب)	(١٥) (د)	(١٦) (أ)
(١٧) (ب)			

٢

(١) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}+٢}{(\text{س}-٢)(\text{س}+٢)} \times \frac{٢(\text{س}-٢)}{\text{س}-٣}$

∴ مجال ن = ح − {٢ ، −٢ ، ٣}

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٢}{\text{س}-٣}$

(٢) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س}+١)^٢}{٢(\text{س}-٤)} \times \frac{\text{س}-٤}{\text{س}+١}$

∴ مجال ن = ح − {٤ ، −١}

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}+١}{٢}$

(٣) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س}-١)(\text{س}^٢+\text{س}+١)}{(\text{س}-١)^٢} \times \frac{٢(\text{س}-١)}{\text{س}^٢+\text{س}+١}$

∴ مجال ن = ح − {١} ، ن(س) = ٢

(٤) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٢(\text{س}-٥)}{(\text{س}-٥)(\text{س}+٥)} \times \frac{\text{س}(\text{س}+٥)}{\text{س}-٣}$

∴ مجال ن = ح − {٥ ، −٥ ، ٣}

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٢\text{س}}{\text{س}-٣}$

(٥) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س}-٤)(\text{س}+١)}{(\text{س}-١)(\text{س}+١)} \times \frac{\text{س}(\text{س}-١)}{\text{س}(\text{س}+٣)}$

∴ مجال ن = ح − {٠ ، ١ ، −١ ، −٣}

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}-٤}{\text{س}+٣}$

(٦) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٣\text{س}(٢\text{س}+١)}{\text{س}+٢} \times \frac{(\text{س}+٢)^٢}{٣(٢\text{س}+١)}$

∴ مجال ن = ح − {−٢ ، $-\frac{١}{٢}$}

، ن(س) = س(س + ٢) = س² + ٢س

(٧) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س}-١)(\text{س}^٢+\text{س}+١)}{\text{س}(\text{س}-١)} \times \frac{\text{س}+٣}{\text{س}^٢+\text{س}+١}$

∴ مجال ن = ح − {٠ ، ١} ، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}+٣}{\text{س}}$

(٨) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٥(\text{س}+١)}{\text{س}+٦} \times \frac{(\text{س}+٦)(\text{س}-٣)}{(\text{س}-٣)(\text{س}+١)}$

∴ مجال ن = ح − {−٦ ، ٣ ، −١}

، ن(س) = ٥ ∴ ن(٢) = ٥

(٩) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}(\text{س}+٢)}{(\text{س}-٣)(\text{س}^٢+٣\text{س}+٩)} \times \frac{\text{س}^٢+٣\text{س}+٩}{\text{س}+٢}$

∴ مجال ن = ح − {٣ ، −٢}

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}-٣}$ ∴ $\text{ن}(٦) = \frac{٦}{٦-٣} = ٢$

، ن(−٢) غير معرفة لأن (−٢) ∉ مجال ن

(١٠) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}+١}{(\text{س}+١)(\text{س}-٢)} \times \frac{(\text{س}+٥)(\text{س}-٢)}{(٣\text{س}+١)(\text{س}+٥)}$

∴ مجال ن = ح − {−١ ، ٢ ، $\frac{-١}{٣}$ ، −٥}

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{١}{٣\text{س}+١}$ ، $\text{ن}(٠) = \frac{١}{٣\times٠+١} = ١$

، ن(−١) غير معرفة لأن (−١) ∉ مجال ن

(١١) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س}-٢)(\text{س}^٢+٢\text{س}+٤)}{(\text{س}-٢)(\text{س}+٥)} \times \frac{٢(\text{س}+٣)}{\text{س}^٢+٢\text{س}+٤}$

∴ مجال ن = ح − {٢ ، −٥}

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٢(\text{س}+٣)}{\text{س}+٥}$

∴ $\text{ن}^{-١}(\text{س}) = \frac{\text{س}+٥}{٢(\text{س}+٣)}$

، مجال $\text{ن}^{-١}$ = ح − {٢ ، −٥ ، −٣}

∴ $\text{ن}^{-١}(١) = \frac{١+٥}{٢(١+٣)} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$

(١٢) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٢(\text{س}-٢)(\text{س}^٢+٢\text{س}+٤)}{(\text{س}-٢)(\text{س}-٥)} \times \frac{(٣\text{س}+٥)(\text{س}-٥)}{\text{س}^٢+٢\text{س}+٤}$

∴ مجال ن = ح − {٢ ، ٥}

، ن(س) = ٢(٣س + ٥) = ٦س + ١٠

(١٣) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س}-٣)(\text{س}+١)}{٥(\text{س}-٣)(\text{س}^٢+٣\text{س}+٩)} \times \frac{٥(\text{س}^٢+٣\text{س}+٩)}{\text{س}+١}$

∴ مجال ن = ح − {٣ ، −١} ، ن(س) = ١

(١٤) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س}-٦)^٢}{\text{س}(\text{س}-٦)} \times \frac{٤(\text{س}+٦)}{-(\text{س}-٦)(\text{س}+٦)}$

∴ مجال ن = ح − {٠ ، ٦ ، −٦}

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{-٤}{\text{س}}$

(١٥) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س}-٢)^٢}{(\text{س}-٢)(\text{س}^٢+٢\text{س}+٤)} \times \frac{\text{س}^٢+٢\text{س}+٤}{(\text{س}-٢)(\text{س}+٢)}$

∴ مجال ن = ح − {٢ ، −٢}

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}-٢}{\text{س}+٢}$

٣

(١) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٣(\text{س}-٥)}{\text{س}+٣} \times \frac{٤(\text{س}+٣)}{٥(\text{س}-٥)}$

∴ مجال ن = ح − {−٣ ، ٥} ، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{١٢}{٥}$

(٢) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}-١}{(\text{س}-١)(\text{س}+١)} \times \frac{(\text{س}-٥)(\text{س}+١)}{\text{س}(\text{س}-٥)}$

∴ مجال ن = ح − {١ ، −١ ، ٠ ، ٥}

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}}$

(٣) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س}+٣)(\text{س}-١)}{\text{س}+٣} \times \frac{\text{س}+١}{(\text{س}-١)(\text{س}+١)}$

∴ مجال ن = ح − {−٣ ، ١ ، −١}

، ن(س) = ١

(٤) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س}-٢)(\text{س}-٥)}{(\text{س}-٥)(\text{س}-١)} \times \frac{١}{\text{س}(\text{س}-٢)}$

∴ مجال ن = ح − {٥ ، ١ ، ٠ ، ٢}

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}(\text{س}-١)}$

(٥) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س}-٥)(\text{س}+٢)}{(\text{س}+٢)(\text{س}-٣)} \times \frac{(\text{س}-٣)^٢}{٢(\text{س}-٥)}$

∴ مجال ن = ح − {−٢ ، ٣ ، ٥}

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{١}{٢}(\text{س}-٣)$

(٦) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س}-٢)(\text{س}-٣)}{(\text{س}-٢)(\text{س}^٢+٢\text{س}+٤)} \times \frac{\text{س}^٢+٢\text{س}+٤}{\text{س}-٣}$

∴ مجال ن = ح − {٢ ، ٣} ، ن(س) = ١

(٧) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س}-١)^٢}{(\text{س}-١)(\text{س}^٢+\text{س}+١)} \times \frac{\text{س}^٢+\text{س}+١}{\text{س}-١}$

∴ مجال ن = ح − {١} ، ن(س) = ١

٨ $ن(س) = \frac{(س - ٣)(س^{٢} + ٣س + ٩)}{(س - ٣)(س + ٣)} \times \frac{٢س}{س(س^{٢} + ٣س + ٩)}$

$\therefore \text{مجال } ن = ح - \{٣ ، -٣ ، ٠\}$

$، ن(س) = \frac{٢}{س + ٣}$

٩ $ن(س) = \frac{س(س - ٣)}{(٢س + ٣)(س - ٢)} \times \frac{(٢س - ٣)(٢س + ٣)}{س(٢س - ٣)}$

$\therefore \text{مجال } ن = ح - \{\frac{-٣}{٢} ، ٢ ، ٠ ، \frac{٣}{٢}\}$

$، ن(س) = \frac{س - ٣}{س - ٢}$

١٠ $ن(س) = \frac{(س + ١)(س - ٢)}{(س - ٢)(س + ٣)} \times \frac{(س + ٣)(س - ٥)}{(س + ١)(س - ٥)}$

$\therefore \text{مجال } ن = ح - \{٢ ، -٣ ، -١ ، ٥\}$

$، ن(س) = ١$

١١ $ن(س) = \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{س(٢س + ٣)} \times \frac{(٢س - ٣)(٢س + ٣)}{٣(س + ٥)(س - ٣)}$

$\therefore \text{مجال } ن = ح - \{٠ ، -\frac{٣}{٢} ، -٥ ، ٣ ، \frac{٣}{٢}\}$

$، ن(س) = \frac{(س + ٣)(٢س - ٣)}{٣س(س + ٥)}$

١٢ $ن(س) = \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{(٢س - ٥)(س + ٢)} \times \frac{س(٣س - ٥)}{(س - ٢)(٦س + ٧)}$

$\therefore \text{مجال } ن = ح - \{\frac{٥}{٣} ، -٢ ، ٢ ، -\frac{٧}{٦} ، ٠\}$

$، ن(س) = \frac{س}{٦س + ٧}$

١٣ $ن(س) = \frac{(س - ١)(س - ٢)}{-(س - ١)(س + ١)} \times \frac{(س - ١)(س - ٥)}{٣(س - ٥)}$

$\therefore \text{مجال } ن = ح - \{١ ، -١ ، ٥\}$

$، ن(س) = \frac{(س - ٢)(س - ١)}{-٣(س + ١)}$

١٤ $ن(س) = \frac{٣(س - ٣)}{(س - ٢)(س - ٣)} \times \frac{-(س - ٢)(س + ٣)}{٢(س + ٣)}$

$\therefore \text{مجال } ن = ح - \{٢ ، ٣ ، -٣\}$

$، ن(س) = -\frac{٣}{٢}$

١٥ $ن(س) = \frac{س - ٢}{س(٢س - ٣)} \times \frac{(٢س + ٣)(٢س - ٣)}{(٢س + ٣)(س - ٢)}$

$\therefore \text{مجال } ن = ح - \{٠ ، \frac{٣}{٢} ، -\frac{٣}{٢} ، ٢\}$

$، ن(س) = \frac{١}{س}$

١٦ $ن(س) = \frac{(س + ٣)(س - ٢)}{(س + ٣)(س + ٢)} \div \frac{س(س^{٢} + ١) - ٢(س^{٢} + ١)}{س^{٢}(س + ٢) + (س + ٢)}$

$= \frac{(س + ٣)(س - ٢)}{(س + ٣)(س + ٢)} \times \frac{(س^{٢} + ١)(س + ٢)}{(س^{٢} + ١)(س - ٢)}$

$\therefore \text{مجال } ن = ح - \{-٣ ، -٢ ، ٢\} ، ن(س) = ١$

٤

$\because \text{مجال } ن = ح - \{١ ، -١\} \quad \therefore \text{عندما } س = ١$

$\therefore س^{٢} - ك = ٠ \quad \therefore ١^{٢} - ك = ٠$

$\therefore ك = ١$

$\therefore ن(س) = \frac{(س - ٢)(س + ١)}{س^{٢} - ١}$

$\therefore ن(س) = \frac{(س - ٢)(س + ١)}{(س - ١)(س + ١)}$

$\therefore ن^{-١}(س) = \frac{(س - ١)(س + ١)}{(س - ٢)(س + ١)}$

$\therefore \text{مجال } ن^{-١} = ح - \{٢ ، -١ ، ١\}$

$، ن^{-١}(س) = \frac{س - ١}{س - ٢}$

٥

١ $ن(س) = \frac{س(س - ٢)}{(س - ٢)(س^{٢} + ٢)}$

$\therefore \text{مجال } ن = ح - \{٢\} ، ن(س) = \frac{س}{س^{٢} + ٢}$

$\therefore ن^{-١}(س) = \frac{س^{٢} + ٢}{س}$

$، \text{مجال } ن^{-١} = ح - \{٢ ، ٠\}$

٢ $\frac{س^{٢} + ٢}{س} = ٣ \quad \therefore س^{٢} - ٣س + ٢ = ٠$

$\therefore (س - ٢)(س - ١) = ٠$

$\therefore س = ٢ \text{ (مرفوض) أ، } س = ١$

٦

$ن(س) = \frac{س(س + ٢)(س + ١)}{س(س + ٢)}$

$\therefore \text{مجال } ن = ح - \{٠ ، -٢\}$

$، ن(س) = س + ١ \quad \therefore ن^{-١}(س) = \frac{١}{س + ١}$

$، \text{مجال } ن^{-١} = ح - \{٠ ، -٢ ، -١\}$

$، ن^{-١}(-٢) \text{ غير معرفة لأن } -٢ \notin \text{ مجال } ن^{-١}$

٧

$\because ن(س) = \frac{س(س - ٢) + س}{س - ٢}$

$= \frac{س^{٢} - ٢س + س}{س - ٢} = \frac{س^{٢} - س}{س - ٢}$

$= \frac{س(س - ١)}{س - ٢}$

$\therefore ن^{-١}(س) = \frac{س - ٢}{س(س - ١)}$

$، \text{مجال } ن^{-١} = ح - \{٢ ، ١ ، ٠\}$

٨

$ن(س) = \frac{(س - ٧)(س + ٧)}{(س - ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤)} \times \frac{س - ٢}{س + ٧}$

$\therefore \text{مجال } ن = ح - \{٢ ، -٧\}$

$، ن(س) = \frac{س - ٧}{س^{٢} + ٢س + ٤}$

$، ن(١) = \frac{١ - ٧}{١ + ٢ + ٤} = \frac{-٦}{٧}$

٩

$ن(س) = \frac{س(س + ١)(س - ٢)}{(س - ٢)(س - ٣)} \times \frac{(س - ٣)(س + ٥)}{س(س + ١)(س + ٥)}$

$\therefore \text{مجال } ن = ح - \{٢ ، ٣ ، ٠ ، -١ ، -٥\}$

$، ن(س) = ١$

$، ن(٧) = ١ ، ن(٣) \text{ غير معرفة لأن } ٣ \notin \text{ مجال } ن$

١٠

$د(س) = \frac{(س + ٣)(س - ٥)}{(س - ٣)(س + ٣)} \times \frac{س(س - ٣)}{(س - ٥)(س + ٥)}$

$\therefore \text{مجال } د = ح - \{٣ ، -٣ ، ٥ ، -٥ ، ٠\}$

$، د(س) = \frac{س}{س + ٥} \quad ، \because د(أ) = \frac{١}{٣}$

$\therefore \frac{أ}{أ + ٥} = \frac{١}{٣} \quad \therefore ٣أ = أ + ٥$

$\therefore ٢أ = ٥ \quad \therefore أ = \frac{٥}{٢}$

١١

$ن_{١}(س) = \frac{(٢س + ٧)}{(٢س - ١)(٢س + ١)} \times \frac{(٢س - ١)(٤س^{٢} + ٢س + ١)}{(٢س + ٧)(٢س - ١)}$

$\therefore \text{مجال } ن_{١} = ح - \{-\frac{٧}{٢} ، -\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٢}\}$

$، ن_{١}(س) = \frac{٤س^{٢} + ٢س + ١}{(٢س - ١)(٢س + ١)}$

$، ن_{٢}(س) = \frac{٣(٢س - ١)(٢س + ١)}{٣(٤س^{٢} + ٢س + ١)}$

$\therefore \text{مجال } ن_{٢} = ح$

$، ن_{٢}(س) = \frac{(٢س - ١)(٢س + ١)}{٤س^{٢} + ٢س + ١}$

$، ن(س) = \frac{٤س^{٢} + ٢س + ١}{(٢س - ١)(٢س + ١)} \times \frac{(٢س - ١)(٢س + ١)}{٤س^{٢} + ٢س + ١}$

$\therefore ن(س) = ١$

$\text{حيث مجال } ن = ح - \{-\frac{٧}{٢} ، -\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٢}\}$

١٢

ن(س) = $\left(\frac{\text{٣(س + ٥)}}{\text{(س + ٥)(س + ٢)}} + \frac{\text{٢س + ١}}{\text{س + ٢}}\right) \times \frac{\text{(س - ٣)(س}^{٢}\text{ + ٣س + ٩)}}{\text{س}^{٢}\text{ + ٣س + ٩}}$

∴ مجال ن = ح - {-٥ ، -٢}

، ن(س) = $\left(\frac{\text{٣}}{\text{س + ٢}} + \frac{\text{٢س + ١}}{\text{س + ٢}}\right)$ × (س - ٣)

= $\left(\frac{\text{٢(س + ٢)}}{\text{(س + ٢)}}\right)$ (س - ٣) = ٢(س - ٣)

، ∵ ن(س) = ٢ ∴ ٢(س - ٣) = ٢

∴ س - ٣ = ١ ∴ س = ٤



للمتفوقين

١

∵ ن(س) × $\text{ن}^{-١}$(س) = ١

∴ $\frac{\text{س}^{٢}\text{ - أس + ١٢}}{\text{(س - ٤)(س + ١)}} \times \frac{\text{س + ١}}{\text{س - ٣}}$ = ١

∴ $\text{س}^{٢}$ - أس + ١٢ = (س - ٤)(س - ٣)

= $\text{س}^{٢}$ - ٧س + ١٢

∴ أ = ٧

٢

ن(س) = $\left[\text{س} + \frac{\text{١}}{\text{س - ٢}}\right] \div \left[\text{٤س} + \frac{\text{٤}}{\text{س - ٢}}\right]$

= $\frac{\text{س(س - ٢) + ١}}{\text{(س - ٢)}} \div \frac{\text{٤س(س - ٢) + ٤}}{\text{(س - ٢)}}$

= $\frac{\text{س}^{٢}\text{ - ٢س + ١}}{\text{س - ٢}} \div \frac{\text{٤س}^{٢}\text{ - ٨س + ٤}}{\text{س - ٢}}$

= $\frac{\text{(س - ١)}^{٢}}{\text{س - ٢}} \times \frac{\text{س - ٢}}{\text{٤(س - ١)}^{٢}}$

∴ مجال ن = ح - {٢ ، ١} ، ن(س) = $\frac{\text{١}}{\text{٤}}$

∴ ن(١) غير معرفة وذلك لأن ١ ∌ مجال ن

، ن(٨) = $\frac{\text{١}}{\text{٤}}$

إجابات الوحدة الثالثة

إجابات تمارين ٩

١

١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤ (د)
٥ (د) ٦ (ب) ٧ (جـ) ٨ (أ)
٩ (أ) ١٠ (أ) ١١ (ب) ١٢ (د)
١٣ (أ)

٢

١ ٠,٧ ٢ ٠,٢ ٣ ٠,٦٥

٣

١ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ ∩ ب)

= $\frac{\text{١}}{\text{٢}} + \frac{\text{٢}}{\text{٣}} - \frac{\text{١}}{\text{٣}} = \frac{\text{٥}}{\text{٦}}$

٢ ∵ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ ∩ ب)

∴ $\frac{\text{٥}}{\text{٨}} = \frac{\text{٣}}{\text{٨}} + \frac{\text{١}}{\text{٢}}$ - ل(أ ∩ ب)

∴ ل(أ ∩ ب) = $\frac{\text{٣}}{\text{٨}} + \frac{\text{١}}{\text{٢}} - \frac{\text{٥}}{\text{٨}} = \frac{\text{١}}{\text{٤}}$

٣ (أ) ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ ∩ ب)

= $\frac{\text{١}}{\text{٢}} + \frac{\text{١}}{\text{٣}} - \frac{\text{١}}{\text{٨}} = \frac{\text{١٧}}{\text{٢٤}}$

(ب) ∵ أ ، ب حدثان متنافيان.

∴ ل(أ ∩ ب) = صفر

∴ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب)

= $\frac{\text{١}}{\text{٢}} + \frac{\text{١}}{\text{٣}} = \frac{\text{٥}}{\text{٦}}$

٤

١ ∵ أ ، ب حدثان متنافيان.

∴ ل(أ ∩ ب) = صفر

∴ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب)

∴ $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$ = ل(أ) + $\frac{\text{١}}{\text{١٢}}$

∴ ل(أ) = $\frac{\text{١}}{\text{٣}} - \frac{\text{١}}{\text{١٢}} = \frac{\text{١}}{\text{٤}}$

٢ ب ⊂ أ

∴ ل(أ) = ل(أ ∪ ب) = $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$

٥

∵ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ ∩ ب)

∴ $\frac{\text{٤}}{\text{٩}} = \frac{\text{١}}{\text{٦}}$ + ل(ب) - $\frac{\text{١}}{\text{١٨}}$

∴ ل(ب) = $\frac{\text{٤}}{\text{٩}} - \frac{\text{١}}{\text{٦}} + \frac{\text{١}}{\text{١٨}} = \frac{\text{١}}{\text{٣}}$

٦

١ ∵ أ ⊂ ب ∴ ل(أ) = ل(أ ∩ ب) = $\frac{\text{٢}}{\text{٥}}$

٢ ∵ أ ⊂ ب ∴ ل(ب) = ل(أ ∪ ب) = $\frac{\text{٤}}{\text{٥}}$

٧

١ ∵ أ ⊂ ب ∴ ل(ب) = ل(أ ∪ ب)

∴ ٢س = ٠,٨ ∴ س = ٠,٤

٢ ∵ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ ∩ ب)

∴ ٠,٨ = ٠,٥ + ٢س - ٠,١

∴ ٢س = ٠,٨ - ٠,٥ + ٠,١ = ٠,٤

∴ س = ٠,٢

٨

١ ل(أ ∩ ب) = $\frac{\text{١}}{\text{١٠}}$

، ل(أ ∪ ب) = $\frac{\text{٦}}{\text{١٠}} = \frac{\text{٣}}{\text{٥}}$

٢ ل(أ ∩ حـ) = صفر ، ل(أ ∪ حـ) = $\frac{\text{٧}}{\text{١٠}}$

٣ ل(ب ∩ حـ) = صفر ، ل(ب ∪ حـ) = $\frac{\text{٦}}{\text{١٠}} = \frac{\text{٣}}{\text{٥}}$

٩

١ ل(أ ∩ ب) = $\frac{\text{١}}{\text{٧}}$ ٢ ل(أ ∪ ب) = $\frac{\text{٧}}{\text{٧}}$ = ١

٣ ل(أ ∩ حـ) = $\frac{\text{٢}}{\text{٧}}$ ٤ ل(أ ∪ حـ) = $\frac{\text{٤}}{\text{٧}}$

٥ ل(ب ∩ حـ) = صفر ٦ ل(ب ∪ حـ) = $\frac{\text{٦}}{\text{٧}}$

٧ ل(أ) + ل(ب) - ل(أ ∩ ب)

= ل(أ ∪ ب) = ١

١٠

١ ل(أ) = $\frac{\text{١٣}}{\text{٢٤}}$

(٢) احتمال وقوع الحدثين أ ، ب معًا = ل (أ ∩ ب)

، ∵ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

∴ $\frac{٥}{٦} = \frac{١٣}{٢٤} + \frac{٥}{١٢}$ − ل (أ ∩ ب)

∴ ل (أ ∩ ب) = $\frac{١٣}{٢٤} + \frac{٥}{١٢} - \frac{٥}{٦} = \frac{١}{٨}$

١١

(١) احتمال أن تكون الكرة المسحوبة زرقاء = $\frac{٥}{١٢}$

(٢) احتمال أن تكون الكرة المسحوبة ليست حمراء

= احتمال أن تكون الكرة المسحوبة زرقاء أو بيضاء

= $\frac{٥}{١٢} + \frac{٣}{١٢} = \frac{٢}{٣}$

(٣) احتمال أن تكون الكرة المسحوبة زرقاء أو حمراء

= $\frac{٥}{١٢} + \frac{٤}{١٢} = \frac{٣}{٤}$

١٢

(١) عدد الكرات السوداء = ٢٥ − (٤ + ٧) = ١٤

احتمال أن تكون الكرة المسحوبة سوداء = $\frac{١٤}{٢٥}$

(٢) احتمال أن تكون الكرة المسحوبة صفراء أو سوداء

= $\frac{٤}{٢٥} + \frac{١٤}{٢٥} = \frac{١٨}{٢٥}$

(٣) احتمال أن تكون الكرة المسحوبة ليست صفراء

= احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو سوداء

= $\frac{٧}{٢٥} + \frac{١٤}{٢٥} = \frac{٢١}{٢٥}$

(٤) احتمال أن تكون الكرة المسحوبة خضراء = صفر

١٣

أ = {٢ ، ٤ ، ٦} ، ب = {١ ، ٣ ، ٥} ، حـ = {٢}

(١) احتمال وقوع الحدثين أ ، ب معًا

= ل (أ ∩ ب) = صفر

(٢) ∵ احتمال وقوع الحدثين أ أو حـ = ل (أ ∪ حـ)

، ل (أ ∩ حـ) = $\frac{١}{٦}$ (حيث أ ∩ حـ = {٢})

∴ ل (أ ∪ حـ) = ل (أ) + ل (حـ) − ل (أ ∩ حـ)

= $\frac{٣}{٦} + \frac{١}{٦} - \frac{١}{٦} = \frac{١}{٢}$

١٤

أولًا : (١) ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨}

(٢) أ = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨}

(٣) ب = {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧}

(٤) حـ = {٤ ، ٨}

ثانيًا : (١) احتمال حدث وقوع الحدثين أ ، ب معًا

= ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٨}$

(٢) احتمال حدث وقوع أحد الحدثين ب أو حـ على الأقل = ل (ب ∪ حـ) = $\frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$

١٥

(١) ل (أ) = $\frac{٦}{٢٠} = \frac{٣}{١٠}$

(٢) ل (ب) = $\frac{٤}{٢٠} = \frac{١}{٥}$

(٣) ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٢٠}$

(٤) ل (أ ∪ ب) = $\frac{٩}{٢٠}$

١٦

(١) احتمال أن يكون العدد المكتوب فرديًا ويقبل القسمة على ٥ = $\frac{٣}{٣٠} = \frac{١}{١٠}$

(٢) احتمال أن يكون العدد المكتوب أوليًا أو يقبل القسمة على ٧ = $\frac{١٣}{٣٠}$

١٧

(١) ل (أ) = $\frac{٥}{٣٠} = \frac{١}{٦}$

(٢) ل (ب) = $\frac{٣}{٣٠} = \frac{١}{١٠}$

(٣) ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٣٠}$

(٤) ل (أ ∪ ب) = $\frac{٧}{٣٠}$

١٨

(١) احتمال حدث أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو تحمل عددًا فرديًا = $\frac{١١}{١٥}$

(٢) احتمال حدث أن تكون الكرة المسحوبة خضراء و تحمل عددًا زوجيًا = $\frac{٤}{١٥}$

١٩

∵ ل (١) + ل (٢) + ل (٣) + ل (٤) + ل (٥) + ل (٦) = ١

، ل (١) = ل (٢) = ل (٣) = ل (٤) = ل (٥)

∴ ٥ ل (١) + ل (٦) = ١

، ∵ ل (٦) = ٣ ل (١) ∴ ٥ ل (١) + ٣ ل (١) = ١

∴ ٨ ل (١) = ١ ∴ ل (١) = $\frac{١}{٨}$

(١) ل (٦) = $\frac{٣}{٨}$

(٢) ∵ حدث ظهور عدد فردى أولى = {٣ ، ٥}

∴ احتمال ظهور عدد فردى أولى = $\frac{٢}{٨} = \frac{١}{٤}$

٢٠

∵ أ ، ب حدثان متنافيان

∴ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب)

∴ ٠,٦٤ = ل (أ) + ل (ب)

∴ ٠,٦٤ = ل (أ) + ٣ ل (أ)

∴ ٠,٦٤ = ٤ ل (أ)

∴ ل (أ) = ٠,١٦ ، ل (ب) = ٠,٤٨

للمتفوقين

١

∵ ل (أ) = ٢ ل (ب) ، ل (ب) = ل (حـ)

∴ ل (أ) + ل (ب) + ل (حـ) = ١

∴ ٢ ل (ب) + ل (ب) + ل (ب) = ١

∴ ٤ ل (ب) = ١ ∴ ل (ب) = $\frac{١}{٤}$ ∴ ل (حـ) = $\frac{١}{٤}$

، ∵ حدث فوز اللاعب ب وحدث فوز اللاعب حـ حدثان متنافيان.

∴ احتمال فوز اللاعب ب أو حـ = ل (ب ∪ حـ)

= $\frac{١}{٤} + \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢}$

٢

∵ ٧ ل (أ ∩ ب) = ٢ − ل (ب)

∴ ل (ب) = ٢ − ٧ ل (أ ∩ ب) (١)

، ∵ ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب) = ل (أ ∪ ب) (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ ل (أ) + ٢ − ٧ ل (أ ∩ ب) − ل (أ ∩ ب) = ل (أ ∪ ب)

∴ $\frac{٢}{٥}$ + ٢ − ٧ ل (أ ∩ ب) − ل (أ ∩ ب) = $\frac{٤}{٥}$

∴ ٨ ل (أ ∩ ب) = $\frac{٨}{٥}$ ∴ ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٥}$

بالتعويض فى (١) : ∴ ل (ب) = $\frac{٣}{٥}$

إجابات تمارين ١٠

١

(١) (ب) (٢) (جـ) (٣) (د) (٤) (ب)

(٥) (د) (٦) (جـ) (٧) (ب) (٨) (أ)

(٩) (ب) (١٠) (أ) (١١) (جـ) (١٢) (ب)

(١٣) (ب) (١٤) (ب) (١٥) (أ) (١٦) (د)

(١٧) (أ) (١٨) (جـ) (١٩) (د) (٢٠) (د)

(٢١) (ب) (٢٢) (أ)

٢

الحدث أ	الحدث أَ	ل (أ)	ل (أَ)	ل (أ) + ل (أَ)
{٢ ، ٤ ، ٦}	{١ ، ٣ ، ٥}	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	١
{١ ، ٢ ، ٤ ، ٥}	{٣ ، ٦}	$\frac{٢}{٣}$	$\frac{١}{٣}$	١
{٥}	{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦}	$\frac{١}{٦}$	$\frac{٥}{٦}$	١
{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}	Ø	١	٠	١

٣

١ ل (أ ∩ ب) = ٢/٦ = ١/٣

٢ ل (أ − ب) = ١/٦

٣ احتمال عدم وقوع الحدث أ = ل (أَ) = ٣/٦ = ١/٢

٤

١ ل (أَ) + ل (بَ) = (١ − ١/٥) + (١ − ٣/٥) = ٦/٥

٢ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

= ١/٥ + ٣/٥ − ١/١٠ = ٧/١٠

٣ ل (أ − ب) = ل (أ) − ل (أ ∩ ب) = ١/٥ − ١/١٠ = ١/١٠

٤ ل (ب − أ) = ل (ب) − ل (أ ∩ ب) = ٣/٥ − ١/١٠ = ١/٢

٥ ل (ف − ب) = ل (بَ) = ٢/٥

٥

١ ل (سَ) = ١ − ل (س) = ١ − ٠,٣٥ = ٠,٦٥

، ل (صَ) = ١ − ل (ص) = ١ − ٠,٤٨ = ٠,٥٢

٢ ∵ ل (س ∪ ص)

= ل (س) + ل (ص) − ل (س ∩ ص)

∴ ل (س ∩ ص)

= ل (س) + ل (ص) − ل (س ∪ ص)

= ٠,٣٥ + ٠,٤٨ − ٠,٦ = ٠,٢٣

٣ ل (س − ص) = ل (س) − ل (س ∩ ص)

= ٠,٣٥ − ٠,٢٣ = ٠,١٢

٤ ل (س ∩ ص)َ = ١ − ل (س ∩ ص)

= ١ − ٠,٢٣ = ٠,٧٧

٦

١ ل (أ) = ل (أ − ب) + ل (أ ∩ ب)

= ١/٤ + ١/١٢ = ١/٣

٢ ل (أ) = ل (أ − ب) = ١/٤

٣ ∵ ب ⊂ أ ∴ ل (أ ∩ ب) = ل (ب) = ١/٣

∴ ل (أ) = ل (أ − ب) + ل (أ ∩ ب)

= ١/٤ + ١/٣ = ٧/١٢

٧

∵ ل (أ) = ل (أَ) ، ل (أ) + ل (أَ) = ١

∴ ل (أ) = ١/٢

١ ل (ب) = ٥/٨ × ١/٢ = ٥/١٦

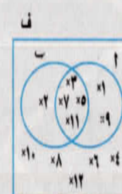
٢ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

= ١/٢ + ٥/١٦ − ١/١٦ = ٣/٤

٣ ل (أ − ب) = ل (أ) − ل (أ ∩ ب)

= ١/٢ − ١/١٦ = ٧/١٦

٨



١ ل (أ) = ٦/١٢ = ١/٢ ، ل (ب) = ٥/١٢

، ل (أَ) = ١ − ل (أ) = ١ − ١/٢ = ١/٢

٢ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

= ١/٢ + ٥/١٢ − ١/٣ = ٧/١٢

، ل (أ − ب) = ل (أ) − ل (أ ∩ ب)

= ١/٢ − ١/٣ = ١/٦

٩

١ احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء = ٨/٢٠ = ٢/٥

٢ احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء أو خضراء

= ٧/٢٠ + ٥/٢٠ = ١٢/٢٠ = ٣/٥

٣ احتمال أن تكون الكرة المسحوبة ليست بيضاء

= ١ − ٧/٢٠ = ١٣/٢٠

١٠

١ احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل = ل (أ ∪ ب)

= ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

= ٠,٦ + ٠,٥ − ٠,٣ = ٠,٨

٢ ل (ب − أ) = ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

= ٠,٥ − ٠,٣ = ٠,٢

٣ ل (أَ) = ١ − ل (أ) = ١ − ٠,٦ = ٠,٤

١١

١ احتمال عدم وقوع الحدثين أ ، ب معًا

= ل (أ ∩ ب)َ = ١ − ل (أ ∩ ب)

= ١ − ٠,٦ = ٠,٤

٢ احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل = ل (أ ∪ ب)

= ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

= ٠,٨ + ٠,٧ − ٠,٦ = ٠,٩

١٢

١ احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل = ل (أ ∪ ب)

= ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

= ٠,٥ + ٠,٦ − ٠,٤ = ٠,٧

٢ احتمال وقوع الحدث ب وعدم وقوع الحدث أ

= ل (ب − أ) = ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

= ٠,٦ − ٠,٤ = ٠,٢

٣ احتمال عدم وقوع الحدث أ = ل (أَ) = ١ − ل (أ)

= ١ − ٠,٥ = ٠,٥

٤ احتمال عدم وقوع أى من الحدثين

= ل (أ ∪ ب)َ = ١ − ل (أ ∪ ب)

= ١ − ٠,٧ = ٠,٣

٥ احتمال وقوع أحد الحدثين دون الآخر

ل (أ − ب) + ل (ب − أ)

= ل (أ) + ل (ب) − ٢ ل (أ ∩ ب)

= ٠,٥ + ٠,٦ − ٢ × ٠,٤ = ٠,٣

٦ احتمال وقوع الحدث أ فقط

= ل (أ − ب) = ل (أ) − ل (أ ∩ ب)

= ٠,٥ − ٠,٤ = ٠,١

١٣

١ ∵ احتمال عدم وقوع الحدث أ = ل (أَ) = ١/٤

∴ ل (أ) = ١ − ل (أَ) = ١ − ١/٤ = ٣/٤

٢ ∵ احتمال وقوع أحد الحدثين على الأكثر

= ل (أ ∩ ب)َ = ٣/٥

∴ احتمال وقوع الحدثين معًا

= ل (أ ∩ ب) = ١ − ل (أ ∩ ب)َ

= ١ − ٣/٥ = ٢/٥

٣ ∵ احتمال عدم وقوع الحدث ب = ل (بَ) = ١/٢

∴ ل (ب) = ١ − ل (بَ) = ١ − ١/٢ = ١/٢

∴ احتمال وقوع أى من الحدثين

= ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

= ٣/٤ + ١/٢ − ٢/٥ = ١٧/٢٠

٤ احتمال وقوع الحدث أ فقط

= ل (أ − ب) = ل (أ) − ل (أ ∩ ب)

= ٣/٤ − ٢/٥ = ٧/٢٠

٥ احتمال وقوع أحد الحدثين فقط

= ل (أ − ب) + ل (ب − أ)

= ل (أ) + ل (ب) − ٢ ل (أ ∩ ب)

= ٣/٤ + ١/٢ − ٢ × ٢/٥ = ٩/٢٠

١٤

١ طالبان

٢ ٤ طلاب

٣ احتمال أن يكون الطالب المختار من لاعبي كرة القدم فقط = $\frac{١٢}{٣٢}$ = $\frac{٣}{٨}$

١٥

بفرض أن أ هو حدث أن يقرأ التلميذ جريدة الأخبار ، بفرض أن ب هو حدث أن يقرأ التلميذ جريدة الأهرام

١ احتمال أن يكون التلميذ يقرأ جريدة الأخبار

= ل (أ) = $\frac{١٨}{٤٠}$ = $\frac{٩}{٢٠}$

٢ احتمال أن يكون التلميذ لا يقرأ جريدة الأخبار

= ل (أ') = ١ - ل (أ) = ١ - $\frac{٩}{٢٠}$ = $\frac{١١}{٢٠}$

٣ احتمال أن يكون التلميذ يقرأ جريدة الأهرام

= ل (ب) = $\frac{١٥}{٤٠}$ = $\frac{٣}{٨}$

٤ احتمال أن يكون التلميذ يقرأ الجريدتين معًا

= ل (أ ∩ ب) = $\frac{٨}{٤٠}$ = $\frac{١}{٥}$

٥ احتمال أن يكون التلميذ يقرأ جريدة الأخبار فقط

= ل (أ - ب) = ل (أ) - ل (أ ∩ ب)

= $\frac{٩}{٢٠}$ - $\frac{١}{٥}$ = $\frac{١}{٤}$

٦ احتمال أن يكون التلميذ يقرأ جريدة الأهرام فقط

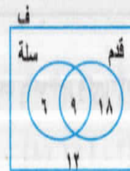
= ل (ب - أ) = ل (ب) - ل (أ ∩ ب)

= $\frac{٣}{٨}$ - $\frac{١}{٥}$ = $\frac{٧}{٤٠}$

٧ احتمال أن يكون التلميذ يقرأ جريدة الأخبار فقط أو جريدة الأهرام فقط = ل (أ - ب) + ل (ب - أ)

= $\frac{١}{٤}$ + $\frac{٧}{٤٠}$ = $\frac{١٧}{٤٠}$

١٦



١ احتمال أن يكون التلميذ المختار مشتركًا في فريق كرة القدم = $\frac{٢٧}{٤٥}$ = $\frac{٣}{٥}$

٢ احتمال أن يكون التلميذ المختار مشتركًا في فريق كرة السلة = $\frac{١٥}{٤٥}$ = $\frac{١}{٣}$

٣ احتمال أن يكون التلميذ المختار مشتركًا في فريق كرة القدم وفريق كرة السلة = $\frac{٩}{٤٥}$ = $\frac{١}{٥}$

٤ احتمال أن يكون التلميذ المختار غير مشترك في أي من الفريقين السابقين = $\frac{١٢}{٤٥}$ = $\frac{٤}{١٥}$

١٧

١ احتمال وقوع الحدثين معًا = ل (أ ∩ ب)

، ∵ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) - ل (أ ∩ ب)

∴ ل (أ ∩ ب) = ل (أ) + ل (ب) - ل (أ ∪ ب)

= ٠,٦ + $\frac{١٢}{٣٠}$ - $\frac{١٣}{١٥}$ = $\frac{٢}{١٥}$

٢ احتمال وقوع أحد الحدثين دون الآخر

= ل (أ - ب) + ل (ب - أ)

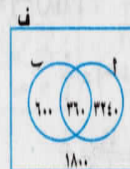
= ل (أ) - ل (أ ∩ ب) + ل (ب) - ل (أ ∩ ب)

= ل (أ) + ل (ب) - ٢ ل (أ ∩ ب)

= ٠,٦ + $\frac{١٢}{٣٠}$ - ٢ × $\frac{٢}{١٥}$ = $\frac{١١}{١٥}$

للمتفوقين

١



١ (١) ل (أ) = $\frac{٣٦٠٠}{٦٠٠٠}$ = $\frac{٣}{٥}$

(٢) ل (ب) = $\frac{٩٦٠}{٦٠٠٠}$ = $\frac{٤}{٢٥}$

٢ (١) ل (أ ∩ ب) = $\frac{٣٦٠}{٦٠٠٠}$ = $\frac{٣}{٥٠}$

(٢) ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) - ل (أ ∩ ب)

= $\frac{٣}{٥}$ + $\frac{٤}{٢٥}$ - $\frac{٣}{٥٠}$ = $\frac{٧}{١٠}$

(٣) ل (أ - ب) = ل (أ) - ل (أ ∩ ب)

= $\frac{٣}{٥}$ - $\frac{٣}{٥٠}$ = $\frac{٢٧}{٥٠}$

(٤) ل (أ ∪ ب)' = ١ - ل (أ ∪ ب)

= ١ - $\frac{٧}{١٠}$ = $\frac{٣}{١٠}$

٣ ∵ احتمال أن تكون الأم تقيم في الحضر وعمرها ٣٠ عامًا فأكثر = $\frac{١٥٠٠}{٦٠٠٠}$ = $\frac{١}{٤}$

∴ عدد المواليد إذا كانت حالات الولادة ٩٠٠٠ حالة

= $\frac{١}{٤}$ × ٩٠٠٠ = ٢٢٥٠ حالة

٢

بفرض البقر به أبيض = أ ، وبه بني = ب

∵ المزرعة بها بقر من اللونين الأبيض والبني

∴ ل (أ ∪ ب) = ١ ، ل (أ) = $\frac{٥}{٧}$ ، ل (ب) = $\frac{١١}{٢٨}$

١ احتمال أن تكون البقرة خليط من اللونين = ل (أ ∩ ب)

، ∵ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) - ل (أ ∩ ب)

∴ ل (أ ∩ ب) = ل (أ) + ل (ب) - ل (أ ∪ ب)

= $\frac{٥}{٧}$ + $\frac{١١}{٢٨}$ - ١ = $\frac{٣}{٢٨}$

٢ احتمال أن تكون البقرة بيضاء فقط

= ل (أ - ب) = ل (أ) - ل (أ ∩ ب)

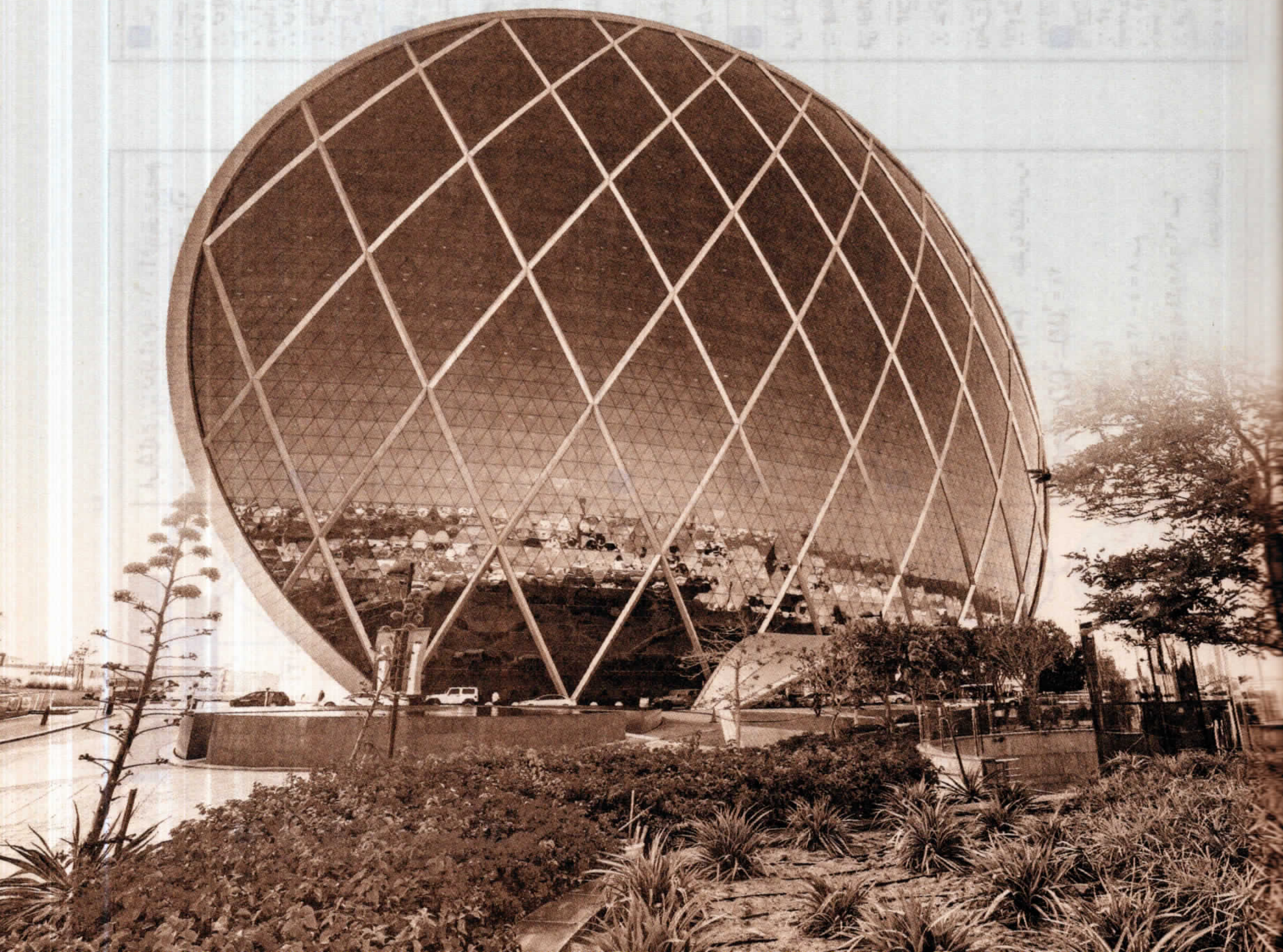
= $\frac{٥}{٧}$ - $\frac{٣}{٢٨}$ = $\frac{١٧}{٢٨}$

إجابات مفاهيم ومهارات أساسية تراكمية

١ (أ)	٢ (د)	٣ (ب)	٤ (د)
٥ (د)	٦ (جـ)	٧ (ب)	٨ (أ)
٩ (جـ)	١٠ (جـ)	١١ (جـ)	١٢ (ب)
١٣ (ب)	١٤ (د)	١٥ (ب)	١٦ (د)
١٧ (ب)	١٨ (أ)	١٩ (جـ)	٢٠ (ب)
٢١ (أ)	٢٢ (د)	٢٣ (أ)	٢٤ (أ)
٢٥ (د)	٢٦ (جـ)	٢٧ (ب)	٢٨ (جـ)

إجابات تمارين

الهندسة



إجابات الوحدة الرابعة

إجابات تمارين ١

١

(١) (د) (٢) (ب) (٣) (جـ) (٤) (ب)

(٥) (د) (٦) (د) (٧) (ب) (٨) (د)

(٩) (د) (١٠) (أ) (١١) (د) (١٢) (ب)

(١٣) (جـ) (١٤) (جـ) (١٥) (أ) (١٦) (جـ)

(١٧) (جـ) (١٨) (ب)

٢

(١) ١٠٠° (٢) ٢٠° (٣) ٥٤° ، ٧٢°

(٤) ١٠٠ ، ٣٥° (٥) ٨٠° ، ٥٠°

(٦) ٢٠° ، ٩٠°

٣

(١) ٤٠° (٢) ١٢٠° (٣) ٥ (٤) ١٦

(٥) ٢٠ (٦) ٤٥° (٧) ٢٤ ، ٨

(٨) ٤٥° ، ٥ √٢ (٩) ٦١٦

٤

(١) ١٢٠° (٢) ٦ (٣) ٦٠

٥

∵ س منتصف حـ ب

∴ م س ⊥ ب حـ

∴ ق(∠ د م س)

= ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ٥٦°)

= ١٢٤° (المطلوب أولاً)

، ∵ م د ⊥ أ ب ∴ د منتصف أ ب

∴ أ د = ٤ سم

في Δ أ د م : ∵ ق(∠ أ د م) = ٩٠° ، م أ = نق = ٥ سم

∴ م د = √((م أ)² − (أ د)²) = √(٢٥ − ١٦) = √٩

= ٣ سم

∴ د هـ = ٥ − ٣ = ٢ سم (المطلوب ثانياً)

٦

∵ م أ = م د = نق ∴ Δ أ م د متساوى الساقين

∴ ق(∠ د أ م) = ق(∠ أ د م) = ٢٥°

∴ ق(∠ د أ حـ) = ٢٥° + ٤٠° = ٦٥°

∴ فى Δ أ د حـ :

ق(∠ أ حـ د) = ١٨٠° − [٢٥° + ٦٥°] = ٩٠°

∴ د حـ ⊥ أ ب ، ∵ م ∈ د حـ

∴ حـ منتصف أ ب (وهو المطلوب)

٧

∵ د منتصف أ ب ∴ م د ⊥ أ ب

∴ ق(∠ ب د م) = ٩٠°

، بالمثل ق(∠ م هـ أ) = ٩٠°

∴ من Δ أ و هـ : ق(∠ د و م) = ٤٥°

، من Δ د و م : ق(∠ د م و) = ٤٥°

∴ Δ د و م متساوى الساقين. (وهو المطلوب)

٨

∵ حـ منتصف أ ب ∴ م د ⊥ أ ب

فى Δ أ حـ م : ∵ ق(∠ أ حـ م) = ٩٠°

∴ (م حـ)² = (أ م)² − (أ حـ)² «نظرية فيثاغورس»

∴ (م حـ)² = (١٣)² − (١٢)² = ٢٥

∴ م حـ = ٥ سم

∴ حـ د = م د − م حـ = ١٣ − ٥ = ٨ سم

∴ مساحة Δ أ د ب = ½ × ٢٤ × ٨ = ٩٦ سم² (وهو المطلوب)

٩

∵ س منتصف أ ب ∴ م س ⊥ أ ب

∴ ق(∠ أ س ص) = ٩٠°

، ∵ أ ب // حـ د ، س ص قاطع لهما.

∴ ق(∠ س ص د) = ق(∠ أ س ص) = ٩٠° (بالتبادل)

∴ م ص ⊥ حـ د

∴ ص منتصف حـ د (وهو المطلوب)

١٠

∵ د منتصف أ ب ∴ م د ⊥ أ ب

، ∵ هـ منتصف أ حـ ∴ م هـ ⊥ أ حـ

∴ ق(∠ د م هـ) = ٣٦٠° − (١٢٠° + ٩٠° + ٩٠°)

= ٦٠°

∴ ق(∠ س م ص) = ق(∠ د م هـ) = ٦٠°

(بالتقابل بالرأس)

، ∵ م س = م ص = نق

∴ Δ س ص م متساوى الأضلاع (وهو المطلوب)

١١

فى الدائرة م الكبرى : ∵ م هـ ⊥ أ ب

∴ هـ منتصف أ ب ∴ أ هـ = هـ ب (١)

فى الدائرة م الصغرى :

∵ م هـ ⊥ حـ د ∴ هـ منتصف حـ د

∴ حـ هـ = هـ د (٢)

وبطرح (٢) من (١) : ∴ أ هـ − حـ هـ = هـ ب − هـ د

∴ أ حـ = ب د (وهو المطلوب)

١٢

∵ م د ⊥ ب حـ ∴ د منتصف ب حـ

، ∵ م هـ ⊥ أ حـ ∴ هـ منتصف أ حـ

∴ فى Δ أ ب حـ :

∵ د ، هـ منتصفا ب حـ ، أ حـ على الترتيب

∴ د هـ // أ ب (المطلوب أولاً)

∵ د منتصف ب حـ ∴ د حـ = ½ ب حـ (١)

، ∵ هـ منتصف أ حـ ∴ هـ حـ = ½ أ حـ (٢)

، ∵ د ، هـ منتصفا ب حـ ، أ حـ على الترتيب

∴ د هـ = ½ أ ب (٣)

وبجمع (١) ، (٢) ، (٣) :

∴ محيط Δ حـ د هـ = ½ محيط Δ أ ب حـ

(المطلوب ثانياً)

١٣

∵ م س ⊥ أ ب

، م ص ⊥ أ حـ

∴ ق(∠ س م ص) = ٣٦٠° − (٦٠° + ٩٠° + ٩٠°)

= ١٢٠°

∵ م س ⊥ أ ب ∴ س منتصف أ ب

، ∵ م ص ⊥ أ حـ ∴ ص منتصف أ حـ

∴ س ص // ب حـ

∴ ق(∠ أ س ص) = ق(∠ أ ب حـ) = ٧٠°

(بالتناظر)

∴ ق(∠ م س ص) = ق(∠ أ س م) − ق(∠ أ س ص)

= ٩٠° − ٧٠° = ٢٠°

∴ فى Δ م س ص :

ق(∠ س ص م) = ١٨٠° − (١٢٠° + ٢٠°) = ٤٠°

(وهو المطلوب)

١٤

فى Δ أ م حـ : ∵ أ م = م حـ = نق

∴ ق(∠ م أ حـ) = ق(∠ أ حـ م)

، ∵ ق(∠ ب أ حـ) = ق(∠ م أ حـ)

∴ ق(∠ ب أ حـ) = ق(∠ أ حـ م) (وهما متبادلتان)

∴ أ ب // حـ م ، ∵ د منتصف أ ب

∴ م د ⊥ أ ب ، ∵ أ ب // حـ م

∴ د م ⊥ حـ م (وهو المطلوب)

١٥

نفرض أن طول نصف قطر الدائرة الكبرى $نق_{١} = ٢$ س

، طول نصف قطر الدائرة الصغرى $نق_{٢} =$ س

، ∵ مساحة الجزء المظلل = مساحة الدائرة الكبرى − مساحة الدائرة الصغرى

∴ $٤٨ \pi = نق_{١}^{٢} \pi - نق_{٢}^{٢} \pi$

∴ $٤٨ \pi = (٢ س)^{٢} \pi - (س)^{٢} \pi$

∴ $٤٨ \pi = ٤ س^{٢} \pi - س^{٢} \pi$

∴ $٤٨ \pi = ٣ س^{٢} \pi$ ∴ $٤٨ = ٣ س^{٢}$

∴ $س^{٢} = ١٦$ ∴ $س = \sqrt{١٦} = ٤$ سم

∴ طول نصف قطر الدائرة الكبرى = ٢ × ٤ = ٨ سم

(وهو المطلوب)

١٦

العمل : نرسم $\overline{م ب}$

البرهان :

∵ أ ب حـ م معين

∴ م حـ = ب حـ

، ∵ م ب = م حـ = نق

∴ م ب = م حـ = ب حـ

∴ Δ م ب حـ متساوى الأضلاع

∴ ق(∠ب م حـ) = ٦٠°

∴ ق(∠أ م حـ) = ٦٠° + ٦٠° = ١٢٠°

(من خواص المعين) (وهو المطلوب)

١٧

فى Δ أ م ى :

∵ ق(∠أ ى م) = ٩٠°

∴ ق(∠١) + ق(∠٢) = ٩٠°

، ∵ ق(∠٢) + ق(∠٣) = ٩٠°

∴ ق(∠١) = ق(∠٣)

فى ΔΔ أ ى م ، م هـ ب :

∵ ق(∠أ ى م) = ق(∠م هـ ب) = ٩٠°

، ق(∠١) = ق(∠٣)

∴ ق(∠٢) = ق(∠٤)

∴ ΔΔ أ ى م ، م هـ ب فيهما :

م أ = م ب = نق
ق(∠١) = ق(∠٣)
ق(∠٢) = ق(∠٤)

∴ Δ أ ى م ≡ Δ م هـ ب ∴ أ ى = م هـ = ٨ سم

∴ $م أ = \sqrt{٨^{٢} + ٦^{٢}} = ١٠$ سم

، ∵ م أ = م حـ = نق ∴ م حـ = ١٠ سم

∴ هـ حـ = ١٠ − (٢ + ٦) = ٢ سم (وهو المطلوب)

١٨

∵ أ ب = أ حـ ، ق(∠أ) = ٦٠°

∴ Δ أ ب حـ متساوى الأضلاع ∴ ق(∠ب) = ٦٠°

، ∵ ق(∠ب س م) = ٩٠°

∴ ق(∠ب م س) = ٣٠°

∴ ب م = ٢ ب س = ٥ سم

∴ ب حـ = ٢ ب م = ١٠ سم ∴ أ ب = ١٠ سم (١)

، ∵ $\overline{م س} \perp \overline{ب هـ}$

∴ ب هـ = ٢ ب س = ٢ × ٢,٥ = ٥ سم (٢)

بطرح (٢) من (١) :

∴ أ هـ = أ ب − ب هـ = ٥ سم (وهو المطلوب)

١٩

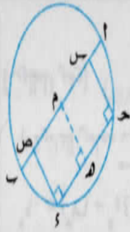
فى Δ م ن حـ : ∵ ن حـ + م حـ > ن م (متباينة المثلث)

، ∵ م أ = م حـ = نق ، ن م = أ ن + م أ

∴ ن حـ + م حـ > أ ن + م أ

∴ ن حـ > أ ن (وهو المطلوب)

٢٠



العمل : نرسم $\overline{م هـ} \perp \overleftrightarrow{حـ ى}$

يقطعه فى هـ

البرهان : ∵ $\overline{م هـ} \perp \overline{حـ ى}$ ∴ هـ منتصف $\overline{حـ ى}$

، ق(∠س حـ هـ) = ق(∠م هـ ى) = ٩٠°

وهما فى وضع تناظر

∴ $\overline{س حـ} // \overline{م هـ}$ وبالمثل $\overline{م هـ} // \overline{ص ى}$

∴ $\overline{س حـ} // \overline{م هـ} // \overline{ص ى}$

، ∵ $\overleftrightarrow{س ص}$ ، $\overleftrightarrow{حـ ى}$ قاطعان لهما ، حـ هـ = هـ ى

∴ س م = م ص ، ∵ أ م = ب م = نق

∴ أ م − س م = ب م − م ص

∴ أ س = ب ص (وهو المطلوب)

٢١

العمل : نرسم $\overline{م أ}$ ، $\overline{م حـ}$ ، $\overline{م س} \perp \overline{أ ب}$ ، $\overline{م ص} \perp \overline{حـ ى}$

البرهان : ∵ $\overline{م س} \perp \overline{أ ب}$

∴ س منتصف $\overline{أ ب}$

∴ أ س = ٦ سم

∴ فى Δ أ س م :

∵ $س م = \sqrt{(١٠)^{٢} - (٦)^{٢}} = ٨$ سم (١)

، ∵ $\overline{م ص} \perp \overline{حـ ى}$

∴ ص منتصف $\overline{حـ ى}$ ∴ حـ ص = ٨ سم

فى Δ حـ ص م :

∵ $ص م = \sqrt{(١٠)^{٢} - (٨)^{٢}} = ٦$ سم (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ البعد بين $\overline{أ ب}$ ، $\overline{حـ ى}$ = ١٤ سم (وهو المطلوب)

* نعم، توجد إجابات أخرى.

مثل البرهان السابق نجد أن:

س م = ٨ سم ، ص م = ٦ سم

∴ س ص = ٨ − ٦ = ٢ سم (وهو المطلوب)

٢٢

∵ $م أ = \sqrt{(-١ - ٢)^{٢} + (٢ - ٦)^{٢}}$

$= \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$ وحدات طولية

، $م ب = \sqrt{(-١ - ٢)^{٢} + (٢ + ٢)^{٢}}$

$= \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$ وحدات طولية

∴ م أ = م ب

∴ م مركز دائرة مارة بالنقطتين أ ، ب (المطلوب أولاً)

بفرض أن ى منتصف $\overline{أ ب}$

∴ $ى = \left(\frac{٢ + ٢}{٢} ، \frac{٦ - ٢}{٢}\right) = (٢ ، ٢)$

∴ $\overline{م ى} \perp \overline{أ ب}$

∴ $م ى = \sqrt{(-١ - ٢)^{٢} + (٢ - ٢)^{٢}}$

$= \sqrt{٩} = ٣$ وحدات طولية (المطلوب ثانيًا)

٢٣

العمل : نرسم $\overline{م ى} \perp \overline{أ حـ}$

البرهان :

∵ $\overline{م ى} \perp \overline{أ حـ}$

∴ $أ ى = ى حـ = \frac{٤\sqrt{٢}}{٢}$

$= ٢\sqrt{٢}$ سم

، ∵ $م أ = \frac{١}{٢} أ ب = ٤$ سم

∴ $م ى = \sqrt{٤^{٢} - (٢\sqrt{٢})^{٢}} = ٢\sqrt{٢}$ سم

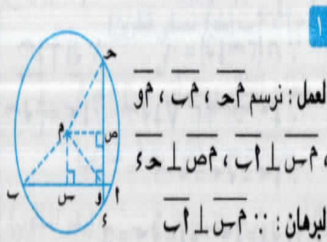
∴ أ ى = م ى

∴ $ق(∠ى أ م) = ق(∠ى م أ) = \frac{١٨٠° - ٩٠°}{٢} = ٤٥°$

(وهو المطلوب)



١



العمل : نرسم $\overline{م حـ}$ ، $\overline{م ب}$ ، $\overline{م و}$

، $\overline{م س} \perp \overline{أ ب}$ ، $\overline{م ص} \perp \overline{حـ ى}$

البرهان : ∵ $\overline{م س} \perp \overline{أ ب}$

∴ س منتصف أب ∴ س ب = ٦ سم

∴ في Δ م س ب :

(م س)^2 = (٧)^2 − (٦)^2 = ١٣

، ∵ م ص ⊥ حـ ء

∴ ص منتصف حـ ء ∴ ص حـ = ٥ سم

∴ في Δ م ص حـ :

(م ص)^2 = (٧)^2 − (٥)^2 = ٢٤

في الشكل الرباعي م س و ص :

∵ ق(∠ م س و) = ق(∠ س و ص)

= ق(∠ و ص م) = ٩٠°

∴ الشكل م س و ص مستطيل

∴ س و = م ص

∴ (س و)^2 = (م ص)^2 = ٢٤

∴ في Δ م س و :

∵ (م و)^2 = (م س)^2 + (س و)^2 = ١٣ + ٢٤ = ٣٧

∴ م و = √٣٧ سم (وهو المطلوب)

٢

∵ م أ ⊥ ب حـ ∴ ء منتصف ب حـ

∴ ب ء = ٧√٣ سم

، ∵ أ ب = ب م ، ب م = م أ (طولا نصفي قطرين)

∴ Δ أ ب م متساوي الأضلاع

، ∵ ب ء ⊥ م أ ∴ ء منتصف م أ

∴ ء م = ½ م ب

نفرض أن : ء م = ل ∴ م ب = ٢ ل

∴ في Δ ب ء م القائم الزاوية في ء :

(٧√٣)^2 = (٢ ل)^2 − ل^2

∴ ٣ ل^2 = ١٤٧ ∴ ل^2 = ٤٩

∴ ل = ٧ سم ∴ م ب = ١٤ سم

∴ طول نصف قطر الدائرة = ١٤ سم (وهو المطلوب)

إجابات تمارين ٢

١

١ أ تقع خارج الدائرة لأن : م أ > نق

٢ أ تقع على الدائرة لأن : م أ = نق

٣ أ تقع داخل الدائرة لأن : م أ < نق

٤ أ تقع داخل الدائرة لأن : م أ < نق

٢

١ يقطع الدائرة م ٢ يقع خارج الدائرة م

٣ يمس الدائرة م ٤ [٥/٢ ، ٤[

٥ {−٣ ، ٣}

٣

١ (ب)	٢ (جـ)	٣ (ب)	٤ (جـ)
٥ (ب)	٦ (جـ)	٧ (د)	٨ (جـ)
٩ (جـ)	١٠ (د)	١١ (جـ)	١٢ (ب)
١٣ (جـ)	١٤ (أ)	١٥ (ب)	١٦ (أ)
١٧ (أ)	١٨ (د)		

٤

١ (ب)	٢ (د)	٣ (أ)
٤ (أ)	٥ (جـ)	

٥

١ ٢٥°	٢ ٣٠°	٣ ١٢٠°
٤ ٤	٥ ٦٠	٦ ٣٢

٦

∵ ب حـ مماس للدائرة م عند ب

∴ ب حـ ⊥ م ب

∴ في Δ أ ب حـ :

ق(∠ أ) = ١٨٠° − (٤٥° + ٩٠°) = ٤٥°

، ∵ ء منتصف أ هـ ∴ م ء ⊥ أ هـ

∴ في Δ ء أ م :

ق(∠ ء م أ) = ١٨٠° − (٤٥° + ٩٠°) = ٤٥°

∴ ق(∠ ء م أ) = ق(∠ ء أ م) ∴ أ ء = ء م

(وهو المطلوب)

٧

في Δ م ء ب : ∵ م ء = م ب = نق

∴ ق(∠ م ب ء) = ق(∠ م ء ب) = (١٨٠° − ١٠٠°) / ٢

= ٤٠°

، ∵ أ حـ مماس للدائرة م عند أ

∴ م أ ⊥ أ حـ

∴ في Δ أ ب حـ :

ق(∠ حـ) = ١٨٠° − (٩٠° + ٤٠°) = ٥٠° (المطلوب أولًا)

، ق(∠ حـ ء م) = ١٨٠° − ٤٠° = ١٤٠° (المطلوب ثانيًا)

٨

∵ م ع = نق = ٥ سم ∴ م ص = ١٣ سم

، ∵ (م ص)^2 = ١٦٩ ، (م س)^2 = ٢٥

، (س ص)^2 = ١٤٤

∴ (م س)^2 + (س ص)^2 = (م ص)^2

∴ ق(∠ م س ص) = ٩٠° ∴ س ص ⊥ م س

∴ س ص مماس للدائرة م عند س (وهو المطلوب)

٩

١ في Δ م أ ب :

∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلث = ١٨٠°

∴ ق(∠ م أ ب) = ١٨٠° − (٥٤° + ٣٦°) = ٩٠°

∴ م أ ⊥ أ ب ∴ أ ب مماس للدائرة م

(وهو المطلوب)

٢ ∵ م أ = أ حـ ، م أ = م حـ = نق

∴ أ حـ = م حـ = حـ ب

∴ أ حـ متوسط في Δ أ م ب ، أ حـ = ½ م ب

∴ ق(∠ ب أ م) = ٩٠° ∴ م أ ⊥ أ ب

∴ أ ب مماس للدائرة م (وهو المطلوب)

٣ في Δ م أ ء : ∵ م أ = م ء = نق

∴ ق(∠ م ء أ) = ق(∠ م أ ء)

، ∵ ق(∠ م ء أ) = ق(∠ أ ء ب)

∴ ق(∠ م أ ء) = ق(∠ أ ء ب)

(وهما في وضع تبادل)

∴ م أ // ب ء

∴ ق(∠ م أ ب) = ق(∠ ء ب هـ) = ٩٠° (بالتناظر)

∴ م أ ⊥ أ ب

∴ أ ب مماس للدائرة م (وهو المطلوب)

١٠

∵ أ ب مماس للدائرة م عند أ

∴ م أ ⊥ أ ب ∴ ق(∠ م أ ب) = ٩٠°

∴ في Δ م ب أ : ∵ ق(∠ أ ب م) = ٣٠°

∴ م ب = ٢ م أ = ١٦ سم

∴ أ ب = √((م ب)^2 − (م أ)^2) = √(٢٥٦ − ٦٤)

= √١٩٢ = ٨√٣ سم (المطلوب أولًا)

في Δ أ ب حـ القائم الزاوية في حـ :

∵ ق(∠ أ ب حـ) = ٣٠°

∴ أ حـ = ½ أ ب = ½ × ٨√٣ = ٤√٣ سم

(المطلوب ثانيًا)

حل آخر للمطلوب أولًا : ∵ أ ب مماس للدائرة م عند أ

∴ ق(∠ م أ ب) = ٩٠° ∴ ظا(∠ ب) = م أ / أ ب

∴ ظا ٣٠° = ٨ / أ ب ∴ ١ / √٣ = ٨ / أ ب

∴ أ ب = ٨√٣ سم

١١

∵ $\overleftrightarrow{سص}$ مماس للدائرة عند س

∴ $\overline{مس} \perp \overline{سص}$ ∴ ق(∠م س ص) = ٩٠°

∴ في ∆ م س ص :

(م ص)² = (م س)² + (س ص)²

∴ (م ع + ٨)² = (م س)² + ١٤٤

، ∵ م ع = م س = نق

∴ (نق + ٨)² = نق² + ١٤٤

∴ نق² + ١٦ نق + ٦٤ = نق² + ١٤٤

∴ ١٦ نق = ٨٠ ∴ نق = $\frac{٨٠}{١٦}$ = ٥ سم

(وهو المطلوب)

١٢

∵ $\overleftrightarrow{أحـ}$ مماس للدائرة م عند أ

∴ $\overline{مأ} \perp \overline{أحـ}$ ∴ ق(∠م أ حـ) = ٩٠°

، ∵ ∆∆ م أ حـ ، م ب ء فيهما :

{ م أ = م ب (طولا نصفي قطرين)

م حـ = م ء (معطى)

ق(∠أ م حـ) = ق(∠ب م ء) (بالتقابل بالرأس)

∴ يتطابق المثلثان وينتج أن :

ق(∠م أ حـ) = ق(∠م ب ء) = ٩٠°

∴ $\overline{بء} \perp \overline{مب}$

∴ $\overleftrightarrow{بء}$ مماس للدائرة م عند ب (وهو المطلوب)

١٣



العمل : نرسم $\overline{مح}$

البرهان : في الدائرة الصغرى :

∵ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة عند حـ

∴ $\overline{مح} \perp \overline{أب}$

، في الدائرة الكبرى :

∵ $\overline{مح} \perp \overline{أب}$ ∴ أحـ = بحـ

في ∆ أ م حـ : ∵ ق(∠أ حـ م) = ٩٠°

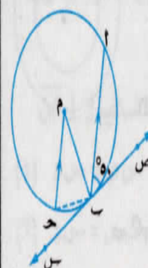
∴ أحـ = $\sqrt{(مأ)^2 - (مح)^2}$ = $\sqrt{٢٥ - ٩}$ = ٤ سم

∴ أب = ٤ + ٤ = ٨ سم

∴ محيط ∆ م أ ب = ٥ + ٥ + ٨ = ١٨ سم

(وهو المطلوب)

١٤



∵ $\overleftrightarrow{صس}$ مماس للدائرة م عند ب

∴ $\overline{مب} \perp \overleftrightarrow{صس}$

∴ ق(∠م ب ص) = ٩٠°

∴ ق(∠أ ب م) = ٩٠° − ٥٠° = ٤٠°

، ∵ $\overline{بأ}$ // $\overline{مح}$ ، $\overline{بم}$ قاطع لهما

∴ ق(∠ب م حـ) = ق(∠أ ب م) = ٤٠° (بالتبادل)

، ∵ م ب = م حـ ∴ ∆ م ب حـ متساوي الساقين

∴ ق(∠م ب حـ) = ق(∠م حـ ب)

= $\frac{١٨٠° - ٤٠°}{٢}$ = ٧٠°

∴ ق(∠حـ ب س) = ٩٠° − ٧٠° = ٢٠°

(وهو المطلوب)

١٥

∵ $\overleftrightarrow{ءحـ}$ مماس للدائرة م عند حـ

∴ $\overline{مح} \perp \overleftrightarrow{ءحـ}$ ∴ ق(∠م حـ ء) = ٩٠°

∴ في ∆ ء م حـ :

ق(∠ء م حـ) = ١٨٠° − (٩٠° + ٢٠°) = ٧٠°

، ∵ $\overline{أب}$ // $\overline{مء}$ ، $\overleftrightarrow{أهـ}$ قاطع لهما

∴ ق(∠م هـ حـ) = ق(∠ب أ هـ) = ٨٠° (بالتناظر)

∴ في ∆ م هـ حـ :

ق(∠هـ حـ م) = ١٨٠° − (٧٠° + ٨٠°)

= ٣٠° (وهو المطلوب)

١٦

∵ م س = م ص (طولا نصفي قطرين)

، ب س = حـ ص

وبالجمع : ∴ م ب = م حـ

، ∵ $\overleftrightarrow{بحـ}$ مماس للدائرة م عند أ

∴ $\overline{مأ} \perp \overline{بحـ}$

، ∵ ∆ م ب حـ متساوي الساقين فيه :

م ب = م حـ ، $\overline{مأ} \perp \overline{بحـ}$

∴ $\overrightarrow{مأ}$ ينصف ∠ب م حـ

∴ ق(∠ب م أ) = ق(∠حـ م أ) (وهو المطلوب)

١٧

∵ ب حـ = ب م ، م ب = م حـ (طولا نصفي قطرين)

∴ ∆ ب حـ م متساوي الأضلاع

∴ ق(∠حـ ب م) = ٦٠°

، ∵ ∠م حـ ب خارجة عن ∆ أ ب حـ

∴ ق(∠أ) = ق(∠أ ب حـ) = $\frac{٦٠°}{٢}$ = ٣٠°

∴ ق(∠أ ب م) = ٩٠° ∴ $\overline{مب} \perp \overleftrightarrow{أب}$

∴ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م عند ب (وهو المطلوب)

١٨

العمل : نرسم $\overline{مء}$

البرهان :

∵ $\overline{حـء}$ مماسة للدائرة عند ء

∴ $\overline{مء} \perp \overline{حـء}$ ∴ ق(∠م ء حـ) = ٩٠°

، ∵ م ء = م أ = نق ∴ م ء = $\frac{1}{2}$ م حـ

∴ في ∆ ء م حـ القائم الزاوية في ء : ق(∠حـ) = ٣٠°

∴ ق(∠حـ م ء) = ١٨٠° − (٩٠° + ٣٠°) = ٦٠°

في ∆ م ء ب : ∵ م ء = م ب = نق

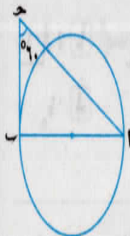
∴ ق(∠م ء ب) = ق(∠ب)

، ∵ ∠حـ م ء خارجة عن ∆ م ء ب

∴ ق(∠م ء ب) = $\frac{٦٠°}{٢}$ = ٣٠°

∴ ق(∠حـ ء ب) = ٩٠° + ٣٠° = ١٢٠° (وهو المطلوب)

١٩



∵ مساحة الدائرة = ٣٦ π

∴ π نق² = ٣٦ π

∴ نق² = ٣٦ ∴ نق = ٦ سم

∴ أب = ١٢ سم

، ∵ $\overleftrightarrow{بحـ}$ مماس للدائرة عند ب

∴ $\overline{بحـ} \perp \overline{أب}$

، في ∆ أ ب حـ :

طا(∠حـ) = $\frac{أب}{بحـ}$ ∴ طا ٦٠° = $\frac{١٢}{بحـ}$

∴ بحـ = $\frac{١٢}{طا ٦٠°}$ = $\frac{١٢}{\sqrt{٣}}$ = ٤$\sqrt{٣}$ سم

∴ مساحة ∆ أ ب حـ = $\frac{1}{2}$ × ١٢ × ٤$\sqrt{٣}$

= ٢٤$\sqrt{٣}$ سم² (وهو المطلوب)

٢٠

∵ $\overleftrightarrow{أحـ}$ مماس للدائرة م عند أ ∴ $\overline{مأ} \perp \overline{أحـ}$

∴ ق(∠حـ أ م) = ٩٠°

، ∵ $\overleftrightarrow{بء}$ مماس للدائرة م عند ب

∴ $\overleftrightarrow{مب} \perp \overleftrightarrow{بء}$

∴ ق(∠هـ ب م) = ٩٠°

∴ ∆∆ حـ أ م ، هـ ب م فيهما :

{ ق(∠حـ أ م) = ق(∠هـ ب م)

ق(∠أ م حـ) = ق(∠ب م هـ) (بالتقابل بالرأس)

م أ = م ب (طولا نصفي قطرين)

∴ يتطابق المثلثان وينتج أن : حـ م = هـ م

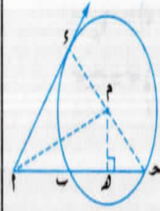
، ∵ س م = ص م (طولا نصفي قطرين)

وبالطرح : ∴ حـ س = ص هـ (وهو المطلوب)

21

العمل : نرسم $\overline{مهـ} \perp \overline{بجـ}$

ونرسم $\overline{مجـ}$ ، $\overline{مء}$ ، $\overline{مأ}$



البرهان :

$\because$ أجـ = ١٢ سم ، أب = ٤ سم

$\therefore$ بجـ = ٨ سم

، $\because$ $\overline{مهـ} \perp \overline{بجـ}$ $\therefore$ جـهـ = هـب = ٤ سم

، $\because$ نق = ٥ سم $\therefore$ مجـ = ٥ سم

$\because$ Δ مهـجـ فيه : ق(∠ مهـجـ) = ٩٠°

$\therefore$ (مهـ)^{٢} = (مجـ)^{٢} − (جـهـ)^{٢} = ٢٥ − ١٦ = ٩ سم

$\therefore$ مهـ = ٣ سم

$\therefore$ بعد الوتر $\overline{بجـ}$ عن المركز = ٣ سم (المطلوب أولًا)

Δ مهـأ فيه : ق(∠ مهـأ) = ٩٠°

$\therefore$ (مأ)^{٢} = (مهـ)^{٢} + (أهـ)^{٢} = ٩ + ٦٤ = ٧٣

، $\because$ $\overleftrightarrow{أء}$ مماس للدائرة $\therefore$ $\overline{مء} \perp \overleftrightarrow{أء}$

$\therefore$ Δ أمء فيه : ق(∠ أءم) = ٩٠°

$\therefore$ (أء)^{٢} = (أم)^{٢} − (مء)^{٢} = ٧٣ − ٢٥ = ٤٨

$\therefore$ أء = $\sqrt{٤٨}$ = ٤ $\sqrt{٣}$ سم (المطلوب ثانيًا)

22

$\because$ مأ = $\sqrt{(-١ - ٣)^{٢} + (٢ + ١)^{٢}}$

= $\sqrt{١٦ + ٩}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدات طول

، مب = $\sqrt{(-١ + ٤)^{٢} + (٢ - ٦)^{٢}}$

= $\sqrt{٩ + ١٦}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدات طول

، مجـ = $\sqrt{(-١ - ٢)^{٢} + (٢ + ٢)^{٢}}$ = $\sqrt{٩ + ١٦}$

= $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدات طول

$\therefore$ مأ = مب = مجـ

$\therefore$ النقط أ ، ب ، جـ تقع على دائرة واحدة مركزها م

(المطلوب أولًا)

$\because$ نق = ٥ وحدات طول

$\therefore$ محيط الدائرة = ٢ π نق ≈ ٢ × ٣,١٤ × ٥

= ٣١,٤ وحدة طول

(المطلوب ثانيًا)

23

$\because$ $\overline{جـء}$ قطر فى الدائرة م $\therefore$ م منتصف $\overline{جـء}$

نفرض أن جـ (س ، ص)

$\therefore$ (١ ، ١) = $\left(\frac{س + ٣}{٢} ، \frac{ص - ٢}{٢}\right)$

$\therefore$ $\frac{س + ٣}{٢}$ = ١ $\therefore$ س + ٣ = ٢ $\therefore$ س = −١

، $\frac{ص - ٢}{٢}$ = ١ $\therefore$ ص − ٢ = ٢ $\therefore$ ص = ٤

$\therefore$ جـ = (−١ ، ٤)

، $\because$ ميل $\overleftrightarrow{جـء}$ = $\frac{-٢ - ٤}{٣ + ١}$ = $\frac{-٦}{٤}$ = $\frac{-٣}{٢}$

$\therefore$ ميل المستقيم العمودى على $\overleftrightarrow{جـء}$ = $\frac{٢}{٣}$

، $\because$ المماس للدائرة م عند جـ يكون عموديًا على $\overline{جـء}$

$\therefore$ ميل المماس للدائرة م عند جـ = $\frac{٢}{٣}$

$\therefore$ معادلة المماس : ص = $\frac{٢}{٣}$ س + جـ

، $\because$ المماس يمر بالنقطة جـ (−١ ، ٤)

$\therefore$ ٤ = $\frac{٢}{٣}$ × −١ + جـ $\therefore$ جـ = ٤ $\frac{٢}{٣}$

$\therefore$ المعادلة هى : ص = $\frac{٢}{٣}$ س + ٤ $\frac{٢}{٣}$ (وهو المطلوب)

للمتفوقين

1

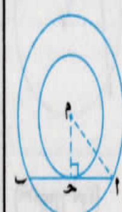
$\because$ $\overline{أب}$ تمس الدائرة الصغرى فى جـ

$\therefore$ $\overline{مجـ} \perp \overline{أب}$

، $\because$ $\overline{أب}$ وتر فى الدائرة الكبرى

، $\overline{مجـ} \perp \overline{أب}$

$\therefore$ جـ منتصف $\overline{أب}$



$\therefore$ أجـ = $\frac{١٤}{٢}$ = ٧ سم

، $\because$ Δ أمجـ قائم الزاوية فى جـ

$\therefore$ (أجـ)^{٢} = (مأ)^{٢} − (مجـ)^{٢}

$\therefore$ (٧)^{٢} = (مأ)^{٢} − (مجـ)^{٢}

$\therefore$ (مأ)^{٢} − (مجـ)^{٢} = ٤٩

$\therefore$ مساحة الجزء المحصور بين الدائرتين

= مساحة الدائرة الكبرى − مساحة الدائرة الصغرى

= π (مأ)^{٢} − π (مجـ)^{٢}

= π [(مأ)^{٢} − (مجـ)^{٢}]

= ٤٩ π سم^{٢} (وهو المطلوب)

2

$\because$ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م عند ب

$\therefore$ $\overline{مب} \perp \overleftrightarrow{أب}$ $\therefore$ ق(∠ أبم) = ٩٠°

، $\because$ مب = مء (طولا نصفى قطرين)

$\therefore$ ق(∠ مبء) = ق(∠ مءب) = ٢ س°

فى Δ أبء :

ق(∠ أ) + ق(∠ أبء) + ق(∠ ء) = ١٨٠°

$\therefore$ س° + ٩٠° + ٢ س° + ٢ س° = ١٨٠°

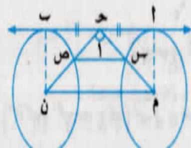
$\therefore$ ٥ س° = ٩٠° $\therefore$ س° = ١٨°

(وهو المطلوب)

3

العمل : نرسم $\overline{مأ}$

، $\overline{نب}$



البرهان : $\because$ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م عند أ

$\therefore$ $\overline{مأ} \perp \overleftrightarrow{أب}$ ، بالمثل $\overline{نب} \perp \overleftrightarrow{أب}$

$\therefore$ $\overline{مأ}$ // $\overline{بن}$

، $\because$ مأ = نب (طولا نصفى قطرين لدائرتين متطابقتين)

$\therefore$ أمنب متوازى أضلاع

$\therefore$ $\overline{أب}$ // $\overline{من}$ (المطلوب أولًا)

، $\Delta\Delta$ أمجـ ، بنجـ فيهما :

أجـ = بجـ (معطى)

مأ = بن (برهانًا)

ق(∠ مأجـ) = ق(∠ نبجـ) = ٩٠° (برهانًا)

$\therefore$ Δ أمجـ ≡ Δ بنجـ

$\therefore$ مجـ = نجـ (١)

$\therefore$ Δ مجـن متساوى الساقين. (المطلوب ثانيًا)

، $\because$ مس = نص (٢)

وبطرح (٢) من (١) : $\therefore$ مجـ − مس = نجـ − نص

$\therefore$ جـس = جـص

$\therefore$ من Δ سجـص المتساوى الساقين :

ق(∠ جـسص) = $\frac{١٨٠° - ق(∠ ١)}{٢}$ (٣)

، من Δ منجـ المتساوى الساقين :

ق(∠ جـمن) = $\frac{١٨٠° - ق(∠ ١)}{٢}$ (٤)

من (٣) ، (٤) :

$\therefore$ ق(∠ جـسص) = ق(∠ جـمن)

وهما فى وضع تناظر

$\therefore$ $\overline{سص}$ // $\overline{من}$ (المطلوب ثالثًا)

إجابات تمارين ٣

1

١ (ب)	٢ (د)	٣ (ب)	٤ (جـ)
٥ (جـ)	٦ (جـ)	٧ (جـ)	٨ (ب)
٩ (د)	١٠ (أ)	١١ (ب)	١٢ (جـ)
١٣ (أ)	١٤ (ب)	١٥ (جـ)	١٦ (أ)
١٧ (ب)	١٨ (د)	١٩ (د)	٢٠ (ب)
٢١ (د)	٢٢ (ب)	٢٣ (ب)	٢٤ (د)

2

١ ٥٠°	٢ ١١٠°	٣ ٩٠°
٤ ٦	٥ ١٢ ، $\sqrt{١٠٥}$	٦ ٤ $\sqrt{١٠}$

3

١ ١٠	٢ $\frac{١}{٢}$ ٤٥°

٤

∵ م ن = م ا + ا ن

، ∵ ن ا = ن ب = ٧ سم (طولا نصفي قطرين)

∴ ١٢ = م ا + ٧

∴ م ا = ٥ سم (وهو المطلوب)

٥

∵ الدائرتان متماستان من الداخل عند ا

∴ م ن = ١٠ - ٦ = ٤ سم ، م ن ⊥ ا ب

∴ مساحة Δ ب م ن = $\frac{1}{2}$ × م ن × ا ب

∴ ٢٤ = $\frac{1}{2}$ × ٤ × ا ب ∴ ا ب = ١٢ سم (وهو المطلوب)

٦

∵ م ن خط المركزين ، ا ب الوتر المشترك للدائرتين

∴ ا ب ⊥ م ن ∴ ق(∠ ا هـ ن) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة

للشكل الرباعي حـ ء ن هـ = ٣٦٠°

∴ ق(∠ حـ ء ن)

= ٣٦٠° - (٥٥° + ١٢٥° + ٩٠°) = ٩٠°

∴ ن ء ⊥ حـ ء

∴ حـ ء مماس للدائرة ن عند ء (وهو المطلوب)

٧

∵ ن م خط المركزين ، ا ب الوتر المشترك للدائرتين

∴ ن م ⊥ ا ب ∴ ق(∠ ا هـ م) = ٩٠°

، ∵ حـ منتصف س ص ∴ م حـ ⊥ س ص

∴ ق(∠ م حـ س) = ٩٠°

في الشكل الرباعي ء حـ م هـ :

ق(∠ حـ م هـ) = ٣٦٠° - (٩٠° + ٩٠° + ٤٠°)

= ١٤٠° (المطلوب أولاً)

، ∵ و ع مماس للدائرة ن عند و

∴ ن و ⊥ و ع ∴ ق(∠ ن و ع) = ٩٠°

∴ ق(∠ د م هـ ا) = ق(∠ ن و ع) وهما في وضع تناظر

∴ و ع // ا ب (المطلوب ثانياً)

٨

∵ م ن خط المركزين ، ا ب الوتر المشترك للدائرتين

∴ م ن ⊥ ا ب

، ∵ ا ب // المستقيم ل ∴ المستقيم ل ⊥ م ن

∴ هـ و ⊥ م س ∴ س هـ = س و (١)

وبالمثل ن س ⊥ حـ ء ∴ حـ س = س ء (٢)

بطرح (١) من (٢) :

∴ حـ س - س هـ = س ء - س و

∴ حـ هـ = و ء (وهو المطلوب)

٩

∵ م ن خط المركزين

، ا ب الوتر المشترك

∴ م ن ⊥ ا ب ، حـ منتصف ا ب

∴ ا حـ = $\frac{1}{2}$ × ١٢ = ٦ سم

∴ م حـ = $\sqrt{(\text{ا م})^2 - (\text{ا حـ})^2}$

= $\sqrt{١٠٠ - ٣٦}$ = ٨ سم

في Δ ا م ن :

∵ ا م = ا ن = نق ، ا حـ ⊥ م ن

∴ حـ منتصف م ن

∴ م ن = ٢ م حـ = ٢ × ٨ = ١٦ سم (وهو المطلوب)

١٠

∵ م ن خط المركزين

، ا ب الوتر المشترك للدائرتين

∴ م ن ⊥ ا ب ، ا حـ = حـ ب

، في Δ ا م ن :

∵ (ا م)^2 = ٨١ ، (ا ن)^2 = ١٤٤ ، (م ن)^2 = ٢٢٥

∴ (م ن)^2 = (ا م)^2 + (ا ن)^2

∴ Δ ا م ن قائم الزاوية في ا

∴ ا حـ = (ا م × ا ن) / (م ن) = (٩ × ١٢) / ١٥ = ٧,٢ سم

∴ ا ب = ٢ ا حـ = ١٤,٤ سم (وهو المطلوب)

١١

∵ م ن خط المركزين ، ا ب الوتر المشترك للدائرتين

∴ م ن محور تماثل ا ب ∴ حـ ا = حـ ب

∴ في Δ ا ب حـ : ق(∠ حـ ا ب) = ق(∠ حـ ب ا) (١)

، ء ا = ء ب

∴ في Δ ا ب ء : ق(∠ ء ا ب) = ق(∠ ء ب ا) (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ ق(∠ حـ ا ء) = ق(∠ حـ ب ء) (وهو المطلوب)

١٢

∵ م ن خط المركزين ، ا ب الوتر المشترك

∴ م ن ⊥ ا ب أي ق(∠ ا و م) = ٩٠°

، ∵ حـ ء قطر في الدائرة م ، حـ س مماس لها عند حـ

∴ حـ س ⊥ حـ ء أي ق(∠ هـ حـ ء) = ٩٠°

∴ ق(∠ حـ هـ و) + ق(∠ حـ م و)

= ٣٦٠° - (٩٠° + ٩٠°) = ١٨٠°

، ∵ ق(∠ ء م و) + ق(∠ حـ م و) = ١٨٠°

∴ ق(∠ ء م و) = ق(∠ حـ هـ و) (وهو المطلوب)

١٣

في Δ ا ن ب : ∵ ن ا = ن ب ، ق(∠ ن) = ٦٠°

∴ Δ ا ن ب متساوي الأضلاع

∴ ا ب = ا ن = نق

ولكن م ا = ن ا = نق (لأن الدائرتين متطابقتان)

∴ ا ب = م ا = ا ن = نق

∴ ا ب = $\frac{1}{2}$ م ن ∴ ق(∠ م ب ن) = ٩٠°

وحيث إن : ب ن نصف قطر في الدائرة ن

∴ م ب تمس الدائرة ن عند ب (وهو المطلوب)

١٤

∵ مساحة المنطقة المظللة = ٥٥٠ سم^2

∴ مساحة الدائرة الكبرى - مساحة الدائرة الصغرى

= ٥٥٠ سم^2

∴ π نق$_1^2$ - π نق$_2^2$ = ٥٥٠

∴ π (نق$_1^2$ - نق$_2^2$) = ٥٥٠

∴ نق$_1^2$ - نق$_2^2$ = ٥٥٠ × $\frac{7}{22}$

∴ (نق$_1$ - نق$_2$) (نق$_1$ + نق$_2$) = ١٧٥

، ∵ م$_1$ م$_2$ = نق$_1$ - نق$_2$

(لأن الدائرتين متماستان من الداخل)

∴ ٧ (نق$_1$ + نق$_2$) = ١٧٥

∴ نق$_1$ + نق$_2$ = $\frac{175}{7}$ = ٢٥ سم (وهو المطلوب)

١٥

∵ ا ب نصف قطر

في الدائرة ا

، نصف قطر في الدائرة ب

∴ الدائرتان متساويتان في طول نصف القطر

∴ حـ ا = حـ ب = ا ب = ٣ سم

∴ Δ ا ب حـ متساوي الأضلاع

∴ ق(∠ ا حـ ب) = ٦٠° (المطلوب أولاً)

، ∵ حـ ء ⊥ ا ب ، ق(∠ ا) = ٦٠°

∴ جا ا = حـ هـ / ا حـ ∴ جا ٦٠° = حـ هـ / ٣

∴ حـ هـ = ٣ جا ٦٠° = $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

∴ حـ ء = ٢ حـ هـ = ٢ × $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ = $3\sqrt{3}$ سم (المطلوب ثانياً)

١٦

1 ٤ ، ٨ ، ٢٤

2 نعم ، لأن : ا ن = حـ ن نصفا قطرين في الدائرة ن

، ا م = م ء نصفا قطرين في الدائرة م

أي أن : ا ن + ا م + ن م = حـ ن + م ء + ن م

∴ محيط Δ ا ن م = حـ ء

٣ ∵ ق(∠ن ا م) = ٩٠°

لأن : $(ن م)^2 = (ن ا)^2 + (ا م)^2$

٤ مساحة المثلث ن ا م = $\frac{1}{2}$ × ن ا × ا م

= $\frac{1}{2}$ × ٦ × ٨ = ٢٤ $سم^2$

٥ العمل : نرسم $\overline{اب}$ لتقطع $\overleftrightarrow{من}$ في هـ

البرهان :

∵ $\overline{اب}$ يقطع $\overline{من}$ في هـ

∴ $\overline{اب} \perp \overline{من}$

∴ اهـ = $\frac{ام \times ان}{من}$ = $\frac{٦ \times ٨}{١٠}$ = ٤,٨ سم

، ∵ $\overleftrightarrow{من}$ ينصف $\overline{اب}$

∴ اهـ = هـ ب = ٤,٨ سم

∴ اب = ٢ × ٤,٨ = ٩,٦ سم

١٧

∵ $نق_1$ = ٦ وحدة طول ، $نق_2$ = ٤ وحدة طول

∴ $نق_1 + نق_2$ = ١٠ وحدة طول

، $نق_1 - نق_2$ = ٢ وحدة طول

١ ∵ م ن = $\sqrt{(-٤ - ٥)^2 + (٨ + ٤)^2}$

= $\sqrt{٨١ + ١٤٤}$ = $\sqrt{٢٢٥}$ = ١٥ وحدة طول

∴ م ن > $نق_1 + نق_2$ ∴ الدائرتان متباعدتان.

٢ ∵ م ن = $\sqrt{(٢ - ٦)^2 + (١ + ٢)^2}$

= $\sqrt{١٦ + ٩}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدة طول

∴ $نق_1 - نق_2$ < م ن < $نق_1 + نق_2$

∴ الدائرتان متقاطعتان.

١٨

نفرض معادلة $\overleftrightarrow{من}$ هي : ص = حـ س + ء

، ∵ الدائرتين م ، ن متقاطعتان في ا ، ب

∴ $\overleftrightarrow{من} \perp \overline{اب}$ وينصفه

، ∵ ميل $\overleftrightarrow{اب}$ = $\frac{-١ - ٣}{-٤ - ٠}$ = ١

، ∵ ميل $\overleftrightarrow{من}$ × ميل $\overleftrightarrow{اب}$ = −١

∴ ميل $\overleftrightarrow{من}$ × ١ = −١ ∴ ميل $\overleftrightarrow{من}$ = −١

∴ معادلة $\overleftrightarrow{من}$ هي : ص = −س + ء

، ∵ منتصف $\overline{اب}$ = $\left(\frac{٠ - ٤}{٢} ، \frac{٣ - ١}{٢}\right)$

= (−٢ ، ١)

، منتصف $\overline{اب}$ تنتمي إلى $\overleftrightarrow{من}$ ∴ تحقق معادلته

∴ ١ = ٢ + ء ∴ ء = −١

∴ ص = −س − ١ (وهو المطلوب)

١٩

∵ م ا = $\sqrt{(٥ + ٣)^2 + (٣ + ١)^2}$ = $\sqrt{١٦ + ٦٤}$

= ٤ $\sqrt{٥}$ وحدة طول

∴ ا ∈ الدائرة م

، ∵ ن ا = $\sqrt{(-٧ + ٣)^2 + (-٣ + ١)^2}$ = $\sqrt{٤ + ١٦}$

= $\sqrt{٢٠}$ = ٢ $\sqrt{٥}$ وحدة طول

∴ ا ∈ الدائرة ن

، ∵ م ن = $\sqrt{(٥ + ٧)^2 + (٣ + ٣)^2}$ = $\sqrt{٣٦ + ١٤٤}$

= $\sqrt{١٨٠}$ = ٦ $\sqrt{٥}$ وحدة طول

∴ م ن = م ا + ا ن

∴ الدائرتان متماستان من الخارج. (وهو المطلوب)

للمتفوقين

١

∵ $\overleftrightarrow{اجـ}$ مماس للدائرة م عند ا ∴ $\overline{ما} \perp \overline{اجـ}$

، في Δ م ا جـ :

∵ ق(∠ا) = ٩٠° ، ق(∠جـ) = ٣٠°

∴ م ا = $\frac{1}{2}$ م جـ ∴ م جـ = ١٢ سم

، ∵ ء م = م ا = ٦ سم ∴ جـ ء = ١٢ − ٦ = ٦ سم

، ∵ $\overleftrightarrow{جـب}$ مماس للدائرة ن عند ب

∴ $\overline{نب} \perp \overline{جـب}$

، في Δ جـ ب ن :

∵ ق(∠جـ ب ن) = ٩٠° ، ق(∠جـ) = ٣٠°

∴ ب ن = $\frac{1}{2}$ جـ ن ، ∵ ب ن = ن هـ

∴ جـ هـ = هـ ن = ن ء = $\frac{٦}{٣}$ = ٢ سم (وهو المطلوب)

٢

بفرض أن أنصاف أقطار الدوائر ل ، م ، ن هي $نق_1$ ، $نق_2$ ، $نق_3$ على الترتيب

، ∵ ل م = ٥ سم ∴ $نق_1 + نق_2$ = ٥ (١)

، ∵ م ن = ٨ سم ∴ $نق_2 + نق_3$ = ٨ (٢)

، ∵ ل ن = ٧ سم ∴ $نق_1 + نق_3$ = ٧ (٣)

بجمع (١) ، (٢) ، (٣) :

∴ ٢ ($نق_1 + نق_2 + نق_3$) = ٢٠

∴ $نق_1 + نق_2 + نق_3$ = ١٠

، ∵ $نق_2 + نق_3$ = ٨ ∴ $نق_1$ + ٨ = ١٠

∴ $نق_1$ = ١٠ − ٨ = ٢ سم

وبالتعويض في (١) : ∴ $نق_2$ = ٥ − ٢ = ٣ سم

وبالتعويض في (٢) : ∴ $نق_3$ = ٨ − ٣ = ٥ سم

(وهو المطلوب)

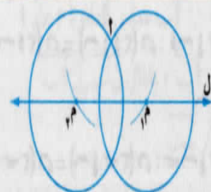
إجابات تمارين ٤

«ملحوظة : الأطوال غير حقيقية»

١

١ (أ)	٢ (ب)	٣ (د)	٤ (د)	٥ (جـ)
٦ (أ)	٧ (د)	٨ (ب)	٩ (ب)	١٠ (د)
١١ (ب)	١٢ (ب)	١٣ (جـ)	١٤ (أ)	١٥ (أ)
١٦ (جـ)	١٧ (جـ)	١٨ (جـ)		

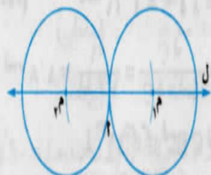
٢



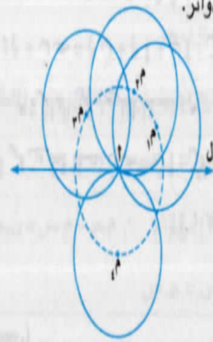
* توجد دائرتان تمران بالنقطة ا

٣

١ عندما م ∈ المستقيم ل يمكن رسم دائرتين.



٢ عندما م ∉ المستقيم ل يمكن رسم عدد لا نهائي من الدوائر.



٤

• يمكن رسم دائرتين.

• في Δ ا $م_1$ ء : ∵ ء منتصف $\overline{اب}$

∴ اء = $\frac{1}{2}$ اب = $\frac{1}{2}$ × ٦ = ٣ سم

، ∵ $\overline{م_1ء} \perp \overline{اب}$

∴ ق(∠ا ء $م_1$) = ٩٠°

∴ $م_1$ء = $\sqrt{(ا م_1)^2 - (ا ء)^2}$ = $\sqrt{٢٥ - ٩}$ = ٤ سم

(وهو المطلوب)

٥

١

يمكن رسم دائرتين.

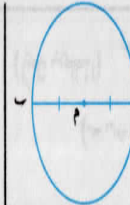
٢

يمكن رسم دائرة واحدة.

٣ لا يمكن رسم دائرة لأن طول نصف القطر ١,٥ سم أقل من نصف طول $\overline{اب}$

٦ ∵ طول نصف القطر أصغر ما يمكن

∴ نق = ٣ سم



٧ في Δ ا ء م :

∵ $\overline{م ء} \perp \overline{ا ب}$

∴ ء منتصف $\overline{ا ب}$

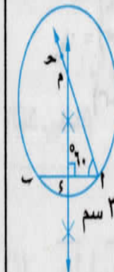
∴ ا ء = $\frac{١}{٢}$ ا ب = $\frac{١}{٢}$ × ٦ = ٣ سم

، ∵ ق(∠ ا ء م) = ٩٠°

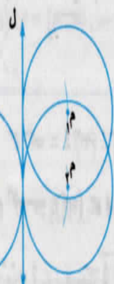
، ق(∠ ا) = ٦٠°

∴ ق(∠ ا م ء) = ١٨٠° − (٩٠° + ٦٠°) = ٣٠°

∴ ا م = ٢ ا ء = ٢ × ٣ = ٦ سم (وهو المطلوب)

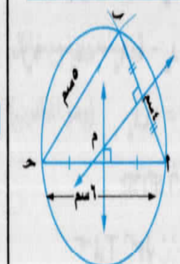


٨



يوجد عدد لا نهائي من الدوائر مراكزها تقع على مستقيم يوازي المستقيم ل ويبعد عنه ٣ سم.

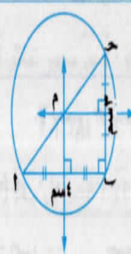
٩



* Δ ا ب حـ حاد الزوايا

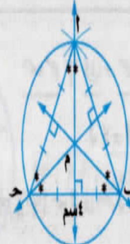
* مركز الدائرة يقع داخل المثلث ا ب حـ

١٠



مركز الدائرة يقع في منتصف الوتر $\overline{ا حـ}$

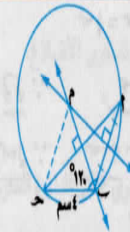
١١



[١] مركز الدائرة هو نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث وهي نفسها نقطة تقاطع متوسطات المثلث وهي نفسها نقطة تقاطع منصفات زوايا رءوس المثلث.

[٢] ٣ محاور للتماثل.

١٢



∵ Δ ا ب حـ متساوي الساقين

، ∵ $\overline{ب م} \perp \overline{ا حـ}$

∴ $\overleftarrow{ب م}$ ينصف ∠ ا ب حـ

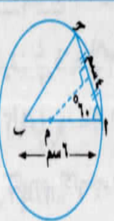
∴ ق(∠ م ب حـ) = ٦٠°

، ∵ م ب = م حـ = نق

∴ Δ م ب حـ متساوي الأضلاع

∴ م ب = م حـ = ب حـ = نق = ٤ سم (وهو المطلوب)

١٣



١٤

∵ ا ب = $\sqrt{(٢+٢)^{٢} + (٠-٣)^{٢}}$

= $\sqrt{١٦+٩} = \sqrt{٢٥}$

= ٥ وحدات طول

∴ يوجد حلان للمسألة.



١٥

∵ ا ب = $\sqrt{(١-١)^{٢} + (٣+١)^{٢}}$

= $\sqrt{١٦}$ = ٤ وحدة طول

، ب حـ = $\sqrt{(١+٣)^{٢} + (-١+١)^{٢}}$

= $\sqrt{١٦}$ = ٤ وحدة طول

، ا حـ = $\sqrt{(١+٣)^{٢} + (٣+١)^{٢}}$

= $\sqrt{٣٢}$ = ٤ $\sqrt{٢}$ وحدة طول

، ∵ $(ا ب)^{٢}$ = ١٦ ، $(ب حـ)^{٢}$ = ١٦

، $(ا حـ)^{٢}$ = ٣٢ ∴ $(ا حـ)^{٢} = (ا ب)^{٢} + (ب حـ)^{٢}$

∴ Δ ا ب حـ قائم الزاوية في ب

∴ مركز الدائرة المارة برءوس Δ ا ب حـ

هو منتصف الوتر $\overline{ا حـ}$

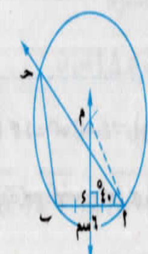
∴ م = $\left(\frac{١-٣}{٢} ، \frac{٣-١}{٢}\right)$ = (−١ ، ١)

(وهو المطلوب)

للمتفوقين



١



∵ ء منتصف $\overline{ا ب}$ ∴ ا ء = ٣ سم

∴ في Δ ا م ء القائم الزاوية في ء :

م ء = $\sqrt{(ا م)^{٢} - (ا ء)^{٢}} = \sqrt{٢٥ - ٩} = \sqrt{١٦}$ = ٤ سم

(وهو المطلوب)

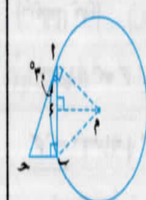
٢

∵ $\overline{ا حـ}$ تمس الدائرة م عند ا

∴ $\overline{م ا} \perp \overline{ا حـ}$

∴ ق(∠ م ا ب) = ٩٠° − ٣٠°

= ٦٠°



، ∵ م ا = م ب = نق

∴ Δ ا ب م متساوي الأضلاع

، ∵ $\overline{م ء} \perp \overline{ا ب}$

∴ ء منتصف $\overline{ا ب}$

∴ ا ء = ٢ سم

، ∵ ا م = ا ب = ٤ سم

، في Δ ا م ء القائم الزاوية في ء

∴ م ء = $\sqrt{(ا م)^{٢} - (ا ء)^{٢}} = \sqrt{١٦ - ٤} = ٢\sqrt{٣}$ سم

∴ مساحة Δ ا ب م = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٢ $\sqrt{٣}$

= ٤ $\sqrt{٣}$ سم^{٢} (المطلوب أولاً)

، مساحة الدائرة م = π نق^{٢} = ١٦ π سم^{٢} (المطلوب ثانيًا)

إجابات تمارين ٥

١

[١] (أ)	[٢] (جـ)	[٣] (جـ)
[٤] (ب)	[٥] (أ)	[٦] (ب)

٢

[١] م ص ، م و ، و ص
[٢] م و ، ٤ ، ١٦
[٣] م ص ، ٤٠°
[٤] ن ص ، مستطيل

٣

في Δ ا ب حـ :

∵ ق(∠ ب) = ق(∠ حـ) ∴ ا ب = ا حـ

، ∵ س منتصف $\overline{ا ب}$ ∴ $\overline{م س} \perp \overline{ا ب}$

، ∵ $\overline{م ص} \perp \overline{ا حـ}$ ، ا ب = ا حـ

∴ م س = م ص (وهو المطلوب)

٤

∵ م و = م هـ (طولا نصفي قطرين) ، و س = هـ ص

وبالطرح : ∴ م س = م ص

، ∵ س منتصف $\overline{اح}$ ∴ $\overline{مس} \perp \overline{اح}$

، ص منتصف $\overline{بح}$ ∴ $\overline{مص} \perp \overline{بح}$

∴ اح = بح ، ∵ ق(∠ا) = ٦٠°

∴ Δ ابح متساوي الأضلاع. (وهو المطلوب)

٥

∵ س منتصف $\overline{اب}$ ∴ $\overline{مس} \perp \overline{اب}$

، ∵ ص منتصف $\overline{اح}$ ∴ $\overline{مص} \perp \overline{اح}$

، ∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الرباعي ا س م ص = ٣٦٠°

∴ ق(∠س م ص) = ٣٦٠° − (٧٠° + ٩٠° + ٩٠°)

= ١١٠°

∴ ق(∠ء م هـ) = ١١٠° (المطلوب أولاً)

∵ اب = اح ∴ م س = م ص

، ∵ م ء = م هـ (طولا نصفي قطرين)

وبالطرح : ∴ س ء = ص هـ (المطلوب ثانياً)

٦

∵ س منتصف $\overline{اب}$ ∴ $\overline{مس} \perp \overline{اب}$

، ∵ اب = اح ∴ م س = م ص

، ∵ م ء = م هـ (طولا نصفي قطرين)

وبالطرح : ∴ س ء = ص هـ (المطلوب أولاً)

في Δ س م ص :

∵ م س = م ص

∴ ق(∠م ص س) = ق(∠م س ص)

، ∵ ق(∠م س ب) = ق(∠م ص ح) = ٩٠°

وبالجمع :

∴ ق(∠ص س ب) = ق(∠س ص ح) (المطلوب ثانياً)

٧

∵ س منتصف $\overline{اب}$

∴ $\overline{مس} \perp \overline{اب}$

، ∵ ص منتصف $\overline{اح}$

∴ $\overline{مص} \perp \overline{اح}$

، ∵ اب = اح ∴ م س = م ص

∴ Δ م س ص متساوي الساقين (المطلوب أولاً)

، ∵ ق(∠ا س م) = ٩٠° ، ق(∠م س ص) = ٣٠°

∴ ق(∠ا س ص) = ٩٠° − ٣٠° = ٦٠°

، ∵ س ، ص منتصفا $\overline{اب}$ ، $\overline{اح}$

، اب = اح ∴ ا س = ا ص

∴ Δ ا س ص متساوي الأضلاع (المطلوب ثانياً)

٨

العمل :

نرسم $\overline{مس}$ ، $\overline{مص}$ ، $\overline{مع}$

البرهان : ∵ س منتصف $\overline{اب}$

∴ $\overline{مس} \perp \overline{اب}$

، ∵ ص منتصف $\overline{بح}$ ∴ $\overline{مص} \perp \overline{بح}$

∵ ع منتصف $\overline{اح}$ ∴ $\overline{مع} \perp \overline{اح}$

، ∵ اب = بح = اح

∴ م س = م ص = م ع

∴ م هي مركز الدائرة المارة برؤوس Δ س ص ع

(وهو المطلوب)

٩

∵ اب = حء ، م ب = م ح (طولا نصفي قطرين)

وبالطرح : ∴ ا م = ء م

، ∵ $\overline{ما} \perp \overline{سهـ}$ ، $\overline{مء} \perp \overline{هـص}$

∴ س هـ = هـ ص

، ∵ $\overline{ما} \perp \overline{سهـ}$ ∴ ا منتصف $\overline{سهـ}$

∴ س هـ = ٦ سم ∴ هـ ص = ٦ سم

(وهو المطلوب)

١٠

∵ $\overline{اب}$ الوتر المشترك للدائرتين م ، ن

، $\overleftrightarrow{من}$ خط المركزين ∴ $\overleftrightarrow{من} \perp \overline{اب}$

∴ $\overline{مء} \perp \overline{اب}$ ، ∵ $\overline{مس} \perp \overline{اح}$ ، اح = اب

∴ م س = م ء (١)

، ∵ م ص = م هـ (طولا نصفي قطرين) (٢)

بطرح (١) من (٢) : ∴ س ص = ء هـ (وهو المطلوب)

١١

في الدائرة م : ∵ هـ منتصف حء ∴ $\overline{مهـ} \perp \overline{حء}$

، ∵ $\overline{اب}$ الوتر المشترك ، $\overleftrightarrow{من}$ خط المركزين

∴ $\overleftrightarrow{من} \perp \overline{اب}$ ، ∴ م هـ = م ل

∴ اب = حء (١)

في الدائرة ن : ∵ $\overleftrightarrow{من} \perp \overline{اب}$ ، $\overline{نع} \perp \overline{سص}$

، ن ل = ن ع ∴ اب = س ص (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ حء = س ص (وهو المطلوب)

١٢

∵ ص منتصف $\overline{اح}$

∴ $\overline{مص} \perp \overline{اح}$

، ∵ $\overline{مس} \perp \overline{اب}$

، م س = م ص

∴ اب = اح ∴ ق(∠ح) = ٧٥°

∴ ق(∠ا) = ١٨٠° − (٧٥° + ٧٥°)

= ٣٠° (المطلوب أولاً)

∵ $\overline{مس} \perp \overline{اب}$ ∴ س منتصف $\overline{اب}$

∴ في Δ ابح : س ص = $\frac{1}{2}$ بح

، ا س = $\frac{1}{2}$ اب ، ا ص = $\frac{1}{2}$ اح

بالجمع :

∴ محيط Δ ا س ص = $\frac{1}{2}$ محيط Δ ابح (المطلوب ثانياً)

١٣

العمل : نرسم $\overline{مو} \perp \overline{اب}$

، $\overline{مهـ} \perp \overline{اع}$

البرهان : في الدائرة الكبرى :

∵ ق(∠ا ب ع) = ق(∠ا ع ب)

∴ اب = اع

، ∵ $\overline{مو} \perp \overline{اب}$ ، $\overline{مهـ} \perp \overline{اع}$ ∴ م و = م هـ

، في الدائرة الصغرى :

∵ $\overline{مو} \perp \overline{حء}$ ، $\overline{مهـ} \perp \overline{سص}$ ، م و = م هـ

∴ حء = س ص (وهو المطلوب)

١٤

∵ م و = م هـ (طولا نصفي قطرين)

، س و = ص هـ

بالطرح : ∴ م س = م ص

، ∵ $\overline{مس} \perp \overline{اب}$ ، $\overline{مص} \perp \overline{حء}$

∴ اب = حء (المطلوب أولاً)

∵ $\overline{مس} \perp \overline{اب}$ ∴ س منتصف $\overline{اب}$

∴ ا س = $\frac{1}{2}$ اب ∵ $\overline{مص} \perp \overline{حء}$

∵ ص منتصف $\overline{حء}$ ∴ ح ص = $\frac{1}{2}$ حء

∵ اب = حء ∴ ا س = ح ص

∴ ∆∆ ا س و ، حـ ص هـ فيهما :

ا س = حـ ص
س و = ص هـ
ق (∠ ا س و) = ق (∠ حـ ص هـ)

∴ ∆ ا س و ≡ ∆ حـ ص هـ وينتج أن :

ا و = حـ هـ (المطلوب ثانيًا)

١٦

∵ ص منتصف ا حـ ∴ م ص ⊥ ا حـ (١)

، بالمثل م س ⊥ ا ب

، ∵ ا حـ = ا ب ∴ م ص = م س

، من ∆ ص م س : ∵ ق (∠ م) = ١٢٠°

∴ ق (∠ س ص م) = ق (∠ ص س م)

= (١٨٠° - ١٢٠°) / ٢ = ٣٠° (٢)

، من (١) ، (٢) :

∴ ق (∠ ا ص س) = ٩٠° - ٣٠° = ٦٠°

، ∵ ص ع ينصف ∠ ا ص س

∴ ق (∠ ع ص س) = ٦٠° / ٢ = ٣٠°

∴ ق (∠ ع ص س) = ق (∠ ص س م)

(وهما في وضع تبادل)

∴ ص ع // م س (وهو المطلوب)

١٦

∵ الدائرة م ∩ الدائرة ن = {ا ، ب}

∴ م ن محور تماثل ا ب

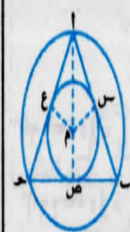
∴ في ∆ ا ب ى : ى حـ محور تماثل ا ب

∴ ا ى = ب ى

، ∵ م س ⊥ ا ى ، م ص ⊥ ب ى

∴ م س = م ص (وهو المطلوب)

١٧



العمل :

نرسم م س ، م ص ، م ع ، ا م

البرهان :

∵ ا ب مماس للدائرة الصغرى عند س

∴ م س ⊥ ا ب وبالمثل م ص ⊥ ب حـ ، م ع ⊥ ا حـ

، ∵ م س = م ص = م ع = نق للدائرة الصغرى

∴ ا ب = ب حـ = حـ ا

∴ ∆ ا ب حـ متساوي الأضلاع. (المطلوب أولًا)

∴ ق (∠ ب) = ٦٠°

، ∵ الدائرة الكبرى م هي الدائرة الخارجة للمثلث ا ب حـ

∴ م هي نقطة تلاقي ارتفاعات ∆ ا ب حـ

∴ ا ص ارتفاع للمثلث ا ب حـ

∴ في ∆ ا ب ص القائم الزاوية في ص : جا ب = ا ص / ا ب

، ∵ ا ص = ا م + م ص = ٤ + ٢ = ٦ سم

∴ جا ٦٠° = ٦ / ا ب ∴ √٣ / ٢ = ٦ / ا ب

∴ ا ب = (٦ × ٢) / √٣ = ٤ √٣ سم

∴ ب حـ = ا ب = ٤ √٣ سم

∴ مساحة ∆ ا ب حـ = ½ ب حـ × ا ص

= ½ × ٤ √٣ × ٦

= ١٢ √٣ سم² (المطلوب ثانيًا)

١٨

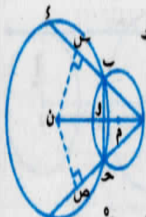
العمل : نرسم ن س ⊥ ا ى ، ن ص ⊥ ا هـ

البرهان :

∵ م ن خط المركزين ، ب حـ الوتر المشترك للدائرتين

∴ م ن ⊥ ب حـ ، و منتصف ب حـ

∴ و ب = و حـ



∴ في ∆∆ ا و ب ، ا و حـ

و ب = و حـ
ا و ضلع مشترك
ق (∠ ا و ب) = ق (∠ ا و حـ) = ٩٠°

∴ ∆ ا و ب ≡ ∆ ا و حـ

وينتج أن : ق (∠ ب ا و) = ق (∠ حـ ا و)

في ∆∆ ا س ن ، ا ص ن

∵ ق (∠ ا س ن) = ق (∠ ا ص ن) = ٩٠°

، ق (∠ س ا ن) = ق (∠ ص ا ن)

∴ ق (∠ ا ن س) = ق (∠ ا ن ص)

∴ في ∆∆ ا س ن ، ا ص ن

ق (∠ ا ن س) = ق (∠ ا ن ص)
ق (∠ س ا ن) = ق (∠ ص ا ن)
ا ن ضلع مشترك

∴ ∆ ا س ن ≡ ∆ ا ص ن

وينتج أن : ن س = ن ص

، ∵ ن س ⊥ ب ى ، ن ص ⊥ حـ هـ

∴ ب ى = حـ هـ (وهو المطلوب)

١٩

∵ ∆∆ م س ا ، م ص ب القائمي الزاوية فيهما :

م ا = م ب (طولا نصفي قطرين)
م س = م ص

∴ يتطابق المثلثان وينتج أن :

ق (∠ م ا س) = ق (∠ م ب ص)

∴ ∆ هـ ا ب متساوي الساقين (المطلوب أولًا)

، ∵ م س ⊥ ا حـ ، م ص ⊥ ب ى

، م س = م ص ∴ ا حـ = ب ى

، ∵ ا هـ = ب هـ

∴ ا هـ - ا حـ = ب هـ - ب ى

∴ هـ حـ = هـ ى (المطلوب ثانيًا)

٢٠

∵ س منتصف ا ب ∴ م س ⊥ ا ب

، بالمثل م ص ⊥ حـ ى

، ∵ ا ب = حـ ى ∴ م س = م ص

∴ ∆ س ص م متساوي الساقين

، ∵ م ل ⊥ س ص ∴ س ل = ل ص (١)

، ∵ م ل ⊥ الوتر هـ و ∴ هـ ل = ل و (٢)

بطرح (١) من (٢) : ∴ س هـ = ص و (وهو المطلوب)

٢١

∵ م ا ⊥ ع حـ ∴ ا منتصف ع حـ

، بالمثل ب منتصف ع ى

، ∵ م ا = م ب ∴ ع حـ = ع ى

∴ ½ ع حـ = ½ ع ى ∴ ا ع = ب ع

∴ ∆∆ س ا ع ، ص ب ع فيهما :

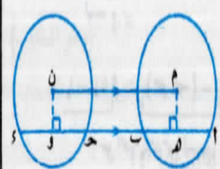
ا ع = ب ع (برهانًا)
ق (∠ ع ا س) = ق (∠ ع ب ص) = ٩٠°
∠ ع مشتركة

∴ يتطابق المثلثان وينتج أن : س ع = ص ع

، ∵ ع ى = ع حـ ∴ حـ ص = ى س

(وهو المطلوب)

٢٢



العمل : نرسم

م هـ ⊥ ا ب

، ن و ⊥ حـ ى

البرهان : ∵ هـ و // م ن ، م هـ ⊥ ا ب

، ن و ⊥ حـ د   ∴ م هـ // ن و

∴ الشكل م ن و هـ مستطيل   ∴ م هـ = ن و

∵ م ، ن دائرتان متطابقتان

∴ أ ب = حـ د   بإضافة ب حـ للطرفين

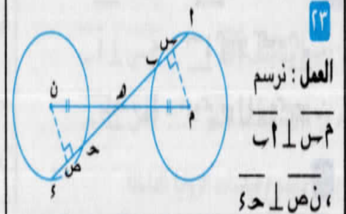
∴ أ حـ = ب د (وهو المطلوب)

٢٣

العمل: نرسم

م س ⊥ أ ب

، ن ص ⊥ حـ د



البرهان:

فى ΔΔ م س هـ ، ن ص هـ :

{ ق(∠م س هـ) = ق(∠ن ص هـ) = ٩٠°

ق(∠م هـ س) = ق(∠ن هـ ص) (بالتقابل بالرأس)

م هـ = ن هـ (معطى)

∴ Δ م س هـ ≡ Δ ن ص هـ وينتج أن : م س = ن ص

∴ أ ب = حـ د (المطلوب أولاً)

، ∵ م س ⊥ أ ب ، ن ص ⊥ حـ د

∴ س منتصف أ ب ، ص منتصف حـ د

، ∵ أ ب = حـ د   ∴ أ س = د ص

، ∵ س هـ = ص هـ (من تطابق المثلثين)

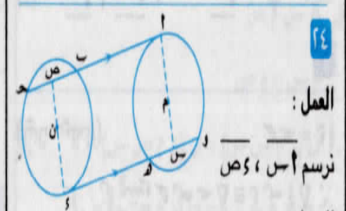
وبالجمع : ∴ أ هـ = د هـ

∴ هـ منتصف أ د (المطلوب ثانياً)

٢٤

العمل:

نرسم أ س ، د ص



البرهان:

∵ أ ب مماس للدائرة م عند أ   ∴ م أ ⊥ أ ب

، ∵ أ حـ // و د   ∴ ق(∠أ س هـ) = ٩٠°

بالمثل ∵ د هـ مماس للدائرة ن عند د

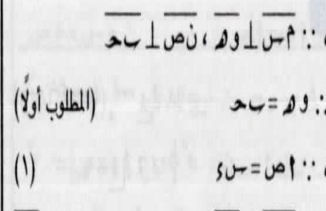
∴ ن د ⊥ د هـ

، ∵ أ حـ // و د   ∴ ق(∠د ص ب) = ٩٠°

∴ أ س د ص مستطيل   ∴ أ س = د ص

، ∵ م ، ن دائرتان متطابقتان   ∴ م أ = ن د

∴ م س = ن ص



∴ م س ⊥ و هـ ، ن ص ⊥ ب حـ

∴ و هـ = ب حـ (المطلوب أولاً)

، ∵ أ ص = س د (١)

، ∵ م س ⊥ و هـ   ∴ س منتصف و هـ

وبالمثل ص منتصف ب حـ ، ∵ و هـ = ب حـ

∴ ب ص = س هـ (٢)

وبطرح (٢) من (١) : ∴ أ ص − ب ص = س د − س هـ

∴ أ ب = د هـ (المطلوب ثانياً)

٢٥

∵ م د ⊥ أ ب   ∴ د منتصف أ ب (١)

، ∵ م هـ ⊥ أ حـ   ∴ هـ منتصف أ حـ (٢)

، ∵ أ د = $\sqrt{(٢-١)^{٢}+(٢-٠)^{٢}}=\sqrt{٥}$ وحدة طول

، أ هـ = $\sqrt{(٢-٣)^{٢}+(٢-٤)^{٢}}=\sqrt{٥}$ وحدة طول

∴ أ د = أ هـ   ∴ أ ب = أ حـ

∴ م هـ = م د (وهو المطلوب)

٢٦

∵ و منتصف أ ب

∴ و = $\left(\frac{٤+٠}{٢} ، \frac{-١-٣}{٢}\right)$ = (٢ ، −٢)

∴ م و = $\sqrt{(١-٢)^{٢}+(٠+٢)^{٢}}=\sqrt{٥}$ وحدة طول

، ∵ م هـ = $\sqrt{(١+١)^{٢}+(٠-١)^{٢}}=\sqrt{٥}$ وحدة طول

∴ م و = م هـ

، ∵ و منتصف أ ب   ∴ م و ⊥ أ ب

، ∵ هـ منتصف د حـ   ∴ م هـ ⊥ د حـ

∴ أ ب = حـ د (وهو المطلوب)

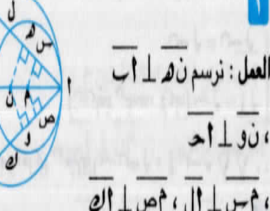
للمتفوقين

١

العمل : نرسم ن هـ ⊥ أ ب

، ن و ⊥ أ حـ

، م س ⊥ أ ل ، م ص ⊥ أ ك



البرهان : ∵ ن هـ ⊥ أ ب ، ن و ⊥ أ حـ

، أ ب = أ حـ

∴ ن هـ = ن و

∴ فى ΔΔ أ ن هـ ، أ ن و القائمى الزاوية

{ ن هـ = ن و

أ ن ضلع مشترك

∴ Δ أ ن هـ ≡ Δ أ ن و وينتج أن :

ق(∠ن أ هـ) = ق(∠ن أ و)

∴ فى ΔΔ أ م س ، أ م ص :

{ أ م ضلع مشترك

ق(∠أ س م) = ق(∠أ ص م) = ٩٠°

ق(∠س أ م) = ق(∠ص أ م)

∴ Δ أ م س ≡ Δ أ م ص وينتج أن : م س = م ص

∴ أ ل = أ ك (وهو المطلوب)

٢

العمل : نرسم

ن هـ ⊥ حـ ب

، ن و ⊥ حـ د

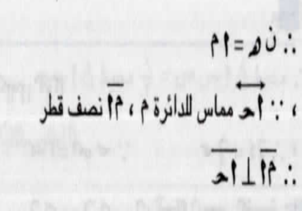
البرهان :

∵ ن هـ ⊥ حـ ب   ∴ هـ منتصف حـ ب

∴ فى Δ ن هـ حـ القائم الزاوية فى هـ :

ن هـ = $\sqrt{(ن حـ)^{٢}-(حـ هـ)^{٢}}=\sqrt{٢٥-٩}$

= ٤ سم



∴ ن هـ = أ م

، ∵ أ حـ مماس للدائرة م ، م أ نصف قطر

∴ م أ ⊥ أ حـ

، ∵ ق(∠حـ هـ ن) = ق(∠حـ أ م) = ٩٠°

(وهما فى وضع تناظر)

∴ ن هـ // م أ   ∴ الشكل ن هـ أ م مستطيل

∴ ن م // حـ أ   ∴ الشكل م أ حـ ن شبه منحرف

مساحته = $\frac{١}{٢}$ (م ن + أ حـ) × أ م

= $\frac{١}{٢}$ (١٢ + ١٥) × ٤ = ٥٤ سم^{٢}

(المطلوب أولاً)

، ∵ ن و ⊥ حـ د ، ن هـ ⊥ حـ ب ، حـ د = حـ ب

∴ ن و = ن هـ = ٤ سم

∴ بعد النقطة ن عن حـ د يساوى ٤ سم (المطلوب ثانياً)

إجابات الوحدة الخامسة

إجابات تمارين ٦

١

١ (أ)	٢ (أ)	٣ (أ)	٤ (جـ)
٥ (أ)	٦ (أ)	٧ (جـ)	٨ (جـ)
٩ (ب)	١٠ (ب)	١١ (أ)	١٢ (جـ)
١٣ (جـ)	١٤ (د)	١٥ (د)	١٦ (أ)
١٧ (أ)			

٢

١ ٧٥°	٢ ١٤٠°	٣ ٢٥٥°	٤ ٢٢٠°

٣

١ ٢٥°	٢ ٥٠°	٣ ١٠٠°	٤ ١٣٠°
٥ ١٥٠°	٦ ٢١٠°	٧ ٢٦٠°	٨ ٣١٠°

٤

قياس القوس = $\frac{١}{٣}$ قياس الدائرة

= $\frac{١}{٣}$ × ٣٦٠° = ١٢٠°

، طول القوس = $\frac{١}{٣}$ محيط الدائرة

= $\frac{١}{٣}$ × ٢ π نق

= $\frac{١}{٣}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٢١ = ٤٤ سم

٥

١ ق(∠أ م ب) = ق(⌢أب) = ٦٠°

٢ طول ⌢أب = $\frac{٦٠°}{٣٦٠°}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٢١ = ٢٢ سم

٦

∵ ق(⌢أحـ) = ق(⌢بحـ)

∴ أحـ = بحـ

∴ فى △ أبحـ :

∵ أحـ = بحـ ، ق(∠حـ) = ٧٠°

∴ ق(∠أبحـ) = $\frac{١٨٠° - ٧٠°}{٢}$ = ٥٥° (وهو المطلوب)

٧

∵ م أ = م ب = نق

∴ ق(∠أ) = ق(∠ب) = ٤٥°

∴ ق(∠م) = ١٨٠° - (٤٥° + ٤٥°) = ٩٠°

∴ ق(⌢أب) = ٩٠°

∴ طول ⌢أب = $\frac{٩٠°}{٣٦٠°}$ × ٢ π نق

= $\frac{٩٠°}{٣٦٠°}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ = ١١ سم (وهو المطلوب)

٨

∵ أب ∩ حـ ء = {م}

∴ ق(∠أ م حـ) = ق(∠ء م ب) = ٢٥° (بالتقابل بالرأس)

∴ ق(⌢أحـ) = ٢٥°

، ∵ أب // حـ هـ

∴ ق(⌢ب هـ) = ق(⌢أحـ) = ٢٥° (وهو المطلوب)

٩

∵ أب = حـ ء ∴ ق(⌢أب) = ق(⌢حـ ء)

، ∵ أب // حـ ء ∴ ق(⌢أحـ) = ق(⌢ب ء)

، ∵ ق(⌢أب) + ق(⌢ب ء) + ق(⌢حـ ء) + ق(⌢أحـ) = ٣٦٠°

∴ ق(⌢حـ ء) + ق(⌢أحـ) + ق(⌢حـ ء) + ق(⌢أحـ) = ٣٦٠°

∴ ٢ ق(⌢أحـ) + ٢ ق(⌢حـ ء) = ٣٦٠°

∴ ق(⌢أحـ) + ق(⌢حـ ء) = ١٨٠°

∴ ق(⌢أ ء) = ١٨٠°

∴ أ ء قطرًا فى الدائرة. (وهو المطلوب)

١٠

∵ س ب // حـ ص

∴ ق(⌢س حـ) = ق(⌢ب ص)

∴ س حـ = ب ص

، ∵ م أ ⊥ س حـ ، م ء ⊥ ب ص

∴ م أ = م ء (وهو المطلوب)

١١

∵ أ ء = ب حـ ∴ ق(⌢أ ء) = ق(⌢ب حـ)

∴ ق(∠أ ن ء) = ق(∠حـ ن ب)

وبإضافة ق(∠ء ن ب) للطرفين

∴ ق(∠أ ن ب) = ق(∠حـ ن ء) (وهو المطلوب)

١٢

∵ أحـ قطر فى الدائرة م

∴ ق(⌢أ ب حـ) = ق(⌢أ ء حـ) «نصف دائرة» (١)

، ∵ ب حـ = حـ ء ∴ ق(⌢ب حـ) = ق(⌢حـ ء) (٢)

وبطرح (٢) من (١) :

∴ ق(⌢أب) = ق(⌢أ ء) (وهو المطلوب)

١٣

∵ أب قطر فى الدائرة م ∴ ق(⌢أب) = ١٨٠°

، ∵ ق(⌢أحـ) = ق(⌢حـ ء) = ق(⌢ء ب)

∴ ق(⌢حـ ء) = $\frac{١٨٠°}{٣}$ = ٦٠°

∴ ق(∠حـ م ء) = ٦٠° ، ∵ م حـ = م ء

∴ △ م حـ ء متساوى الأضلاع (وهو المطلوب)

١٤

∵ ق(∠حـ م ء) = ٧٠° ∴ ق(⌢حـ ء) = ٧٠°

∵ ق(⌢أحـ) + ق(⌢حـ ء) + ق(⌢ء ب) = ١٨٠°

∴ ق(⌢أحـ) + ق(⌢ء ب) = ١٨٠° - ٧٠° = ١١٠°

وبفرض أن : ق(⌢أحـ) = ٥ س، ق(⌢ء ب) = ٦ س

∴ ٥ س + ٦ س = ١١٠°

∴ ١١ س = ١١٠° ∴ س = ١٠°

∴ ق(⌢أحـ) = ٥ × ١٠° = ٥٠°

∴ ق(⌢أحـ ء) = ٥٠° + ٧٠° = ١٢٠° (وهو المطلوب)

١٥



∵ أب // ء حـ

∴ ق(⌢ب حـ) = ق(⌢أ ء)

، ∵ هـ منتصف ⌢أب

∴ ق(⌢هـ ب) = ق(⌢أ هـ) وبالجمع

∴ ق(⌢حـ هـ) = ق(⌢ء هـ)

∴ حـ هـ = ء هـ (وهو المطلوب)

١٦

∵ أب // هـ و ∴ ق(⌢أ هـ) = ق(⌢ب و) (١)

، ∵ أب // حـ ء ∴ ق(⌢أحـ) = ق(⌢ب حـ) (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ ق(⌢حـ هـ) = ق(⌢حـ و)

∴ حـ هـ = حـ و (وهو المطلوب)

حل آخر:

∵ حـ ء // هـ و ∴ ق(⌢هـ حـ) = ق(⌢حـ و)

∴ حـ هـ = حـ و (وهو المطلوب)

١٧

∵ أب = حـ ء (خواص المستطيل) ، حـ هـ = حـ ء

∴ أب = حـ هـ ∴ ق(⌢أب) = ق(⌢حـ هـ)

وبإضافة ق(⌢ب هـ) للطرفين

∴ ق(⌢أ هـ) = ق(⌢ب حـ)

∴ أ هـ = ب حـ (وهو المطلوب)

١٨

∵ طول ⌢أحـ = طول ⌢أب

∴ ق(⌢أحـ) = ق(⌢أب) = ٨٠°

∴ ق(∠ أ م ب) = ٨٠°

في △ أ م ب : ∵ م أ = م ب = نق

∴ ق(∠ م أ ب) = $\frac{١٨٠° - ٨٠°}{٢}$ = ٥٠° (المطلوب أولاً)

، ∵ أب // حـ ء

∴ ق(أحـ⌒) = ق(ب ء⌒) = ٨٠°

، ∵ ق(حـ ء⌒) + ق(أحـ⌒) + ق(أب⌒) + ق(ب ء⌒)

= ٣٦٠°

∴ ق(حـ ء⌒) = ٣٦٠° − (٨٠° + ٨٠° + ٨٠°)

= ١٢٠° (المطلوب ثانياً)

∴ طول حـ ء⌒ = $\frac{١٢٠°}{٣٦٠°}$ × ٢ × ٣,١٤ × ١٥ = ٣١,٤ سم

(المطلوب ثالثاً)

١٩

∵ أب // حـ ء ، م ء قاطع لهما

∴ ق(∠ حـ ء م) + ق(∠ أ م ء) = ١٨٠°

داخلتان وفي جهة واحدة من القاطع

∴ ق(∠ حـ ء م) = ١٨٠° − ٩٠° = ٩٠°

، ∵ م ء = ½ م ب

، م حـ = م ب = نق ∴ م ء = ½ م حـ

∴ ق(∠ م حـ ء) = ٣٠°

، ∵ أب // حـ ء ، حـ م قاطع لهما

∴ ق(∠ أ م حـ) = ق(∠ م حـ ء) = ٣٠° (بالتبادل)

∴ ق(أحـ⌒) = ق(∠ أ م حـ) = ٣٠° (وهو المطلوب)

٢٠

نفرض أن

ق(∠ أ م ب) المنعكسة = س°

∴ ق(∠ أ م ب) = ¼ س°

∴ ¼ س° + س° = ٣٦٠°

∴ $\frac{٥}{٤}$ س° = ٣٦٠° ∴ س° = ٢٨٨°

∴ ق(أب⌒) = ق(∠ أ م ب) = ¼ × ٢٨٨° = ٧٢°

(وهو المطلوب)

٢١

∵ أحـ = ب ء

∴ ق(أب حـ⌒) = ق(ب حـ ء⌒)

وبطرح ق(ب حـ⌒) من الطرفين

∴ ق(أب⌒) = ق(حـ ء⌒)

∵ أب = حـ ء ∴ ٣ س − ٥ = س + ٣

∴ ٢ س = ٨ ∴ س = ٤

∴ أب = ٧ سم (وهو المطلوب)

٢٢

∵ أب قطر في الدائرة م ∴ ق(أب⌒) = ١٨٠°

، أب // ء هـ

∴ ق(أحـ⌒) = ق(حـ ب⌒) = $\frac{١٨٠°}{٢}$ = ٩٠°

∴ ق(أ س⌒) = ٤٥°

∴ ق(∠ أ م س) = ق(أ س⌒) = ٤٥°

∵ ء هـ // أب ، ء م قاطع لهما

∴ ق(∠ هـ ء م) = ق(∠ أ م ء) = ٤٥° (بالتبادل)

، ∵ ق(ب ص⌒) = ٢ ق(حـ ص⌒)

∴ ق(ب ص⌒) = ٦٠°

∴ ق(∠ ص م ب) = ق(ب ص⌒) = ٦٠°

، ∵ ء هـ // أب ، م هـ قاطع لهما

∴ ق(∠ ء هـ م) = ق(∠ هـ م ب) = ٦٠° (بالتبادل)

∴ في △ ء م هـ :

ق(∠ ء م هـ) = ١٨٠° − (٤٥° + ٦٠°) = ٧٥°

(وهو المطلوب)

٢٣

١ العمل : نرسم م ء

البرهان :

∵ حـ ء مماس للدائرة م عند ء

، م ء نصف قطر

∴ ق(∠ م ء حـ) = ٩٠°

في △ م ء حـ : ∴ ق(∠ حـ م ء) = ٥٠°

∴ ق(ب ء⌒) = ٥٠° (المطلوب أولاً)

∴ ق(أ ء⌒) = ١٨٠° − ٥٠° = ١٣٠° (المطلوب ثانياً)

٢ العمل : نرسم م ء ، م أ

البرهان :

∵ حـ ء مماس للدائرة م عند ء

، م ء نصف قطر

∴ ق(∠ م ء حـ) = ٩٠°

∴ ق(∠ م ء أ) = ١٢٠° − ٩٠° = ٣٠°

في △ م ء أ : ∵ م ء = م أ = نق

∴ ق(∠ ء م أ) = ١٨٠° − (٣٠° + ٣٠°) = ١٢٠°

∴ ق(∠ ء م أ) المنعكسة = ٢٤٠°

∴ ق(أب ء⌒) = ٢٤٠° (وهو المطلوب)

٢٤

العمل : نرسم م ء ، م هـ

البرهان : في △ ء م هـ :

∵ ء هـ = ½ أب

∴ ء هـ = نق

∴ م ء = هـ م = ء هـ = نق ∴ ق(∠ ء م هـ) = ٦٠°

، ∵ ء هـ // أب ، ء م قاطع لهما.

∴ ق(∠ أ م ء) = ق(∠ م ء هـ) = ٦٠° (بالتبادل)

∴ ق(أ ء⌒) = ق(∠ أ م ء) = ٦٠° (وهو المطلوب)

للمتفوقين

١

العمل : نرسم م أ ، م هـ

البرهان :

∵ أب = ب حـ = حـ ء

= ء هـ = أ هـ

(خواص الخماسي المنتظم)

∴ ق(أب⌒) = ق(ب حـ⌒) = ق(حـ ء⌒)

= ق(ء هـ⌒) = ق(أ هـ⌒)

، ∵ قياس الدائرة = ٣٦٠°

∴ ق(أ هـ⌒) = $\frac{٣٦٠°}{٥}$ = ٧٢° (المطلوب أولاً)

∴ ق(∠ أ م هـ) = ق(أ هـ⌒) = ٧٢°

∵ أ س مماس للدائرة عند أ ، م أ نصف قطر

∴ ق(∠ م أ س) = ٩٠°

وبالمثل ق(∠ م هـ س) = ٩٠°

في الشكل الرباعي م أ س هـ :

∴ ق(∠ أ س هـ) = ٣٦٠° − (٧٢° + ٩٠° + ٩٠°)

= ١٠٨° (المطلوب ثانياً)

٢

العمل : نرسم م ن ، م و ، ن و

البرهان : ∵ أ ∈ م ن

، ب ∈ ن و ، حـ ∈ م و

، م ، ن ، و ثلاث دوائر متطابقة

∴ أطوال أنصاف أقطارها متساوية

∴ △ م ن و متساوي الأضلاع

∴ ق(∠ أ ن ب) = ق(∠ ب و حـ) = ق(∠ أ م حـ) = ٦٠°

∴ ق(أب⌒) = ق(ب حـ⌒) = ق(أحـ⌒)

∴ طول أب⌒ = طول ب حـ⌒ = طول أحـ⌒ (المطلوب أولاً)

∴ محيط الشكل أ ب حـ = ٣ × $\frac{٦٠}{٣٦٠}$ × ٢ × ٣,١٤ × ١٠

= ٣١,٤ سم (المطلوب ثانياً)

إجابات تمارين ٧

أولاً مسائل على نظرية (١) ونتائجها

١

[١] ٥٥° [٢] ٧٠° [٣] ٣٠°

[٤] ٤٥° [٥] ٤٠° [٦] ١١٤°

[٧] ٨٠° [٨] ١١٠° [٩] ٢٠°

[١٠] ق(∠أ) = ٧٠° ، ق(⌒أ جـ) = ١٠٠°

[١١] ق(∠جـ) = ٩٠° ، ق(∠ب) = ٢٦°

[١٢] ٣٠° [١٣] ٤٠° [١٤] ٧٥° [١٥] ٢٥°

[١٦] ٥٥°

[١٧] ق(∠م) = ٨٠° ، ق(∠جـ) = ١٤٠°

[١٨] ١١٥° [١٩] ٣٠َ ١١٧° [٢٠] ١١٠°

٢

[١] ص = ٧٠° [٢] ع = ٤٠° [٣] ل = ٤٠°

[٤] ع = ٣٠َ ٦٢° [٥] س = ١٣٥°

[٦] ص = ٤٠° ، ع = ١٠°

٣

[١] (أ) [٢] (ب) [٣] (جـ) [٤] (جـ)

[٥] (جـ) [٦] (ب) [٧] (د) [٨] (جـ)

[٩] (د) [١٠] (أ) [١١] (ب) [١٢] (جـ)

[١٣] (أ) [١٤] (د) [١٥] (أ) [١٦] (أ)

[١٧] (أ) [١٨] (ب) [١٩] (د) [٢٠] (ب)

[٢١] (أ) [٢٢] (ب) [٢٣] (ب)

٤

∵ م أ = م ب (طولا نصفى قطرين)

∴ ق(∠م ب أ) = ق(∠م أ ب) = ٢٦°

∴ ق(∠أ م ب) = ١٨٠° - (٢٦° + ٢٦°) = ١٢٨°

(المطلوب أولاً)

، ∵ ق(∠أ جـ ب) = $\frac{1}{2}$ ق(∠أ م ب)

(محيطية ومركزية مشتركتان فى ⌒أ ب)

∴ ق(∠أ جـ ب) = $\frac{1}{2}$ × ١٢٨° = ٦٤° (المطلوب ثانيًا)

، ∵ ق(∠أ م ب المنعكسة) = ٣٦٠° - ١٢٨° = ٢٣٢°

∴ ق(∠أ س ب) = $\frac{1}{2}$ ق(∠أ م ب المنعكسة) = ١١٦°

(محيطية ومركزية مشتركتان فى ⌒أ ب الأكبر)

(المطلوب ثالثًا)

، ق(⌒أ س ب) = ق(∠أ م ب) = ١٢٨° (المطلوب رابعًا)

٥

∵ ق(∠ب جـ ء) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ب م ء)

(محيطية ومركزية مشتركتان فى ⌒ب ء)

∴ ق(∠ب جـ ء) = $\frac{1}{2}$ × ٥٠° = ٢٥°

، ∵ $\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة م

∴ ق(∠أ جـ ب) = ٩٠°

∴ ق(∠أ جـ ء) = ق(∠أ جـ ب) + ق(∠ب جـ ء)

= ٩٠° + ٢٥° = ١١٥° (وهو المطلوب)

٦

∵ $\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة م ∴ ق(∠أ جـ ب) = ٩٠°

∴ ق(∠أ ب جـ) = ١٨٠° - (٩٠° + ٣٥°) = ٥٥°

، وبالمثل ق(∠أ ء ب) = ٩٠°

، ∵ طول ⌒أ ء = طول ⌒ء ب ∴ أ ء = ء ب

∴ ق(∠ء ب أ) = ق(∠ء أ ب) = $\frac{١٨٠° - ٩٠°}{٢}$ = ٤٥°

∴ ق(∠جـ ب ء) = ٥٥° + ٤٥° = ١٠٠° (وهو المطلوب)

٧

∵ ق(⌒أ جـ) = ٢ ق(∠أ ب جـ) = ١٤٠°

، ء منتصف ⌒أ جـ ∴ ق(⌒أ ء) = $\frac{١٤٠°}{٢}$ = ٧٠°

∴ ق(∠ء جـ أ) = ٣٥° (المطلوب أولاً)

، ∵ $\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة م ∴ ق(∠أ جـ ب) = ٩٠°

∴ ق(∠جـ أ ب) = ١٨٠° - (٩٠° + ٧٠°) = ٢٠°

(المطلوب ثانيًا)

٨

∵ $\overline{أ جـ}$ تمس الدائرة عند أ ∴ $\overline{ب أ}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$

∴ فى △ أ ب جـ :

(جـ ب)² = (أ ب)² + (أ جـ)² = (١٢)² + (٩)² = ٢٢٥

∴ جـ ب = ١٥ سم (المطلوب أولاً)

، ∵ $\overline{أ ب}$ قطر ∴ ق(∠أ ء ب) = ٩٠°

∴ أ ء = $\frac{أ جـ × أ ب}{ب جـ}$ = $\frac{٩ × ١٢}{١٥}$ = ٧,٢ سم

(المطلوب ثانيًا)

٩

∵ ق(∠ب م جـ) = ٢ ق(∠أ)

(مركزية ومحيطية مشتركتان فى ⌒ب جـ)

∴ ق(∠ب م جـ) = ٢ × ٣٠° = ٦٠°

، ∵ م ب = م جـ = نق

∴ △ م ب جـ متساوى الأضلاع

∴ م ب = م جـ = ب جـ = ٧ سم = نق

∴ مساحة الدائرة م = π نق²

= $\frac{٢٢}{٧}$ × ٤٩ = ١٥٤ سم²

(وهو المطلوب)

١٠

∵ $\overline{م ء}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$

∴ ء منتصف $\overline{ب جـ}$

∴ ب ء = ٣ سم

∴ جتا(∠م ب ء) = $\frac{ب ء}{ب م}$ = $\frac{٣}{٢\sqrt{٣}}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ ق(∠م ب ء) = ٣٠°

فى △ م ب جـ : ∵ م ب = م جـ = نق

∴ ق(∠م جـ ب) = ٣٠°

∴ ق(∠ب م جـ) = ١٨٠° - ٢ × ٣٠° = ١٢٠°

∴ ق(∠ب أ جـ) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ب م جـ)

(محيطية ومركزية مشتركتان فى ⌒ب جـ)

∴ ق(∠ب أ جـ) = $\frac{1}{2}$ × ١٢٠° = ٦٠° (وهو المطلوب)

١١

∵ ق(∠جـ) = $\frac{1}{2}$ ق(∠أ م ب)

(محيطية ومركزية مشتركتان فى ⌒أ ب)

∴ ق(∠جـ) = $\frac{1}{2}$ × ١٢٠° = ٦٠°

، فى △ أ م ب :

∵ م أ = م ب = نق

∴ ق(∠م أ ب) = ق(∠م ب أ) = $\frac{١٨٠° - ١٢٠°}{٢}$ = ٣٠°

، ق(∠جـ أ ب) = ١٨٠° - ١٣٠° = ٥٠°

∴ فى △ أ ب جـ :

ق(∠أ ب جـ) = ١٨٠° - (٦٠° + ٥٠°) = ٧٠°

∴ ق(∠م ب جـ) = ٧٠° - ٣٠° = ٤٠° (وهو المطلوب)

١٢

∵ ق(∠هـ ب جـ) = $\frac{1}{2}$ ق(∠م)

(محيطية ومركزية مشتركتان فى ⌒هـ جـ)

∴ ق(∠هـ ب جـ) = $\frac{1}{2}$ × ١٢٠° = ٦٠°

، ∵ ∠هـ ب جـ خارجة عن المثلث أ ب هـ

∴ ق(∠ب هـ أ) + ق(∠أ) = ٦٠°

، ∵ ب هـ = ب أ

∴ ق(∠أ) = $\frac{٦٠°}{٢}$ = ٣٠° (وهو المطلوب)

١٣

∵ ق(∠ب أ جـ) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ب ن جـ)

(محيطية ومركزية مشتركتان فى ⌒ب جـ)

∴ ق(∠ب أ جـ) = $\frac{1}{2}$ × ٨٠° = ٤٠°

، ∵ أ ب = أ جـ

∴ ق(∠أ ب جـ) = ق(∠أ جـ ب) = $\frac{١٨٠° - ٤٠°}{٢}$

= ٧٠° (المطلوب أولاً)

، ∵ ق(⌒ب جـ) = ق(∠ن) = ٨٠°

∴ ق(⌒ب جـ) الأكبر = ٣٦٠° - ٨٠° = ٢٨٠°

(المطلوب ثانيًا)

١٤

∴ ق(∠ أ حـ ء) = $\frac{1}{2}$ ق(⌢أ ء) = $\frac{1}{2}$ × $\frac{1}{2}$ ق(⌢أ ب)

∴ ق(∠ أ حـ ء) = $\frac{1}{4}$ ق(⌢أ ب) = $\frac{1}{4}$ ق(∠ أ ن ب)

(وهو المطلوب)

١٥

∵ أ ب // حـ ء ، أ حـ قاطع لهما

∴ ق(∠ ب أ حـ) + ق(∠ أ حـ ء) = °١٨٠

∴ °١٠٠ + ق(∠ أ حـ ء) = °١٨٠

∴ ق(∠ أ حـ ء) = °٨٠

∴ ق(∠ أ م ء) = ٢ ق(∠ أ حـ ء) = °١٦٠

(مركزية ومحيطية مشتركتان فى ⌢أ ء) (وهو المطلوب)

١٦

∵ ق(∠ أ حـ ب) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ أ م ب)

(محيطية ومركزية مشتركتان فى ⌢أ ب)

∴ ق(∠ أ حـ ب) = $\frac{1}{2}$ × °١٢٠ = °٦٠ (١)

، ∵ حـ ء // أ ب

∴ ق(⌢أ حـ) = ق(⌢ب حـ)

∴ أ حـ = ب حـ (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ Δ حـ أ ب متساوى الأضلاع (وهو المطلوب)

١٧

∵ أ ب قطر فى الدائرة م ∴ ق(⌢أ ب) = °١٨٠

، ∵ ق(⌢أ حـ) = ٢ ق(∠ أ ب حـ) = ٢ × °٤٠ = °٨٠

∴ ق(⌢ب ء حـ) = °١٨٠ - °٨٠ = °١٠٠

، ∵ ء هـ // ب حـ

∴ ق(⌢حـ ء) = ق(⌢ب ء) = $\frac{١٠٠}{٢}$ = °٥٠

(وهو المطلوب)

١٨

∵ ق(∠ أ حـ ء) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ أ م ء)

(محيطية ومركزية مشتركتان فى ⌢أ ء)

∴ ق(∠ أ حـ ء) = $\frac{1}{2}$ × °٧٠ = °٣٥ (المطلوب أولًا)

، ∵ ء حـ // أ ب ، أ حـ قاطع لهما

∴ ق(∠ أ) = ق(∠ أ حـ ء) = °٣٥ (بالتبادل)

، ∵ أ ب قطر فى الدائرة م

∴ ق(∠ أ حـ ب) = °٩٠

∴ من Δ أ ب حـ :

ق(∠ أ ب حـ) = °١٨٠ - (°٩٠ + °٣٥) = °٥٥

(المطلوب ثانيًا)

١٩

∵ أ ب قطر فى الدائرة م

∴ ق(∠ حـ) = °٩٠

، ∵ م ء ⊥ أ حـ

∴ ق(∠ أ ء م) = °٩٠

∴ ق(∠ حـ) = ق(∠ أ ء م) = °٩٠

وهما فى وضع تناظر

∴ ء م // ب حـ (المطلوب أولًا)

، ∵ Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى حـ

، ق(∠ أ) = °٣٠

∴ ب حـ = $\frac{1}{2}$ أ ب ، ∵ أ ب قطر فى الدائرة م

∴ ب حـ = طول نصف قطر الدائرة. (المطلوب ثانيًا)

٢٠

∵ ق(∠ ب أ حـ)

= $\frac{1}{2}$ ق(∠ م)

(محيطية ومركزية

مشتركتان فى ⌢ب حـ)

∴ ق(∠ ب أ حـ) = °٧٠

، ∵ ب ء ∩ حـ هـ = {أ}

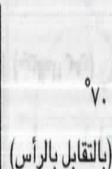
∴ ق(∠ هـ أ ء) = ق(∠ ب أ حـ) = °٧٠

(بالتقابل بالرأس)

∴ ق(⌢هـ ء) = ٢ ق(∠ هـ أ ء) = ٢ × °٧٠ = °١٤٠

(وهو المطلوب)

٢١



∵ ق(∠ ص م حـ)

= ٢ ق(∠ ص ب حـ)

(مركزية ومحيطية مشتركتان

فى ⌢حـ ص) (١)

فى Δ ب م ص : ∵ م ب = م ص = نق

∴ ق(∠ ص ب م) = ق(∠ ب ص م) (٢)

، ∵ ص ، م منتصفا ب هـ ، ب حـ على الترتيب

∴ م ص // هـ حـ

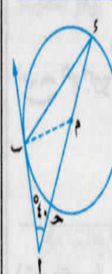
، ∵ ب هـ قاطع لهما

∴ ق(∠ ب ص م) = ق(∠ ب هـ حـ) (بالتناظر) (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) :

∴ ق(∠ ص م حـ) = ٢ ق(∠ ب هـ حـ) (وهو المطلوب)

٢٢



العمل : نرسم م ب

البرهان :

∵ أ ب مماس للدائرة عند ب

، م ب نصف قطر

∴ ق(∠ م ب أ) = °٩٠

∴ فى Δ م ب أ :

ق(∠ ب م أ) = °١٨٠ - (°٩٠ + °٤٠) = °٥٠

∵ ق(∠ ب ء حـ) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ ب م حـ)

(محيطية ومركزية مشتركتان فى ⌢ب حـ)

∴ ق(∠ ب ء حـ) = $\frac{1}{2}$ × °٥٠ = °٢٥ (وهو المطلوب)

٢٣



العمل : نرسم م ب

البرهان :

ق(∠ أ ء ب) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ أ م ب)

(محيطية ومركزية مشتركتان فى ⌢أ ب) (١)

فى Δ أ م ب :

∵ أ م = ب م ، م حـ ⊥ أ ب

∴ م حـ ينصف ∠ أ م ب

∴ ق(∠ أ م حـ) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ أ م ب) (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ ق(∠ أ م حـ) = ق(∠ أ ء ب) (وهو المطلوب)

٢٤

∵ أ ب قطر فى الدائرة م

∴ ق(∠ أ حـ ب) = °٩٠

فى Δ أ حـ ب :

∴ ق(∠ أ) = °١٨٠ - (°٩٠ + °٤٠) = °٥٠

، ∵ أ حـ // ء م ، أ م قاطع لهما

∴ ق(∠ أ) = ق(∠ أ م ء) = °٥٠ (بالتبادل)

∴ ق(∠ أ حـ ء) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ أ م ء)

(محيطية ومركزية مشتركتان فى ⌢أ ء)

∴ ق(∠ أ حـ ء) = $\frac{1}{2}$ × °٥٠ = °٢٥ (وهو المطلوب)

٢٥

∵ ق(∠ أ م حـ) = ٢ ق(∠ أ ب حـ)

(مركزية ومحيطية مشتركتان فى ⌢أ حـ)

، ∵ حـ م // أ ب ، أ م قاطع لهما

∴ ق(∠ م أ ب) = ق(∠ أ م حـ) (بالتبادل)

فى Δ أ هـ ب : ∴ ق(∠ هـ أ ب) = ٢ ق(∠ هـ ب أ)

∴ ق(∠ هـ أ ب) > ق(∠ هـ ب أ)

∴ ب هـ > أ هـ (وهو المطلوب)

٢٦

∵ ق(أب⌒) : ق(ب حـ⌒) : ق(أحـ⌒) = ٤ : ٥ : ٣

∴ ق(أب⌒) = ٤ س ، ق(ب حـ⌒) = ٥ س

، ق(أحـ⌒) = ٣ س

∴ ٤ س + ٥ س + ٣ س = °٣٦٠

∴ ١٢ س = °٣٦٠ ∴ س = $\frac{°٣٦٠}{١٢}$ = °٣٠

∴ ق(أب⌒) = ٤ × °٣٠ = °١٢٠

، ∵ ق(∠أحـب) = $\frac{١}{٢}$ ق(أب⌒)

∴ ق(∠أحـب) = $\frac{١}{٢}$ × °١٢٠ = °٦٠ (وهو المطلوب)

٢٧

∵ ق(∠ب أحـ) = $\frac{١}{٢}$ ق(ب حـ⌒)

∴ س + °١٠ = $\frac{١}{٢}$ (٣ س − °٢٠)

∴ ٢ س + °٢٠ = ٣ س − °٢٠

∴ ٣ س − ٢ س = °٢٠ + °٢٠

∴ س = °٤٠ ∴ ق(∠أ) = °٤٠ + °١٠ = °٥٠

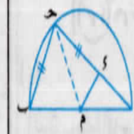
، ∵ ق(∠ب م حـ) = ٢ ق(∠أ)

(مركزية ومحيطية مشتركتان فى ب حـ⌒)

∴ ص = ٢ ق(∠أ)

∴ ص = ٢ × °٥٠ = °١٠٠ (وهو المطلوب)

٢٨



العمل: نرسم م حـ

البرهان: ∵ حـ ء = حـ ب = نق

، ∵ م ب = م حـ = نق

∴ م حـ = م ب = ب حـ

∴ Δ م ب حـ متساوى الأضلاع

∴ ق(∠م حـ ب) = °٦٠

، ∵ أب قطر فى الدائرة م

∴ ق(∠أحـب) = °٩٠

∴ ق(∠م حـ ء) = °٩٠ − °٦٠ = °٣٠

فى Δ م حـ ء : ∵ حـ ء = نق ∴ حـ ء = حـ م

∴ ق(∠حـ ء م) = $\frac{°١٨٠ − °٣٠}{٢}$ = °٧٥

∴ ق(∠أ ء م) = °١٨٠ − °٧٥ = °١٠٥ (وهو المطلوب)

ثانيا مسائل على التمارين المشهورة

١

١ °٨٠ ٢ °٢٠ ٣ °١٠٠

٤ °٨٦ ٥ °٤٠ ٦ °٦٠

٢

١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (أ)

٤ (جـ) ٥ (ب) ٦ (ب)

٣

∵ ق(حـ ب⌒) + ق(ب ء⌒) + ق(أ ء⌒) + ق(أحـ⌒) = °٣٦٠

∴ ق(حـ ب⌒) = °٣٦٠ − (°٦٠ + °١٠٠ + °١٢٠) = °٨٠

(المطلوب أولاً)

∴ ق(∠حـ هـ ب) = $\frac{١}{٢}$ (°٨٠ + °١٠٠) = °٩٠

(المطلوب ثانيًا)

٤

∵ $\frac{١}{٢}$ (ق(هـ حـ⌒) − °٦٠) = °٤٠

∴ ق(هـ حـ⌒) − °٦٠ = °٨٠

∴ ق(هـ حـ⌒) = °١٤٠ (المطلوب أولاً)

، ∵ ق(ب ء⌒) + ق(ب حـ⌒) + ق(حـ هـ⌒) + ق(ء هـ⌒)

= °٣٦٠

، ق(ب حـ⌒) = ق(ء هـ⌒)

∴ °٦٠ + ٢ ق(ب حـ⌒) + °١٤٠ = °٣٦٠

∴ ق(ب حـ⌒) = °٨٠ (المطلوب ثانيًا)

٥

∵ ق(∠هـ) = $\frac{١}{٢}$ [ق(أحـ⌒) − ق(ب ء⌒)]

∴ °٣٠ = $\frac{١}{٢}$ [°٨٠ − ق(ب ء⌒)]

∴ °٦٠ = °٨٠ − ق(ب ء⌒)

∴ ق(ب ء⌒) = °٢٠

، ∵ أب قطر فى الدائرة م

∴ ق(أب⌒) = °١٨٠

∴ ق(أحـ⌒) + ق(حـ ء⌒) + ق(ب ء⌒) = °١٨٠

∴ °٨٠ + ق(حـ ء⌒) + °٢٠ = °١٨٠

∴ ق(حـ ء⌒) = °٨٠ (وهو المطلوب)

٦

∵ ق(∠أ) = $\frac{١}{٢}$ [ق(ب حـ⌒) − ق(ء هـ⌒)]

∴ °٧٠ = $\frac{١}{٢}$ [°١٨٠ − ق(ء هـ⌒)]

∴ °١٤٠ = °١٨٠ − ق(ء هـ⌒)

∴ ق(ء هـ⌒) = °١٨٠ − °١٤٠ = °٤٠

، ∵ ء هـ // ب حـ ∴ ق(ب ء⌒) = ق(هـ حـ⌒)

، ∵ ق(ب ء⌒) + ق(ء هـ⌒) + ق(هـ حـ⌒) = °١٨٠

∴ ق(ب ء⌒) + °٤٠ + ق(ب ء⌒) = °١٨٠

∴ ٢ ق(ب ء⌒) = °١٨٠ − °٤٠ = °١٤٠

∴ ق(ب ء⌒) = $\frac{°١٤٠}{٢}$ = °٧٠ (وهو المطلوب)

٧

∵ أب قطر فى الدائرة م

∴ ق(أب⌒) = °١٨٠ ، ∵ ق(حـ ء⌒) = °٨٠

∴ ق(أحـ⌒) + ق(ب ء⌒) = °١٨٠ − °٨٠ = °١٠٠

، ∵ أب // حـ ء

∴ ق(أحـ⌒) = ق(ب ء⌒) = $\frac{°١٠٠}{٢}$ = °٥٠

، ∵ ق(∠ء هـ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق(ب ء⌒)

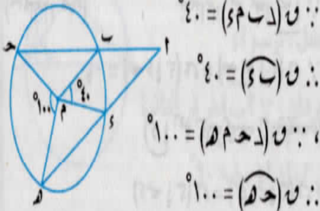
∴ ق(∠ء هـ ب) = $\frac{١}{٢}$ × °٥٠ = °٢٥ (المطلوب أولاً)

، ∵ ق(∠أ و هـ) = $\frac{١}{٢}$ [ق(أهـ⌒) + ق(ب ء⌒)]

∴ ق(∠أ و هـ) = $\frac{١}{٢}$ [°١٠٠ + °٥٠] = °٧٥

(المطلوب ثانيًا)

٨



∵ ق(∠ب م ء) = °٤٠

∴ ق(ب ء⌒) = °٤٠

، ∵ ق(∠حـ م هـ) = °١٠٠

∴ ق(حـ هـ⌒) = °١٠٠

∴ ق(∠أ) = $\frac{١}{٢}$ (°١٠٠ − °٤٠) = °٣٠ (وهو المطلوب)

٩

∵ ق(ب ء⌒) الأكبر = ٢ ق(∠ب حـ ء)

= ٢ × °١٠٠ = °٢٠٠

∴ ق(ب حـ ء⌒) = °٣٦٠ − °٢٠٠ = °١٦٠

، ∵ ق(هـ و⌒) = ق(∠هـ م و) = °٥٠

∴ ق(∠أ) = $\frac{١}{٢}$ [ق(ب حـ ء⌒) − ق(هـ و⌒)]

= $\frac{١}{٢}$ [°١٦٠ − °٥٠] = °٥٥

(وهو المطلوب)

١٠

∵ $\frac{١}{٢}$ (ق(حـ هـ⌒) − °٤٤) = °٣٠

∴ ق(حـ هـ⌒) − °٤٤ = °٦٠

∴ ق(حـ هـ⌒) = °١٠٤ (المطلوب أولاً)

، ∵ ق(ء هـ⌒) = ٢ ق(∠ء حـ هـ)

∴ ق(ء هـ⌒) = ٢ × °٤٨ = °٩٦

، ∵ ق(ء ب⌒) + ق(ء هـ⌒) + ق(حـ هـ⌒) + ق(ب حـ⌒)

= °٣٦٠

∴ °٤٤ + °٩٦ + °١٠٤ + ق(ب حـ⌒) = °٣٦٠

∴ ق(ب حـ⌒) = °١١٦ (المطلوب ثانيًا)

١١

∵ ق(ب ء⌒) = ٢ ق(∠ب حـ ء)

∴ ق(ب ء⌒) = ٢ × °٢٦ = °٥٢

، ∵ ق(∠أ) = $\frac{١}{٢}$ [ق(حـ هـ⌒) − ق(ب ء⌒)]

∴ °٤٠ = $\frac{١}{٢}$ [ق(حـ هـ⌒) − °٥٢]

∴ ق(حـ هـ⌒) - ٥٢° = ٨٠°

∴ ق(حـ هـ⌒) = ١٣٢° (المطلوب أولاً)

، ∵ ق(∠ د س حـ) = $\frac{1}{2}$ [ق(حـ هـ⌒) + ق(ب ء⌒)]

∴ ق(∠ د س حـ) = $\frac{1}{2}$ [١٣٢° + ٥٢°] = ٩٢°

(المطلوب ثانياً)

١٢

∵ ق(∠ د و حـ) = $\frac{1}{2}$ [ق(ب حـ⌒) + ق(ء هـ⌒)]

∴ ٩٢° = $\frac{1}{2}$ [ق(ب حـ⌒) + ق(ء هـ⌒)]

∴ ق(ب حـ⌒) + ق(ء هـ⌒) = ١٨٤° (١)

، ∵ ق(∠ ١) = $\frac{1}{2}$ [ق(ب حـ⌒) - ق(ء هـ⌒)]

∴ ٢٤° = $\frac{1}{2}$ [ق(ب حـ⌒) - ق(ء هـ⌒)]

∴ ق(ب حـ⌒) - ق(ء هـ⌒) = ٦٨° (٢)

وبجمع (١) ، (٢) :

∴ ٢ ق(ب حـ⌒) = ٢٥٢° ∴ ق(ب حـ⌒) = ١٢٦°

، ∵ ق(∠ حـ ء ب) = $\frac{1}{2}$ ق(ب حـ⌒)

∴ ق(∠ حـ ء ب) = $\frac{1}{2}$ × ١٢٦° = ٦٣° (وهو المطلوب)

١٣

ق(∠ د أ حـ) = $\frac{1}{2}$ ق(أ حـ⌒) = ٤٠° (المطلوب أولاً)

، ∵ أ ب // حـ ء

∴ ق(ب ء⌒) = ق(أ حـ⌒) = ٨٠° (المطلوب ثانياً)

، ∵ ق(∠ د س حـ) = $\frac{1}{2}$ [ق(أ حـ⌒) + ق(هـ ب⌒)]

∴ ٦٠° = $\frac{1}{2}$ [٨٠° + ق(هـ ب⌒)]

∴ ق(هـ ب⌒) = ١٢٠° - ٨٠° = ٤٠° (المطلوب ثالثاً)

١٤

بفرض أن ق(ب حـ⌒) = ق(ب هـ⌒) = ق(هـ ء⌒) = س

∴ ق(حـ ء⌒) = ٣٦٠° - ٣س

، ∵ ق(∠ ١) = $\frac{1}{2}$ [ق(حـ ء⌒) - ق(ب هـ⌒)]

∴ ٤٠° = $\frac{1}{2}$ [٣٦٠° - ٣س - س]

∴ ٤٠° = $\frac{1}{2}$ [٣٦٠° - ٤س]

∴ ٤٠° = ١٨٠° - ٢س

∴ ٢س = ١٨٠° - ٤٠° = ١٤٠°

∴ س = $\frac{١٤٠}{٢}$ = ٧٠°

∴ ق(∠ حـ م ء) = ق(حـ ء⌒) = ٣٦٠° - ٣ × ٧٠°

= ١٥٠° (وهو المطلوب)

للمتفوقين

١

نفرض ق(∠ أ ب حـ) = ق(∠ أ م حـ) = س°

، ∵ ق(∠ أ ب حـ) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ أ م حـ المنعكسة)

(محيطية ومركزية مشتركتان في أ حـ⌒ الأكبر)

∴ ق(∠ أ م حـ المنعكسة) = ٢ س°

، ∵ ق(∠ أ م حـ) + ق(∠ أ م حـ المنعكسة) = ٣٦٠°

∴ س° + ٢ س° = ٣٦٠° ∴ ٣ س° = ٣٦٠°

∴ س° = $\frac{٣٦٠}{٣}$ = ١٢٠°

∴ ق(∠ ب) = ١٢٠° (وهو المطلوب)

٢

∵ أ ب = أ ء = أ حـ

∴ أ مركز الدائرة المارة بالنقط ب ، ء ، حـ

∴ ∠ ب أ ء مركزية ، ∠ ب حـ ء محيطية

∴ ق(∠ ب حـ ء) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ ب أ ء)

(محيطية ومركزية مشتركتان في ب ء⌒)

∴ ق(∠ ب حـ ء) = $\frac{1}{2}$ × ٥٠° = ٢٥° (وهو المطلوب)

إجابات تمارين ٨

١ أولاً : (جـ) ثانياً : (أ)

٢ أولاً : (ب) ثانياً : (ب) ٣ (أ)

٤ أولاً : (ب) ثانياً : (جـ)

٥ أولاً : (ب) ثانياً : (د) ٦ (أ)

٧ أولاً : (ب) ثانياً : (أ)

٨ (ب) ٩ (ب)

٢

شكل (١) : س = ٦٥° شكل (٢) : س = ٢٥°

شكل (٣) : س = ٤٠° ، ص = ٥٠° ، ع = ٩٠°

شكل (٤) : س = ٥٠° شكل (٥) : س = ٦٠°

شكل (٦) : س = ٤٠° ، ص = ٤٠° ، ع = ٣٠°

شكل (٧) : س = ٥٣° ، ص = ٥٣° ، ع = ٥٣°

شكل (٨) : ص = ١٠° شكل (٩) : س = ٧٠°

شكل (١٠) : س = ١٠° شكل (١١) : س = ١٥°

شكل (١٢) : ع = ٢٥°

٣ نظري.

٤

∵ أ ب قطر في الدائرة م ∴ ق(∠ أ ء ب) = ٩٠°

∵ في △ أ ب ء :

ق(∠ أ ب ء) = ٢٥° ، ق(∠ أ ء ب) = ٩٠°

∴ ق(∠ ء أ ب) = ١٨٠° - (٢٥° + ٩٠°) = ٦٥°

∴ ق(∠ ء هـ ب) = ق(∠ ء أ ب) = ٦٥°

(محيطيتان مشتركتان في ب ء⌒) (وهو المطلوب)

٥

∵ أ حـ قطر في الدائرة م ∴ ق(∠ أ ب حـ) = ٩٠°

∴ ق(∠ د حـ ب) = ٩٠° - ٦٠° = ٣٠° (المطلوب أولاً)

، ∵ ق(∠ أ ء ب) = ق(∠ أ حـ ب)

(محيطيتان مشتركتان في أ ب⌒)

∴ ق(∠ أ ء ب) = ٥٠°

∴ من △ أ ب ء :

ق(∠ ب أ ء) = ١٨٠° - (٥٠° + ٦٠°) = ٧٠°

(المطلوب ثانياً)

٦

∵ أ ب = أ حـ ∴ ق(أ ب⌒) = ق(أ حـ⌒)

∴ ق(∠ أ هـ ب) = ق(∠ أ هـ حـ) (وهو المطلوب)

٧

∵ ق(∠ ١) = ق(∠ حـ) (محيطيتان مشتركتان في ب ء⌒)

، ق(∠ ب) = ق(∠ حـ) (بالتبادل)

∴ ق(∠ ١) = ق(∠ ب)

∴ أ ء = ء ب (وهو المطلوب)

٨

∵ ء هـ // ب حـ ∴ ق(ء ب⌒) = ق(هـ حـ⌒)

∴ ق(∠ ء أ ب) = ق(∠ هـ أ حـ)

وبإضافة ق(∠ ب أ حـ) للطرفين

∴ ق(∠ ء أ حـ) = ق(∠ ب أ هـ) (وهو المطلوب)

٩

∵ ق(∠ ١) = ق(∠ حـ) (محيطيتان مشتركتان في ب ء⌒)

، ق(∠ ب) = ق(∠ ء) (محيطيتان مشتركتان في أ حـ⌒)

، ∵ هـ أ = هـ ء

∴ ق(∠ ١) = ق(∠ ء) ∴ ق(∠ ب) = ق(∠ حـ)

∴ هـ ب = هـ حـ (وهو المطلوب)

١٠

∵ أ ب = حـ ء ∴ ق(أ ب⌒) = ق(حـ ء⌒)

وبطرح ق(ب ء⌒) من الطرفين

∴ ق(أ ء⌒) = ق(ب حـ⌒) ∴ ق(∠ حـ) = ق(∠ ١)

∴ △ أ هـ حـ متساوي الساقين (وهو المطلوب)

١١

في △△ أ ب هـ ، أ حـ ء

∵ ق(∠ ب أ هـ) = ق(∠ حـ أ ء)

، ق(∠ أ ب هـ) = ق(∠ أ حـ ء)

(محيطيتان مشتركتان في أ ء⌒)

∴ ق(∠ أ هـ ب) = ق(∠ أ ء حـ) = ٩٠°

∴ أ حـ قطر في الدائرة. (وهو المطلوب)

١٢

∵ أب قطر في الدائرة م ∴ ق(∠أجـب) = ٩٠°

، ∵ دجـ // أب ، جـب قاطع لهما

∴ ق(∠أبجـ) + ق(∠دجـب) = ١٨٠°

(داخلتان وفي جهة واحدة من القاطع)

∴ ق(∠دجـب) = ١٨٠° − ٥٥° = ١٢٥°

∴ ق(∠أجـد) = ١٢٥° − ٩٠° = ٣٥°

∴ ق(∠أهـد) = ق(∠أجـد) = ٣٥°

(محيطيتان مشتركتان في أد) (وهو المطلوب)

١٣

∵ ق(∠بدجـ) = ق(∠بأجـ)

(محيطيتان مشتركتان في بجـ)

∴ ق(∠بدجـ) = ٣٠°

، ∵ ق(بجـ) = ٢ ق(∠بدجـ)

= ٢ × ٣٠° = ٦٠°

، أب قطر في الدائرة م ∴ ق(أب) = ١٨٠°

∴ ق(أجـ) = ١٨٠° − ٦٠° = ١٢٠°

، ∵ د منتصف أجـ

∴ ق(أد) = $\frac{١٢٠°}{٢}$ = ٦٠° (المطلوب أولاً)

، ∵ ق(∠أجـد) = $\frac{١}{٢}$ ق(أد)

∴ ق(∠أجـد) = $\frac{١}{٢}$ × ٦٠° = ٣٠°

∴ ق(∠أجـد) = ق(∠بأجـ) = ٣٠°

وهما في وضع تبادل

∴ أب // جـد (المطلوب ثانياً)

١٤

∵ أد = بهـ ∴ ق(أد) = ق(بهـ)

وبإضافة ق(دهـ) للطرفين

∴ ق(أهـ) = ق(بد) ∴ ق(∠ب) = ق(∠أ)

∴ في Δ أجـب : أجـ = بجـ

، ∵ أد = بهـ

وبالطرح : ∴ جـد = جـهـ (وهو المطلوب)

١٥

في Δ أهـجـ : ∵ جـهـ = أهـ

∴ ق(∠أجـهـ) = ق(∠جـأهـ) (١)

، ∵ ق(∠دجـب) = ق(∠دأب) (٢)

(محيطيتان مشتركتان في دب)

وبجمع (١) ، (٢) :

∴ ق(∠أجـب) = ق(∠جـأد) (وهو المطلوب)

١٦

في Δ أبد : ∵ أد = أب

∴ ق(∠أدب) = ق(∠أبد) = $\frac{١٨٠° - ٨٠°}{٢}$ = ٥٠°

∴ ق(∠أدب) = ق(∠أجـب)

وهما زاويتان مرسومتان على أب وفي جهة واحدة منها

∴ النقط أ ، ب ، جـ ، د تمر بها دائرة واحدة

(وهو المطلوب)

١٧

∵ جـد ⊥ أب

∴ ق(∠بجـد) = ٩٠°

، ∵ أب قطر

∴ ق(∠أهـب) = ٩٠°

∴ ق(∠بهـد) = ٩٠°

∴ ق(∠بجـد) = ق(∠بهـد)

وهما زاويتان مرسومتان على بد وفي جهة واحدة منها

∴ النقط د ، هـ ، جـ ، ب تمر بها دائرة واحدة

(وهو المطلوب)

١٨

[١] ∵ أد // بجـ ، بد قاطع لهما

∴ ق(∠جـبد) = ق(∠أدب) = ٣٨° (بالتبادل)

، ∵ ∠جـهـد خارجة عن Δ أهـد

∴ ق(∠دأهـ) = ٧٦° − ٣٨° = ٣٨°

∴ ق(∠دجـب) = ق(∠دأهـ)

وهما زاويتان مرسومتان على جـد وفي جهة واحدة منها

∴ النقط أ ، ب ، جـ ، د تمر بها دائرة واحدة

(وهو المطلوب)

[٢] ∵ ∠بهـأ خارجة عن Δ أهـد

∴ ق(∠هـأد) = ٨٥° − ٦٠° = ٢٥°

، ∵ أد = جـد

∴ ق(∠أجـد) = ق(∠جـأد) = ٢٥°

∴ ق(∠أبد) = ق(∠أجـد)

وهما زاويتان مرسومتان على أد وفي جهة واحدة منها

∴ النقط أ ، ب ، جـ ، د تمر بها دائرة واحدة

(وهو المطلوب)

[٣] ∵ بهـ = جـهـ

∴ ق(∠هـبجـ) = ق(∠هـجـب)

، ∵ أد // بجـ ، أجـ قاطع لهما

∴ ق(∠دأجـ) = ق(∠بجـأ) (بالتبادل)

∴ ق(∠دأجـ) = ق(∠دبجـ)

وهما زاويتان مرسومتان على دجـ وفي جهة واحدة منها

∴ النقط أ ، ب ، جـ ، د تمر بها دائرة واحدة

(وهو المطلوب)

١٩

العمل : نرسم أد

البرهان : ∵ أب = أجـ

، د منتصف بجـ

∴ أد ⊥ بجـ

، ∵ بهـ ⊥ أجـ

∴ ق(∠أدب) = ق(∠أهـب) = ٩٠°

وهما مرسومتان على أب وفي جهة واحدة منها

∴ النقط أ ، ب ، د ، هـ تمر بها دائرة واحدة (وهو المطلوب)

٢٠

العمل : نرسم أد

البرهان : ∵ أب قطر في الدائرة

∴ ق(∠أدب) = ٩٠°

، ∵ ق(∠أدجـ) = ق(∠أبجـ) = ٤٠°

(محيطيتان مشتركتان في أجـ)

∴ ق(∠جـدب) = ٩٠° + ٤٠° = ١٣٠° (وهو المطلوب)

٢١

∵ جـد ∩ هـو = {أ}

∴ ق(∠هـأجـ) = ق(∠دأو) (بالتقابل بالرأس)

، ∵ ق(∠هـبجـ) = ق(∠هـأجـ)

(محيطيتان مشتركتان في هـجـ)

، ق(∠دبو) = ق(∠دأو)

(محيطيتان مشتركتان في دو)

∴ ق(∠هـبجـ) = ق(∠دبو) (وهو المطلوب)

٢٢

ق(∠بنجـ) = ٢ ق(∠بهـو) = ٢ × ٣٥° = ٧٠°

(مركزية ومحيطية مشتركتان في وب) (المطلوب أولاً)

، ∵ بجـ مماس للدائرة ن عند ب

∴ نب ⊥ جـب

∴ في Δ نجـب : ق(∠بجـن)

= ١٨٠° − (٩٠° + ٧٠°) = ٢٠° (المطلوب ثانياً)

، ∵ ق(∠وأب) = ق(∠وهـب) = ٣٥°

(محيطيتان مشتركتان في وب)

∴ في Δ أبد : ق(∠بدأ)

= ١٨٠° − (٩٠° + ٣٥°) = ٥٥° (المطلوب ثالثاً)

٢٣

∵ ب‌ل مماس ، ب‌ل // أ‌حـ

∴ ق(⌢أب) = ق(⌢ب‌حـ) (١)

∴ ق(∠د أ ب) = ق(∠د ء ب)

∴ ء‌ب ينصف ∠ د أ حـ (المطلوب أولاً)

، ∵ أ‌ء // ب‌حـ ∴ ق(⌢أب) = ق(⌢ء‌حـ) (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ ق(⌢ب‌حـ) = ق(⌢ء‌حـ)

∴ ق(∠حـ ء ب) = ق(∠حـ ب ء)

∴ Δ ء‌ب‌حـ متساوى الساقين (المطلوب ثانياً)

٢٤

∵ Δ أ‌ب‌حـ متساوى الأضلاع

∴ ق(∠أ) = ٦٠°

∴ ق(∠ء) = ق(∠أ)

= ق(∠أ ب حـ) = ٦٠° (١)

، ∵ ء‌حـ قطر فى الدائرة م

∴ ق(∠ء ب حـ) = ٩٠° ∴ ق(∠ب حـ ء) = ٣٠°

، ∵ م‌ب = م‌حـ = نق

∴ ق(∠م ب حـ) = ق(∠م حـ ب) = ٣٠°

، من (١) : ق(∠أ ب م) = ٦٠° - ٣٠° = ٣٠°

∴ ق(∠أ ب ء) = ق(∠ء حـ م) = ٣٠°

، ق(∠أ ب ء) = ق(∠أ حـ ء)

(محيطيتان مشتركتان فى ⌢أء)

∴ ق(∠أ ب ء) = ق(∠ء حـ م) = ق(∠أ حـ ء)

(وهو المطلوب)

٢٥

∵ ق(⌢أء) = ق(⌢هـ ب) وبإضافة ق(⌢ء هـ) للطرفين

∴ ق(⌢أهـ) = ق(⌢ء ب)

∴ ق(∠هـ ب أ) = ق(∠ء أ ب)

∴ فى Δ أ حـ ب : حـ أ = حـ ب (المطلوب أولاً)

∵ أب قطر فى الدائرة م ∴ ق(⌢أهـب) = ١٨٠°

∴ ق(⌢أء) = ق(⌢ءهـ) = ق(⌢هـب) = $\frac{١٨٠°}{٣}$ = ٦٠°

∴ ق(⌢ءهـب) = ٦٠° + ٦٠° = ١٢٠° (المطلوب ثانياً)

٢٦

∵ Δ أ‌ب‌حـ متساوى الأضلاع ∴ ق(∠ب) = ٦٠°

∴ ق(∠ء) = ق(∠ب) = ٦٠°

(محيطيتان مشتركتان فى ⌢أحـ)

، ∵ أء = ءهـ

∴ Δ أ ء هـ متساوى الأضلاع (وهو المطلوب)

للمتفوقين

١

العمل : نرسم ب‌و

البرهان:

ق(∠ب حـ ء) = ق(∠ب و ء)

(محيطيتان مشتركتان فى ⌢ب ء) (١)

، ∵ ∠ ب و ء خارجة عن Δ ب هـ و

∴ ق(∠هـ) < ق(∠ب و ء) (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ ق(∠هـ) < ق(∠ب حـ ء) (وهو المطلوب)

حل آخر: ∵ ق(∠هـ) = $\frac{١}{٢}$ [ق(⌢ب ء) - ق(⌢أ و)]

، ق(∠ب حـ ء) = $\frac{١}{٢}$ ق(⌢ب ء)

∴ ق(∠هـ) < ق(∠ب حـ ء) (وهو المطلوب)

٢

∵ ق(∠ء) = ق(∠أ) (محيطيتان مشتركتان فى ⌢حـب)

∴ ص + ٢ = س + ٣ ∴ ص = س + ١

، ∵ ص² - س² = ٥٣ ∴ (س + ١)² - س² = ٥٣

∴ س² + ٢س + ١ - س² = ٥٣ ∴ ٢س + ١ = ٥٣

∴ ٢س = ٥٢ ∴ س = ٢٦°

∴ ق(∠حـ أ ب) = ٢٦° + ٣° = ٢٩°

، ∵ ق(∠حـ م ب) = ٢ ق(∠حـ أ ب)

(مركزية ومحيطية مشتركتان فى ⌢حـب)

∴ ق(∠حـ م ب) = ٥٨° (وهو المطلوب)

إجابات تمارين ٩

١

[١] ق(∠أ حـ ب) = ٣٢°

[٢] ق(∠ء أ ب) = ٣٠° ، ق(∠ب ء حـ) = ٥٠°

[٣] ق(∠أ حـ ب) = ٢٥° ، ق(∠أ ب ء) = ٦٥°

، ق(∠ء أ حـ) = ٤٤° ، ق(∠ب ء حـ) = ٤٦°

، ق(∠ب أ حـ) = ٤٦°

[٤] ق(∠ب ء حـ) = ٤٠°

٢

شكل (١) : ق(∠ب) = ٩٤°

شكل (٢) : ق(∠أ) = ١١٠°

شكل (٣) : ق(∠حـ) = ١٠٤° ، ق(∠ء أ هـ) = ٨٠°

شكل (٤) : ق(∠ء أ و) = ٦٥° ، ق(∠أ) = ٧٥°

شكل (٥) : ق(∠ب) = ١١٦°

شكل (٦) : ق(∠أ حـ ء) = ٣٢°

شكل (٧) : ق(∠ء ب حـ) = ٣٠°

شكل (٨) : ق(∠ء) = ١٢٢°

٣

شكل (١) : س = ٧٥° ، ص = ١٠٠°

شكل (٢) : س = ٣٣° ، ص = ٢٠°

شكل (٣) : س = ٥٠° ، ص = ٤٠°

شكل (٤) : س = ١٠٠° ، ص = ١١٠°

شكل (٥) : س = ٧٨° ، ص = ٣٩°

شكل (٦) : س = ٦٠° ، ص = ١٢٥°

شكل (٧) : س = ٧٠° ، ص = ٧٠° ، ع = ١٠٠°

شكل (٨) : س = ٥٥° ، ص = ٥٥°

٤

[١] (جـ)	[٢] (جـ)	[٣] (أ)	[٤] (ب)
[٥] (ب)	[٦] (ب)	[٧] (د)	[٨] (أ)
[٩] (أ)	[١٠] (ب)	[١١] (د)	[١٢] (جـ)
[١٣] (ب)	[١٤] (أ)	[١٥] (جـ)	[١٦] (د)

٥

∵ ق(⌢أب) = ١١٠°

∴ ق(∠ب ء أ) = $\frac{١}{٢}$ ق(⌢أب) = $\frac{١١٠°}{٢}$ = ٥٥°

، ∵ ∠حـ ب هـ خارجة عن الشكل الرباعى الدائرى أ ب حـ ء

∴ ق(∠حـ ب هـ) = ق(∠أ ء حـ) = ٨٥°

∴ ق(∠ب ء حـ) = ق(∠أ ء حـ) - ق(∠ب ء أ)

= ٨٥° - ٥٥° = ٣٠° (وهو المطلوب)

٦

∵ ∠أ ب هـ خارجة عن الشكل الرباعى الدائرى أ ب حـ ء

∴ ق(∠ء) = ق(∠أ ب هـ) = ١٠٠°

∴ فى Δ أ حـ ء :

ق(∠أ حـ ء) = ١٨٠° - (١٠٠° + ٤٠°) = ٤٠°

∴ ق(∠أ حـ ء) = ق(∠حـ أ ء)

∴ ق(⌢حـ ء) = ق(⌢أ ء) (وهو المطلوب)

٧

∵ ∠حـ ء هـ خارجة عن

الشكل الرباعى الدائرى أ ب حـ ء

∴ ق(∠حـ ء هـ) = ق(∠ب) = ١٢٠° (المطلوب أولاً)

، ق(∠أ ء حـ) = ١٨٠° - ١٢٠° = ٦٠°

، ∵ أء قطر فى الدائرة م ∴ ق(∠ء حـ أ) = ٩٠°

∴ ق(∠ء أ حـ) = ١٨٠° - [٩٠° + ٦٠°] = ٣٠°

(المطلوب ثانياً)

∴ في △ أ د حـ القائم الزاوية في حـ

∵ ق(∠ د أ حـ) = ٣٠° ∴ حـ د = $\frac{١}{٢}$ أ د

∴ أ د = ١٤ سم ∴ نق = ٧ سم

∴ طول $\widehat{أ د}$ = $\frac{١}{٢}$ (٢ π نق)

= $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ = ٢٢ سم (المطلوب ثالثًا)

٨

∵ أ ب حـ د رباعي دائري

∴ ق(∠ د أ حـ) = ١٨٠° − ٦٠° = ١٢٠°

، ∵ طول $\widehat{أ د}$ = طول $\widehat{حـ د}$ ∴ أ د = حـ د

∴ ق(∠ د حـ أ) = ق(∠ د أ حـ)

= $\frac{١٨٠° - ١٢٠°}{٢}$ = ٣٠° (١)

، ∵ $\overline{ب حـ}$ قطر في الدائرة م

∴ ق(∠ حـ أ ب) = ٩٠°

∴ ق(∠ أ حـ ب) = ١٨٠° − [٦٠° + ٩٠°] = ٣٠° (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\overleftarrow{حـ أ}$ ينصف ∠ د حـ ب

(وهو المطلوب)

٩

∵ ∠ هـ حـ د خارجة عن الشكل الرباعي أ ب حـ د

∴ ق(∠ أ) = ق(∠ هـ حـ د) = ٨٤° (المطلوب أولاً)

، ∵ ق(∠ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ د)

، ق(∠ ب) + ق(∠ د) = ١٨٠°

∴ ق(∠ ب) + ٢ ق(∠ ب) = ١٨٠°

∴ ق(∠ ب) = ٦٠° (المطلوب ثانيًا)

١٠

∵ ∠ د حـ هـ خارجة عن الشكل الرباعي الدائري أ ب حـ د

∴ ق(∠ د حـ هـ) = ق(∠ أ) = ١٣٠°

في △ أ ب د : ∵ أ ب = أ د

∴ ق(∠ أ د ب) = ق(∠ أ ب د) = $\frac{١٨٠° - ١٣٠°}{٢}$ = ٢٥°

، ∵ ق(∠ أ ب د) = ق(∠ د ب حـ) = ٢٥°

∴ ق($\widehat{أ د}$) = ق($\widehat{د حـ}$)

∴ أ د = د حـ (وهو المطلوب)

١١



العمل : نرسم $\overline{ب د}$

البرهان : ∵ أ ب حـ د رباعي دائري

∴ ق(∠ أ) = ١٨٠° − ١٤٠° = ٤٠°

، ∵ حـ ب = حـ د

∴ ق(∠ حـ ب د) = ق(∠ حـ د ب)

= $\frac{١٨٠° - ١٤٠°}{٢}$ = ٢٠°

، ∵ $\overline{أ ب}$ قطر في الدائرة م

∴ ق(∠ أ د ب) = ٩٠°

∴ ق(∠ أ د حـ) = ٩٠° + ٢٠° = ١١٠°

(وهو المطلوب)

١٢

شكل (١) :

∵ $\overline{أ ب}$ قطر في الدائرة م ∴ ق($\widehat{أ ب}$) = ١٨٠°

∴ ق($\widehat{حـ ب}$) = ١٨٠° − (٨٠° + ٦٠°) = ٤٠°

∴ ق(∠ أ) = $\frac{١}{٢}$ ق($\widehat{د ب}$) = $\frac{١}{٢}$ × ١٠٠° = ٥٠°

، ق(∠ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق($\widehat{أ حـ}$) = $\frac{١}{٢}$ × ١٤٠° = ٧٠°

، ∵ أ ب حـ د شكل رباعي دائري

∴ ق(∠ حـ) = ١٨٠° − ق(∠ أ)

= ١٨٠° − ٥٠° = ١٣٠°

، ق(∠ د) = ١٨٠° − ق(∠ ب)

= ١٨٠° − ٧٠° = ١١٠° (وهو المطلوب)

شكل (٢) :

∵ أ ب حـ د شكل رباعي دائري

∴ ق(∠ حـ) = ١٨٠° − ق(∠ أ) = ١٨٠° − ٩٥° = ٨٥°

، ∵ $\overline{أ د}$ // $\overline{ب هـ}$ ، $\overleftrightarrow{أ ب}$ قاطع لهما

∴ ق(∠ أ) + ق(∠ أ ب هـ) = ١٨٠°

(داخلتان وفي جهة واحدة من القاطع)

∴ ق(∠ أ ب هـ) = ١٨٠° − ٩٥° = ٨٥°

، ق(∠ حـ ب هـ) = ق(∠ حـ د هـ) = ٢٨°

(محيطيتان مشتركتان في $\widehat{حـ هـ}$)

∴ ق(∠ أ ب حـ) = ق(∠ أ ب هـ) + ق(∠ حـ ب هـ)

= ٨٥° + ٢٨° = ١١٣°

∴ ق(∠ أ د حـ) = ١٨٠° − ق(∠ أ ب حـ)

= ١٨٠° − ١١٣° = ٦٧° (وهو المطلوب)

١٣

∵ ق(∠ أ) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ ب م د) = س

(محيطية ومركزية مشتركتان في $\widehat{ب د}$)

، ∵ الشكل أ ب حـ د رباعي دائري.

∴ ق(∠ أ) + ق(∠ حـ) = ١٨٠°

∴ س + ٢ س = ١٨٠°

∴ ٣ س = ١٨٠°

∴ س = $\frac{١٨٠°}{٣}$ = ٦٠°

∴ ق(∠ أ) = ٦٠° (وهو المطلوب)

١٤

في △ أ حـ هـ

∵ أ حـ = أ هـ

∴ ق(∠ حـ) = ق(∠ هـ) (١)

، ∵ ∠ أ ب د خارجة عن الشكل الرباعي الدائري هـ حـ ب د

∴ ق(∠ أ ب د) = ق(∠ هـ) (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ ق(∠ أ ب د) = ق(∠ حـ) (وهما في وضع تناظر)

∴ $\overline{د ب}$ // $\overline{حـ هـ}$ (المطلوب أولاً)

∴ ق($\widehat{ب حـ}$) = ق($\widehat{هـ د}$) (المطلوب ثانيًا)

١٥

∵ ∠ هـ حـ س خارجة عن الشكل الرباعي الدائري أ هـ حـ ب

∴ ق(∠ هـ حـ س) = ق(∠ هـ أ ب) (١)

، ∵ ق(∠ د أ هـ) = ق(∠ د حـ هـ) (٢)

(محيطيتان مشتركتان في $\widehat{د هـ}$)

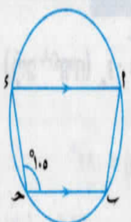
، ق(∠ د أ هـ) = ق(∠ هـ أ ب) (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) :

∴ ق(∠ د حـ هـ) = ق(∠ هـ حـ س)

∴ $\overleftarrow{حـ هـ}$ ينصف ∠ س حـ د (وهو المطلوب)

١٦



∵ الشكل أ ب حـ د رباعي دائري

∴ ق(∠ أ) + ق(∠ حـ) = ١٨٠°

∴ ق(∠ أ) = ١٨٠° − ١٠٥°

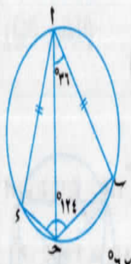
= ٧٥° (المطلوب أولاً)

، ∵ $\overline{أ د}$ // $\overline{ب حـ}$ ، $\overleftrightarrow{أ ب}$ قاطع لهما

∴ ق(∠ ب) + ق(∠ أ) = ١٨٠°

∴ ق(∠ ب) = ١٨٠° − ٧٥° = ١٠٥° (المطلوب ثانيًا)

١٧



∵ أ ب = أ د

∴ ق($\widehat{أ ب}$) = ق($\widehat{أ د}$)

∴ ق(∠ أ حـ د)

= ق(∠ أ حـ ب) = $\frac{١٢٤°}{٢}$ = ٦٢°

(المطلوب أولاً)

، ∵ الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري

∴ ق(∠ب أ ء) = ١٨٠° − ١٢٤° = ٥٦°

∴ ق(∠حـ أ ء) = ٥٦° − ٣٦° = ٢٠°

∴ في △ أ حـ ء يكون :

ق(∠أ ء حـ) = ١٨٠° − (٦٢° + ٢٠°) = ٩٨°

(المطلوب ثانيًا)

١٨

∵ ∠ب حـ هـ خارجة عن الشكل الرباعي الدائري أ ب حـ ء

∴ ق(∠أ) = ق(∠ب حـ هـ) = ٦٠°

، ∵ ق(∠م) = ٢ ق(∠أ)

(مركزية ومحيطية مشتركتان في ⌢ب ء)

∴ ق(∠م) = ٢ × ٦٠° = ١٢٠°

، ∵ م ء // ب حـ

∴ ق(∠ء م حـ) = ق(∠ب حـ هـ) = ٦٠° (بالتناظر)

∴ ق(∠ء م ب) + ق(∠م ء حـ) = ١٨٠°

(وهما داخلتان وفي جهة واحدة من القاطع)

∴ م ب // ء حـ

، ∵ م ء // ب حـ ∴ م ء حـ ب متوازي أضلاع

، ∵ م ء = م ب = نق

∴ م ء حـ ب معين (المطلوب أولاً)

∴ حـ ء = حـ ب ∴ ق(⌢حـ ء) = ق(⌢حـ ب)

، ∵ أ منتصف ⌢ب ء الأكبر ∴ ق(⌢أ ء) = ق(⌢أ ب)

∴ ق(⌢حـ ء) + ق(⌢أ ء) = ق(⌢حـ ب) + ق(⌢أ ب)

∴ أ حـ قطر في الدائرة (المطلوب ثانيًا)

١٩

∵ أ ب حـ ء رباعي دائري

∴ ق(∠أ ب حـ)

= ١٨٠° − ١١٨° = ٦٢°

(المطلوب أولاً)

، ∵ أ هـ // ء حـ ، أ حـ قاطع لهما

∴ ق(∠أ حـ ء) = ق(∠هـ أ حـ) (بالتبادل)

، ∵ ق(∠حـ ب هـ) = ق(∠هـ أ حـ)

(محيطيتان مشتركتان في ⌢حـ هـ)

∴ ق(∠أ حـ ء) = ق(∠حـ ب هـ) (المطلوب ثانيًا)

٢٠

∵ ∠ص ع ن خارجة عن الشكل الرباعي الدائري ص ع ل س

∴ ق(∠ص س ل) = ٨٠°

، ∵ ق(∠ص س ع) = ق(∠ص ل ع) = ٢٠°

(محيطيتان مشتركتان في ⌢ص ع)

∴ ق(∠ع س ل) = ٨٠° − ٢٠° = ٦٠° (المطلوب أولاً)

∴ ق(⌢ع ل) = ٢ ق(∠ع س ل) = ١٢٠°

، ق(⌢ع ص) = ٢ ق(∠ص ل ع) = ٤٠°

، ∵ ق(⌢س ص) = ق(⌢س ل)

∴ ق(⌢س ص) = (٣٦٠° − ٤٠° − ١٢٠°) ÷ ٢ = ١٠٠°

∴ ق(⌢س ص ع) = ق(⌢س ص) + ق(⌢ص ع)

= ١٠٠° + ٤٠° = ١٤٠°

(المطلوب ثانيًا)

٢١

∵ أ ب حـ ء متوازي أضلاع

∴ ق(∠أ) = ق(∠حـ) (١)

، ∵ ء هـ ب حـ شكل رباعي دائري.

، ∠ء هـ أ خارجة عنه

∴ ق(∠ء هـ أ) = ق(∠حـ) (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ ق(∠أ) = ق(∠ء هـ أ)

∴ في △ أ ء هـ : أ ء = هـ ء (وهو المطلوب)

٢٢

العمل : نرسم أ ب

البرهان :

∵ الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري

∴ ق(∠ب أ ء) = ١٨٠° − ٧٠° = ١١٠°

، ∵ الشكل أ ب و هـ رباعي دائري

، ∠ب أ ء خارجة عنه

∴ ق(∠و) = ق(∠ب أ ء) = ١١٠° (المطلوب أولاً)

∴ ق(∠و) + ق(∠حـ) = ١١٠° + ٧٠° = ١٨٠°

وهما داخلتان وفي جهة واحدة من القاطع و حـ

∴ حـ ء // هـ و (المطلوب ثانيًا)

٢٣

∵ أ ب و هـ شكل رباعي دائري

∴ ق(∠هـ) + ق(∠أ ب و) = ١٨٠° (١)

، ∵ ∠أ ب و خارجة عن الشكل الرباعي الدائري أ ب حـ ء

∴ ق(∠أ ب و) = ق(∠ء) (٢)

وبالتعويض من (٢) في (١) :

∴ ق(∠هـ) + ق(∠ء) = ١٨٠°

∴ ٤ س° + ٥ س° = ١٨٠°

∴ ٩ س° = ١٨٠°

∴ س° = ٢٠°

∴ ق(∠ء) = ٥ × ٢٠° = ١٠٠°

∴ ق(∠أ ب و) = ق(∠ء) = ١٠٠° (وهو المطلوب)

٢٤

∵ حـ ب // ء هـ

∴ ق(∠١) = ق(∠٢) بالتبادل

ولكن ق(∠٣) = ق(∠٢)

(محيطيتان مشتركتان في ⌢ب هـ)

∴ ق(∠١) = ق(∠٣)

أي : ق(∠ء ب حـ) = ق(∠ب أ هـ) (المطلوب أولاً)

، ∵ الشكل حـ ء هـ ب رباعي دائري

∴ ق(∠ء هـ ب) = ١٨٠° − ١٣٠° = ٥٠°

، ∵ أ ب قطر

∴ ق(∠أ هـ ب) = ٩٠°

∴ ق(∠أ هـ ء) = ٩٠° − ٥٠° = ٤٠° (المطلوب ثانيًا)

للمتفوقين

١

∵ أ ب حـ ء رباعي دائري

∴ ق(∠أ) + ق(∠حـ) = ١٨٠°

∴ س + ٣ ص = ١٨٠°

∴ س = ١٨٠° − ٣ ص (١)

، ق(∠ب) + ق(∠ء) = ١٨٠°

∴ ٢ س + ص = ١٨٠° (٢)

بالتعويض من (١) في (٢) :

∴ ٢ (١٨٠° − ٣ ص) + ص = ١٨٠°

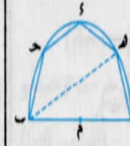
∴ ٣٦٠° − ٦ ص + ص = ١٨٠°

∴ −٥ ص = −١٨٠°

∴ ص = ٣٦°

∴ س = ١٨٠° - ٣ × ٣٦° = ٧٢° (وهو المطلوب)

٢



العمل :

نرسم ب هـ

البرهان : ∵ أ ب قطر فى الدائرة

∴ ق(∠ أ هـ ب) = ٩٠°

∵ الشكل هـ ب حـ د رباعى دائرى

∴ ق(∠ د هـ ب) + ق(∠ د حـ ب) = ١٨٠°

∴ ق(∠ أ هـ ب) + ق(∠ د هـ ب) + ق(∠ د حـ ب)

= ٩٠° + ١٨٠°

∴ ق(∠ أ هـ د) + ق(∠ ب حـ د) = ٢٧٠° (وهو المطلوب)

إجابات تمارين ١٠

١

(١) ∵ ∠ ب هـ أ خارجة عن Δ أ هـ د

∴ ق(∠ هـ أ د) = ٩٠° - ٤٠° = ٥٠°

∴ ق(∠ حـ ب د) = ق(∠ حـ أ د)

وهما زاويتان مرسومتان على حـ د وفى جهة واحدة منها

∴ الشكل أ ب حـ د رباعى دائرى (وهو المطلوب)

(٢) فى Δ ب د حـ :

∵ ق(∠ ب د حـ) = ١٨٠° - [٥٠° + ٤٠°] = ٩٠°

∴ ق(∠ ب أ حـ) = ق(∠ ب د حـ)

وهما زاويتان مرسومتان على ب حـ وفى جهة واحدة منها

∴ الشكل أ ب حـ د رباعى دائرى (وهو المطلوب)

(٣) ∵ أ د // ب حـ ، ب د قاطع لهما

∴ ق(∠ أ د ب) = ق(∠ د ب حـ) = ٤١° (بالتبادل)

∴ ق(∠ أ حـ ب) = ١٨٠° - [٩٩° + ٤١°] = ٤٠°

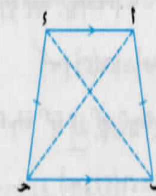
∴ ق(∠ أ حـ ب) ≠ ق(∠ أ د ب)

وهما زاويتان مرسومتان على أ ب وفى جهة واحدة منها

∴ الشكل أ ب حـ د ليس رباعيًا دائريًا (وهو المطلوب)

(٤) لا يمكن رسم دائرة تمر برؤوس الشكل أ ب حـ د

(٥)



∵ Δ أ ب حـ ≡ Δ د حـ ب (ثلاثة أضلاع)

∴ ق(∠ ب أ حـ) = ق(∠ ب د حـ)

وهما زاويتان مرسومتان على ب حـ وفى جهة واحدة منها

∴ الشكل أ ب حـ د رباعى دائرى (وهو المطلوب)

(٦) فى Δ أ ب حـ :

∵ ق(∠ ب أ حـ) = ١٨٠° - [١١٠° + ٣٤°] = ٣٦°

∴ ق(∠ ب أ حـ) = ق(∠ ب د حـ)

وهما زاويتان مرسومتان على ب حـ وفى جهة واحدة منها

∴ الشكل أ ب حـ د رباعى دائرى (وهو المطلوب)

٢

(١) فى Δ أ ب حـ : ∵ ق(∠ ب) = ١٨٠° - (٥٠° + ٣٥°)

= ٩٥°

∴ ق(∠ ب) + ق(∠ د) = ٩٥° + ٨٥° = ١٨٠°

∴ الشكل أ ب حـ د رباعى دائرى (وهو المطلوب)

(٢) ∵ ق(∠ د هـ أ) = ٨٦°

∴ ق(∠ د أ ب) = ١٨٠° - ٨٦° = ٩٤°

، ∵ ∠ د حـ و خارجة عن الشكل أ ب حـ د

، ق(∠ د حـ و) = ق(∠ د أ ب) = ٩٤°

∴ الشكل أ ب حـ د رباعى دائرى (وهو المطلوب)

(٣) ∵ أ ب = أ د

∴ ق(∠ أ د ب) = ق(∠ أ ب د) = ٣٠°

∴ ق(∠ أ) = ١٨٠° - (٣٠° + ٣٠°) = ١٢٠°

، ∵ ∠ د حـ هـ خارجة عن الشكل أ ب حـ د

، ق(∠ أ) = ق(∠ د حـ هـ) = ١٢٠°

∴ الشكل أ ب حـ د رباعى دائرى (وهو المطلوب)

(٤) ∵ أ د // ب حـ ، أ ب قاطع لهما

∴ ق(∠ ب) + ق(∠ أ) = ١٨٠°

(داخلتان وفى جهة واحدة من القاطع)

∴ ق(∠ أ) = ١٨٠° - ٧٤° = ١٠٦°

، ∵ ق(∠ د حـ و) = ق(∠ و حـ هـ) = ٥٣°

∴ ق(∠ د حـ هـ) = ٢ × ٥٣° = ١٠٦°

، ∵ ∠ د حـ هـ خارجة عن الشكل أ ب حـ د

، ق(∠ د حـ هـ) = ق(∠ أ) = ١٠٦°

∴ الشكل أ ب حـ د رباعى دائرى. (وهو المطلوب)

(٥) ∵ أ ب // د هـ ، أ د // ب هـ

∴ الشكل أ ب هـ د متوازى أضلاع

∴ ق(∠ أ) = ق(∠ هـ)

∵ ب حـ = ب هـ

∴ ق(∠ ب حـ هـ) = ق(∠ هـ)

∴ ق(∠ أ) = ق(∠ ب حـ هـ)

، ∵ ∠ ب حـ هـ خارجة عن الشكل أ ب حـ د

∴ الشكل أ ب حـ د رباعى دائرى (وهو المطلوب)

(٦) فى Δ أ ب د : ∵ أ ب = أ د

∴ ق(∠ أ ب د) = ق(∠ أ د ب) = س

∴ ق(∠ أ) = ١٨٠° - ٢ س°

، فى Δ ب د حـ : ∵ د ب = د حـ

∴ ق(∠ حـ) = ق(∠ د ب حـ) = ٢ س°

∴ ق(∠ أ) + ق(∠ حـ) = ١٨٠° - ٢ س° + ٢ س°

= ١٨٠°

∴ الشكل أ ب حـ د رباعى دائرى. (وهو المطلوب)

٣ نظرى.

٤

∵ ب حـ قطر فى الدائرة م ∴ ق(∠ ب أ حـ) = ٩٠°

، ∵ هـ د ⊥ ب حـ

∴ ق(∠ ب أ حـ) + ق(∠ هـ د ب) = ٩٠° + ٩٠° = ١٨٠°

∴ الشكل أ ب د هـ رباعى دائرى. (المطلوب أولاً)

∴ ق(∠ حـ هـ د) = ق(∠ ب) = ½ ق(⌒أ حـ)

(المطلوب ثانيًا)

٥

∵ أ ب تمس الدائرة م عند ب ∴ م ب ⊥ أ ب

، ∵ أ حـ تمس الدائرة م عند حـ

∴ م حـ ⊥ أ حـ

∴ ق(∠ أ ب م) + ق(∠ أ حـ م) = ١٨٠°

∴ الشكل أ ب م حـ رباعى دائرى. (المطلوب أولاً)

∴ ق(∠ حـ م د) = ق(∠ أ) = ٤٥°

، ∵ ق(∠ م حـ د) = ٩٠°

∴ فى Δ م حـ د : ق(∠ د) = ١٨٠° - (٩٠° + ٤٥°) = ٤٥°

∴ ق(∠ حـ م د) = ق(∠ د)

∴ Δ م حـ د متساوى الساقين. (المطلوب ثانيًا)

٦

∵ أ ب قطر فى الدائرة م ، أ حـ مماس للدائرة عند أ

∴ أ حـ ⊥ أ ب ∴ ق(∠ حـ أ م) = ٩٠°

، ∵ هـ منتصف د ب ∴ م هـ ⊥ د ب

∴ ق(∠ م هـ حـ) = ٩٠°

∴ ق(∠ حـ ء م) + ق(∠ م هـ حـ) = ٩٠° + ٩٠° = ١٨٠°

∴ الشكل ء م هـ حـ رباعي دائري. (المطلوب أولاً)

في △ أ ب حـ: ق(∠ حـ) = ١٨٠° − (٤٠° + ٩٠°)

= ٥٠° (المطلوب ثانيًا)

٧

∵ ء هـ ⊥ أء ∴ ق(∠ أ ء هـ) = ٩٠° (١)

، ∵ أب قطر في الدائرة م

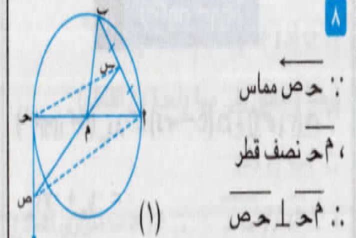
∴ ق(∠ أ حـ ب) = ٩٠° (٢)

من (١)، (٢): ∴ ق(∠ أ ء هـ) = ق(∠ أ حـ هـ)

وهما زاويتان مرسومتان على أهـ وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل أ حـ ء هـ رباعي دائري. (وهو المطلوب)

٨



∵ حـ ص مماس

، م حـ نصف قطر

∴ م حـ ⊥ حـ ص (١)

، ∵ س منتصف أب

∴ م س ⊥ أب (٢)

من (١)، (٢):

∴ ق(∠ أ س ص) = ق(∠ أ حـ ص) = ٩٠°

وهما مرسومتان على أص وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل أ س حـ ص رباعي دائري (المطلوب أولاً)

∴ ق(∠ س أ حـ) = ق(∠ س ص حـ)

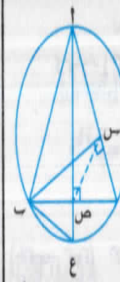
(مرسومتان على س حـ وفي جهة واحدة منها)

، ∵ ق(∠ ب م حـ) = ٢ ق(∠ س أ حـ)

(مركزية ومحيطية مشتركتان في ب حـ⌢)

∴ ق(∠ ب م حـ) = ٢ ق(∠ م ص حـ) (المطلوب ثانيًا)

٩



∵ ق(∠ أ س ب) = ق(∠ أ ص ب)

= ٩٠°

وهما مرسومتان على أب

وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل أ ب ص س رباعي دائري (المطلوب أولاً)

∴ ق(∠ س أ ص) = ق(∠ س ب ص)

(مرسومتان على س ص وفي جهة واحدة منها)

، ∵ ق(∠ حـ أ ع) = ق(∠ حـ ب ع)

(محيطيتان مشتركتان في حـ ع⌢)

∴ ق(∠ س ب حـ) = ق(∠ حـ ب ع)

∴ ب حـ ينصف ∠ س ب ع (المطلوب ثانيًا)

١٠

∵ ق(∠ ب أ حـ) = ق(∠ ب ء حـ)

(محيطيتان مشتركتان في ب حـ⌢)

∴ ½ ق(∠ ب أ حـ) = ½ ق(∠ ب ء حـ)

∴ ق(∠ هـ أ و) = ق(∠ هـ ء و)

وهما مرسومتان على هـ و وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل أ هـ و ء رباعي دائري (المطلوب أولاً)

∴ ق(∠ ء هـ و) = ق(∠ ء أ حـ)

(مرسومتان على ء و وفي جهة واحدة منها)

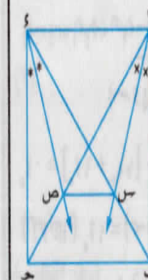
، ∵ ق(∠ ء ب حـ) = ق(∠ ء أ حـ)

(محيطيتان مشتركتان في ء حـ⌢)

∴ ق(∠ ء هـ و) = ق(∠ ء ب حـ) وهما في وضع تناظر

∴ هـ و // ب حـ (المطلوب ثانيًا)

١١



∵ أ ب حـ ء مربع

، أحـ ، ب ء قطرا المربع

∴ ق(∠ ب أ حـ)

= ق(∠ ب ء حـ)

=

∴ ½ ق(∠ ب أ حـ) = ½ ق(∠ ب ء حـ)

∴ ق(∠ س أ ص) = ق(∠ س ء ص)

وهما مرسومتان على س ص وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل أ س ص ء رباعي دائري (المطلوب أولاً)

∴ ق(∠ أ ص س) = ق(∠ أ ء س) = ٤٥°

(مرسومتان على أس وفي جهة واحدة منها)

(المطلوب ثانيًا)

١٢

∵ ء منتصف الوتر هـ حـ ∴ م ء ⊥ هـ حـ

∴ ق(∠ م ء حـ) = ٩٠°

، ∵ ب حـ مماس للدائرة عند حـ

∴ م حـ ⊥ ب حـ ∴ ق(∠ م حـ ب) = ٩٠°

، ∵ أب // م حـ ، ب حـ قاطع لهما

∴ ق(∠ م حـ ب) + ق(∠ أ ب حـ) = ١٨٠°

(داخلتان وفي جهة واحدة من القاطع)

∴ ق(∠ أ ب حـ) = ١٨٠° − ٩٠° = ٩٠°

∴ ق(∠ أ ء حـ) + ق(∠ أ ب حـ) = ٩٠° + ٩٠° = ١٨٠°

∴ الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري (وهو المطلوب)

١٣

∵ أب يمس الدائرة الصغرى عند ء

∴ م ء ⊥ أب

، ∵ أحـ يمس الدائرة الصغرى عند و

∴ م و ⊥ أحـ

∴ ق(∠ أ ء م) + ق(∠ أ و م) = ٩٠° + ٩٠° = ١٨٠°

∴ الشكل أ ء م و رباعي دائري. (المطلوب أولاً)

∴ ق(∠ أ) + ق(∠ ء م و) = ١٨٠° (١)

، ∵ ق(∠ أ) = ½ ق(ب حـ⌢) (٢)

، ق(∠ ء م و) = ق(ء و⌢) (٣)

من (١)، (٢)، (٣):

∴ ق(ء و⌢) + ½ ق(ب حـ⌢) = ١٨٠° (المطلوب ثانيًا)

١٤

في △ أ ب حـ: ∵ أب = أحـ

∴ ق(∠ أ ب حـ) = ق(∠ أ حـ ب)

∴ ½ ق(∠ أ ب حـ) = ½ ق(∠ أ حـ ب)

∴ ق(∠ ص ب س) = ق(∠ ص حـ س)

وهما مرسومتان على ص س وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل ب حـ س ص رباعي دائري (المطلوب أولاً)

∴ ق(∠ ب س ص) = ق(∠ ب حـ ص)

(مرسومتان على ب ص وفي جهة واحدة منها)

، ∵ ق(∠ حـ ب س) = ق(∠ ب حـ ص)

∴ ق(∠ حـ ب س) = ق(∠ ب س ص)

وهما في وضع تبادل

∴ س ص // ب حـ (المطلوب ثانيًا)

١٥

∵ أب // ء هـ ، أء قاطع لهما.

∴ ق(∠ أ) = ق(∠ أ ء هـ) (بالتبادل)

، ∵ ب حـ // ء و ، حـ ء قاطع لهما.

∴ ق(∠ حـ) = ق(∠ حـ ء و) (بالتبادل)

، ∵ ق(∠ أ ء هـ) + ق(∠ حـ ء و) = ١٨٠°

∴ ق(∠ أ) + ق(∠ حـ) = ١٨٠°

∴ الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري. (وهو المطلوب)

١٦

∵ س منتصف أب ∴ م س ⊥ أب (١)

، ∵ م ن خط المركزين ، هـ ء الوتر المشترك

∴ م ن ⊥ هـ ء (٢)

من (١) ، (٢) :

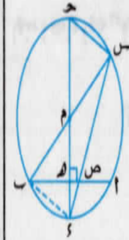
∴ ق(∠م س حـ) + ق(∠م ص حـ) = ١٨٠°

∴ الشكل حـ س م ص رباعي دائري (المطلوب أولًا)

، ∵ ق(∠م س حـ) = ٩٠°

∴ مركز الدائرة المارة برؤوس الشكل حـ س م ص هو منتصف $\overline{\text{م حـ}}$ (المطلوب ثانيًا)

١٧



∵ $\overline{\text{حـ ء}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

∴ ق(∠أ هـ حـ) = ٩٠°

، ∵ $\overline{\text{حـ ء}}$ قطر في الدائرة

∴ ق(∠ء س حـ) = ٩٠°

∴ ق(∠ص س حـ) + ق(∠ص هـ حـ)

= ٩٠° + ٩٠° = ١٨٠°

∴ الشكل س ص هـ حـ رباعي دائري (المطلوب أولًا)

∴ ق(∠ء ص ب) = ق(∠هـ حـ س)

، ∵ ق(∠ء ب س) = ق(∠ء حـ س)

(محيطيتان مشتركتان في $\overset{\frown}{\text{ء س}}$)

∴ ق(∠ء ص ب) = ق(∠ء ب س) (المطلوب ثانيًا)

١٨

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{ء حـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ قاطع لهما.

∴ ق(∠أ) + ق(∠ء) = ١٨٠° (١)

ولكن ∠حـ و هـ خارجة عن الشكل

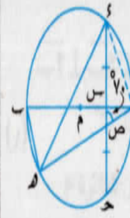
الرباعي الدائري أ ب و هـ

∴ ق(∠حـ و هـ) = ق(∠أ) (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ ق(∠حـ و هـ) + ق(∠ء) = ١٨٠°

∴ الشكل حـ ء هـ و رباعي دائري. (وهو المطلوب)

١٩



∵ $\overline{\text{أ ب}}$ قطر في الدائرة م

∴ ق(∠أ هـ ب) = ٩٠°

، ∵ س منتصف $\overline{\text{ء حـ}}$

∴ $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{ء حـ}}$

∴ ق(∠ص س ب) + ق(∠ص هـ ب)

= ٩٠° + ٩٠° = ١٨٠°

∴ الشكل س ص هـ ب رباعي دائري (المطلوب أولًا)

∴ ق(∠ب) = ق(∠أ ص ء) = ٧٠°

، ∵ ق(∠أ ء هـ) = ق(∠ب)

(محيطيتان مشتركتان في $\overset{\frown}{\text{أ هـ}}$)

∴ ق(∠أ ء هـ) = ٧٠° (المطلوب ثانيًا)

٢٠

∵ س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

، ∵ ص منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$ ∴ $\overline{\text{م ص}} \perp \overline{\text{أ حـ}}$

∴ ق(∠أ س م) = ق(∠أ ص م) = ٩٠°

وهما مرسومتان على $\overline{\text{أ م}}$ وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل أ س ص م رباعي دائري (المطلوب أولًا)

∴ ق(∠م س ص) = ق(∠م أ ص)

وهما مرسومتان على $\overline{\text{م ص}}$ وفي جهة واحدة منها (١)

وفي △ أ م حـ : ∵ أ م = حـ م (طولا نصفي قطرين)

∴ ق(∠م حـ أ) = ق(∠م أ حـ) (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ ق(∠م س ص) = ق(∠م حـ ص) (المطلوب ثانيًا)

، ∵ ق(∠أ ص م) = ٩٠°

∴ $\overline{\text{أ م}}$ قطر في الدائرة المارة بالنقط أ ، س ، ص ، م

(المطلوب ثالثًا)

٢١

∵ ق(∠ء أ ب) = ق(∠ء حـ ب)

(محيطيتان مشتركتان في $\overset{\frown}{\text{ء ب}}$)

، ق(∠ء أ ب) = ق(∠هـ م ب) (معطى).

∴ ق(∠هـ حـ ب) = ق(∠هـ م ب)

وهما مرسومتان على $\overline{\text{هـ ب}}$ وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل م حـ ب هـ رباعي دائري (المطلوب أولًا)

∴ ق(∠حـ هـ ب) = ق(∠حـ م ب)

(مرسومتان على $\overline{\text{ب حـ}}$ وفي جهة واحدة منها)

، ∵ ق(∠حـ م ب) = ٢ ق(∠حـ ء ب)

(مركزية ومحيطية مشتركتان في $\overset{\frown}{\text{حـ ب}}$)

∴ ق(∠حـ هـ ب) = ٢ ق(∠حـ ء ب) (المطلوب ثانيًا)

٢٢

∵ ق($\overset{\frown}{\text{أ س}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{أ ص}}$)

∴ ق(∠أ حـ س)

= ق(∠أ ب ص)

وهما مرسومتان على $\overline{\text{ء هـ}}$ وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل ب حـ هـ ء رباعي دائري (المطلوب أولًا)

∴ ق(∠ء هـ ب) = ق(∠ء حـ ب)

وهما مرسومتان على $\overline{\text{ء ب}}$ وفي جهة واحدة منها

∵ ق(∠س أ ب) = ق(∠س حـ ب)

(محيطيتان مشتركتان في $\overset{\frown}{\text{س ب}}$)

∴ ق(∠ء هـ ب) = ق(∠س أ ب) (المطلوب ثانيًا)

٢٣

∵ الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري.

∴ ق(∠أ) + ق(∠حـ) = ١٨٠°

، ∵ $\overline{\text{و هـ}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

، $\overleftrightarrow{\text{ء حـ}}$ قاطع لهما.

∴ ق(∠و هـ ء) = ق(∠حـ) (بالتناظر)

∴ ق(∠أ) + ق(∠و هـ ء) = ١٨٠°

∴ الشكل أ و هـ ء رباعي دائري. (المطلوب أولًا)

∴ ق(∠هـ أ ء) = ق(∠هـ و ء)

مرسومتان على $\overline{\text{هـ ء}}$ وفي جهة واحدة منها

، ∵ $\overline{\text{س حـ}}$ // $\overline{\text{و هـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{س و}}$ قاطع لهما.

∴ ق(∠ب س و) = ق(∠هـ و ء) (بالتناظر)

∴ ق(∠ب س و) = ق(∠هـ أ ء) (المطلوب ثانيًا)

٢٤

العمل : نرسم $\overline{\text{ب س}}$

البرهان : ∵ $\overline{\text{أ ب}}$ قطر في الدائرة

∴ ق(∠أ س ب) = ٩٠°

∴ ق(∠هـ س ب) = ٩٠°

، ∵ $\overline{\text{ء هـ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

∴ ق(∠هـ ء ب) = ق(∠هـ س ب) = ٩٠°

وهما مرسومتان على $\overline{\text{ب هـ}}$ وفي جهة واحدة منها.

∴ الشكل هـ ب ء س رباعي دائري (المطلوب أولًا)

، ∵ ∠أ س ص خارجة عنه

∴ ق(∠أ س ص) = ق(∠أ ب هـ)

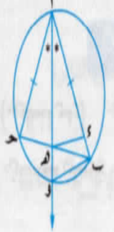
، ∵ ق(∠أ س ص) = ق(∠أ ب ص)

(محيطيتان مشتركتان في $\overset{\frown}{\text{أ ص}}$)

∴ ق(∠أ ب هـ) = ق(∠أ ب ص)

∴ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ ينصف ∠هـ ب ص (المطلوب ثانيًا)

٢٥



△△ أ ء هـ ، أ حـ هـ فيهما :

أ ء = أ حـ

$\overline{\text{أ هـ}}$ ضلع مشترك

ق(∠ء أ هـ) = ق(∠حـ أ هـ)

∴ Δ أ ء هـ ≡ Δ أ حـ هـ

وينتج أن : ق(∠ أ ء هـ) = ق(∠ أ حـ هـ)

، ∵ ق(∠ أ ء ب) = ق(∠ أ حـ ب)

(محيطيتان مشتركتان فى $\overset{\frown}{أب}$)

∴ ق(∠ أ ء هـ) الخارجة = ق(∠ ب و هـ)

∴ الشكل ب ء هـ و رباعى دائرى (وهو المطلوب)

٢٦

∵ ب هـ ⊥ أ حـ ، حـ و ⊥ أ ب

، ∵ ب هـ ∩ حـ و = {م}

∴ م نقطة تلاقى أعمدة Δ أ ب حـ

، ∵ أ ء تمر بالنقطة م

∴ أ ء ⊥ ب حـ

∴ ق(∠ م ء حـ) + ق(∠ م هـ حـ) = ١٨٠°

∴ الشكل م ء حـ هـ رباعى دائرى. (وهو المطلوب)

٢٧

∵ أ ب حـ ء متوازى أضلاع ∴ أ ء = ب حـ

، ∵ ب هـ = أ ء ∴ ب حـ = ب هـ

فى Δ ب حـ هـ :

∴ ق(∠ حـ) = ق(∠ ب هـ حـ)

، ∵ ق(∠ ب أ ء) = ق(∠ حـ)

∴ ق(∠ ب أ ء) = ق(∠ ب هـ ء)

وهما مرسومتان على القاعدة ب ء وفى جهة واحدة منها

∴ الشكل أ ب ء هـ رباعى دائرى (وهو المطلوب)

٢٨

∵ أ ب = حـ ء ∴ ق($\overset{\frown}{أب}$) = ق($\overset{\frown}{حـء}$)

∴ ق(∠ أ هـ ب) = $\frac{1}{2}$ [ق($\overset{\frown}{أب}$) + ق($\overset{\frown}{حـء}$)]

= $\frac{1}{2}$ [ق($\overset{\frown}{أب}$) + ق($\overset{\frown}{أب}$)]

= ق($\overset{\frown}{أب}$)

، ∵ ق($\overset{\frown}{أب}$) = ق(∠ أ م ب) المركزية.

∴ ق(∠ أ هـ ب) = ق(∠ أ م ب)

وهما زاويتان مرسومتان على أ ب وفى جهة واحدة منها.

∴ الشكل أ ب م هـ رباعى دائرى (المطلوب أولاً)

∴ ق(∠ أ ب هـ) = ق(∠ أ م هـ) = ٤٠°

∴ ق(∠ أ ء حـ) = ق(∠ أ ب حـ) = ٤٠°

(محيطيتان مشتركتان فى $\overset{\frown}{أحـ}$) (المطلوب ثانياً)

٢٩

∵ ب ص قطعة مماسة للدائرة م عند ب

، ب م نصف قطر

∴ ب ص ⊥ ب م

∵ ∠ ٢ خارجة عن Δ أ ب س

∴ ق(∠ ٢) = ٩٠° + ق(∠ ب أ س) (١)

، ق(∠ ١) = $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{أحـ}$)

= $\frac{1}{2}$ [ق($\overset{\frown}{أب}$) + ق($\overset{\frown}{بحـ}$)]

= $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{أب}$) + $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{بحـ}$)

= ٩٠° + ق(∠ ب أ س) (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ ق(∠ ١) = ق(∠ ٢)

∴ الشكل س ص ء حـ رباعى دائرى

٣٠

العمل : نرسم ب ء

البرهان : فى Δ ء أ ب

القائم الزاوية فى أ

∵ $(ب ء)^2 = (ء أ)^2 + (أ ب)^2$

= ٣٦ + ٦٤ = ١٠٠ (١)

∴ ب ء = ١٠ سم

، فى Δ ء حـ ب :

∵ $(ء حـ)^2 + (حـ ب)^2$ = ٢٥ + ٧٥ = ١٠٠ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $(ب ء)^2 = (ء حـ)^2 + (حـ ب)^2$

∴ ق(∠ ء حـ ب) = ٩٠°

∴ ق(∠ أ) + ق(∠ حـ) = ٩٠° + ٩٠° = ١٨٠°

∴ الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى. (المطلوب أولاً)

، ∵ ق(∠ ب أ ء) = ٩٠°

∴ ب ء قطر فى الدائرة المارة برؤوس الشكل أ ب حـ ء ومركزها فى منتصف ب ء

∴ طول نصف قطرها = $\frac{1}{2}$ ب ء = ٥ سم

(المطلوب ثانياً)

٣١

∵ أ ب ، حـ ل وتران متقاطعان فى س

∴ ق(∠ أ س ل)

= $\frac{1}{2}$ [ق($\overset{\frown}{بحـ}$) + ق($\overset{\frown}{أل}$)]

، ∵ ق($\overset{\frown}{أحـ}$) = ق($\overset{\frown}{بحـ}$)

∴ ق(∠ أ س ل) = $\frac{1}{2}$ [ق($\overset{\frown}{أحـ}$) + ق($\overset{\frown}{أل}$)]

= $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{لأحـ}$)

، ∵ ق(∠ ع) = $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{لأحـ}$)

∴ ق(∠ أ س ل) = ق(∠ ع)

، ∵ ∠ أ س ل خارجة عن الشكل س ص ع ل

∴ الشكل س ص ع ل رباعى دائرى (وهو المطلوب)

٣٢

العمل : نرسم أ ب

البرهان :

∵ ∠ ١ خارجة عن الشكل

الرباعى الدائرى هـ حـ ب أ

∴ ق(∠ ١) = ق(∠ ٢)

وبالمثل ق(∠ ٣) = ق(∠ ٤)

ولكن ق(∠ ٢) + ق(∠ ٤) = ١٨٠°

∴ ق(∠ ١) + ق(∠ ٣) = ١٨٠° وهما زاويتان متقابلتان.

∴ الشكل أ و س هـ رباعى دائرى. (وهو المطلوب)

للمتفوقين

١

∵ مساحة Δ س م ص = مساحة Δ ل م ع

وبإضافة مساحة Δ س م ل للطرفين.

∴ مساحة Δ س ل ص = مساحة Δ س ل ع

وهما مشتركان فى القاعدة س ل وفى جهة واحدة منها.

∴ س ل // ص ع

∴ ق(∠ س ل ص) = ق(∠ ل ص ع) (بالتبادل)

فى Δ م ص ع : ∵ م ص = م ع

∴ ق(∠ م ص ع) = ق(∠ م ع ص)

∴ ق(∠ م ع ص) = ق(∠ س ل ص)

وهما مرسومتان على القاعدة س ص وفى جهة واحدة منها

∴ الشكل س ص ع ل رباعى دائرى. (وهو المطلوب)

٢

∵ Δ ء حـ هـ ~ Δ ء ب أ

∴ ق(∠ ء حـ هـ) = ق(∠ ء ب أ)

، ∵ ∠ ء حـ هـ خارجة عن الشكل أ ب حـ ء

∴ الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى. (المطلوب أولاً)

∵ Δ ء حـ هـ ~ Δ ء ب أ

∴ ق(∠ هـ) = ق(∠ ء أ ب) (١)

∵ الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى

∴ ق(∠ ء أ ب) = ق(∠ ء حـ ب)

مرسومتان على أ ب وفى جهة واحدة منها (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ ق(∠ هـ) = ق(∠ أ حـ ب) وهما فى وضع تناظر

∴ هـ ء // حـ أ (المطلوب ثانياً)

٣

العمل : نرسم ‾بحـ ، ‾بء

البرهان: ∵ ⟷وهـ مماس للدائرة عند ب

، ‾أب قطر

∴ ‾هـو ⊥ ‾أب

∴ ق(∠حـب أ) + ق(∠حـب هـ) = ٩٠°

، ∵ ‾أب قطر ∴ ‾حـب ⊥ ‾أهـ

∴ ق(∠هـ) + ق(∠حـب هـ) = ٩٠°

∴ ق(∠هـ) = ق(∠حـب أ)

، ∵ ق(∠حـب أ) = ق(∠حـء أ)

(محيطيتان مشتركتان فى ⌒أحـ)

∴ ق(∠هـ) = ق(∠حـء أ)

، ∵ ∠حـء أ خارجة عن الشكل حـء و هـ

∴ الشكل حـء و هـ رباعى دائرى. (وهو المطلوب)

إجابات تمارين ١١

١

١ (أ)	٢ (جـ)	٣ (جـ)	٤ (د)
٥ (د)	٦ (ب)	٧ (د)	٨ (جـ)
٩ (أ)	١٠ (ب)	١١ (جـ)	١٢ (أ)
١٣ (ب)	١٤ (أ)	١٥ (ب)	

٢

١ س = ٣٥° ، ص = ٥٥° ، ع = ٥٥°

٢ س = ٦٥° ، ص = ٢٥° ، ع = ١٣٠°

٣ س = ٣٠° ، ص = ٦٠° ، ع = ٦٠°

٣

١ س = ١٢ ، ص = ١٣ ٢ س = ٩ ، ص = ١٧

٣ س = ٣ ، ص = ٤ ٤ س = ٣ ، ص = ٢

٥ س = ٤ ، ص = ٧ ٦ س = ٤ ، ص = ٣

٤ نظرى.

٥

∵ ‾أب تمس الدائرة عند ب ∴ ‾مب ⊥ ‾أب

∴ ق(∠أب حـ) = ٩٠° - ٣٠° = ٦٠°

، ∵ ‾أب ، ‾أحـ قطعتان مماستان للدائرة م

∴ أب = أحـ

∴ Δ أب حـ متساوى الأضلاع. (وهو المطلوب)

٦

∵ ‾أب ، ‾أء قطعتان مماستان للدائرة م

∴ أب = أء (١)

، ∵ ‾أب ، ‾أحـ قطعتان مماستان للدائرة ن

∴ أب = أحـ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ أء = أحـ (وهو المطلوب)

٧

∵ ‾أب مماسة للدائرة عند ب

، ‾مب نصف قطر.

∴ ق(∠م ب أ) = ٩٠°

، ∵ ⟵أم ينصف ∠ب أحـ ∴ ق(∠ب أ م) = ٣٠°

∴ م أ = ٢ م ب = ٢ × ١٠ = ٢٠ سم (المطلوب أولاً)

، ∵ (أب)² = (أم)² - (مب)² = (٢٠)² - (١٠)² = ٣٠٠

∴ أب = ١٠√٣ سم (المطلوب ثانيًا)

٨

∵ ‾أب ، ‾أحـ قطعتان مماستان للدائرة م

∴ ⟵أم ينصف ∠ب أحـ

∴ ق(∠ب أحـ) = ٢ × ٢٥° = ٥٠° ، أب = أحـ

∴ فى Δ أب حـ :

ق(∠أب حـ) = (١٨٠° - ٥٠°) / ٢ = ٦٥° (المطلوب أولاً)

، ∵ ‾مب نصف قطر ، ‾أب مماسة للدائرة عند ب

∴ ‾مب ⊥ ‾أب ∴ ق(∠أب م) = ٩٠°

وبالمثل ق(∠أحـ م) = ٩٠°

من الشكل الرباعى أ ب م حـ :

ق(∠ب م حـ) = ٣٦٠° - (٩٠° + ٩٠° + ٥٠°) = ١٣٠°

∴ ق(∠ب هـ حـ) = ١/٢ ق(∠ب م حـ)

= ١/٢ × ١٣٠° = ٦٥°

(محيطية ومركزية مشتركتان فى ⌒ب حـ) (المطلوب ثانيًا)

٩

∵ ‾أب ، ‾أحـ مماستان للدائرة م

∴ ⟵أم ينصف ∠ب أحـ

∴ ق(∠ب أحـ) = ٢ × ٣٠° = ٦٠°

، أب = أحـ ∴ Δ أب حـ متساوى الأضلاع

∴ ق(∠أحـ ب) = ٦٠°

، ∵ ‾ب ء قطر فى الدائرة م ∴ ق(∠ء حـ ب) = ٩٠°

∴ ق(∠أحـ ء) = ٩٠° + ٦٠° = ١٥٠° (وهو المطلوب)

١٠

∵ ⟷س أ ، ⟷س ب مماستان للدائرة من النقطة س

∴ س أ = س ب

∴ ق(∠س أ ب) = (١٨٠° - ٧٠°) / ٢ = ٥٥° (١)

، ∵ الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى

∴ ق(∠ء أ ب) = ١٨٠° - ١٢٥° = ٥٥° (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ ق(∠ء أ ب) = ق(∠س أ ب)

∴ ⟵أب ينصف ∠ء أ س (المطلوب أولاً)

∴ ق(∠ء أ س) = ٢ × ٥٥° = ١١٠°

∴ ق(∠ء أ س) + ق(∠س) = ١١٠° + ٧٠° = ١٨٠°

وهما داخلتان وفى جهة واحدة من القاطع ⟷أس

∴ ⟷أء // ⟷س ب (المطلوب ثانيًا)

١١

∵ ق(∠ب حـ ء) = ١/٢ ق(∠م)

(محيطية ومركزية مشتركتان فى ⌒ب ء)

∴ ق(∠ب حـ ء) = ١/٢ × ١٣٠° = ٦٥° (١)

، ∵ ‾أب // ‾حـء

∴ ق(∠أب حـ) = ق(∠ب حـ ء) = ٦٥° (بالتبادل)

، ∵ ‾أب ، ‾أحـ قطعتان مماستان للدائرة م

∴ أب = أحـ

∴ ق(∠أحـ ب) = ق(∠أب حـ) = ٦٥° (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ ق(∠أحـ ب) = ق(∠ب حـ ء)

∴ ⟵حـب ينصف ∠أحـ ء (المطلوب أولاً)

، ق(∠أ) = ١٨٠° - ٢ × ٦٥° = ٥٠° (المطلوب ثانيًا)

١٢

∵ ‾أب ، ‾أحـ قطعتان مماستان للدائرة

∴ أب = أحـ ∴ ٢س - ١ = س + ٢

∴ ٢س - س = ٢ + ١

∴ س = ٣ (المطلوب أولاً)

∴ أب = أحـ = ٢ × ٣ - ١ = ٥ سم

، ب حـ = ٧ - ٣ = ٤ سم

∴ محيط Δ أب حـ = ٥ + ٥ + ٤ = ١٤ سم (المطلوب ثانيًا)

١٣

∵ ‾ب ص ، ‾ب س قطعتان مماستان للدائرة.

∴ ب ص = ب س

، ∵ ‾حـ ص ، ‾حـ ع قطعتان مماستان للدائرة

∴ حـ ص = حـ ع

، ∵ ب ص + حـ ص = ب حـ = ١٠ سم

∴ ب س + حـ ع = ١٠ سم

، ∵ أس ، أع قطعتان مماستان للدائرة

∴ أس = أع

، ∵ محيط △ أب حـ = ٣٠ سم

∴ أس + أع + ب ص + ب س + حـ ص + حـ ع = ٣٠ سم

∴ ٢ أس + ١٠ + ١٠ = ٣٠

∴ ٢ أس + ٢٠ = ٣٠ ∴ ٢ أس = ١٠

∴ أس = ٥ سم (وهو المطلوب)

١٤

∵ م هى مركز الدائرة التى تمس أضلاع المثلث أب حـ

∴ حـ م ينصف ∠ حـ ∴ ق(∠ حـ) = ٢ × ٢٠° = ٤٠°

، ∵ م ء ⊥ أ ء ، م و ⊥ أ و

∴ الشكل م ء أ و رباعى دائرى

∴ ق(∠ أ) = ١٨٠° − ١٢٠° = ٦٠°

، ∵ مجموع قياسات زوايا △ أب حـ = ١٨٠°

∴ ق(∠ ب) = ١٨٠° − (٤٠° + ٦٠°) = ٨٠°

(وهو المطلوب)

١٥

∵ طول أب = طول ب حـ = طول أحـ

∴ ق(أب) = ق(ب حـ) = ق(أحـ) = ٣٦٠° ÷ ٣ = ١٢٠°

∴ ق(∠ أ م ب) = ١٢٠° (المطلوب أولاً)

∵ ء أ تمس الدائرة عند أ ∴ م أ ⊥ أ ء

، ∵ ء حـ تمس الدائرة عند حـ ∴ م حـ ⊥ ء حـ

∴ ق(∠ م أ ء) + ق(∠ م حـ ء) = ١٨٠°

∴ الشكل أ م حـ ء رباعى دائرى. (المطلوب ثانياً)

، ∵ ق(∠ أ م حـ) = ق(أحـ) = ١٢٠°

∴ ق(∠ ء) = ١٨٠° − ١٢٠° = ٦٠° (١)

، ∵ ء أ ، ء حـ قطعتان مماستان للدائرة.

∴ أ ء = حـ ء (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ △ أ حـ ء متساوى الأضلاع. (المطلوب ثالثاً)

١٦

فى شكل (١) :

∵ هـ أ ، هـ حـ مماستان للدائرة م من النقطة هـ

∴ هـ أ = هـ حـ (١)

، ∵ هـ ب ، هـ ء مماستان للدائرة ن من النقطة هـ

∴ هـ ب = هـ ء (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ هـ أ + هـ ب = هـ حـ + هـ ء

∴ أب = حـ ء (وهو المطلوب)

فى شكل (٢) :

نفرض أن أب ، حـ ء يتلاقيان فى هـ

∵ هـ أ ، هـ حـ مماستان للدائرة م من النقطة هـ

∴ هـ أ = هـ حـ (١)

، ∵ هـ ب ، هـ ء مماستان للدائرة ن من النقطة هـ

∴ هـ ب = هـ ء (٢)

بطرح (٢) من (١) : ∴ هـ أ − هـ ب = هـ حـ − هـ ء

∴ أب = حـ ء (وهو المطلوب)

١٧

∵ أب مماسة للدائرة عند ب ، م ب نصف قطر

∴ ق(∠ أ ب م) = ٩٠°

ومن △ أ ب م :

ق(∠ م أ ب) = ١٨٠° − (٩٠° + ٧٠°) = ٢٠°

، ∵ أ م ينصف ∠ ب أ حـ

∴ ق(∠ ب أ حـ) = ٢ × ٢٠° = ٤٠°

، ∵ أب ، أحـ قطعتان مماستان للدائرة

∴ أب = أحـ

∴ ق(∠ أ ب حـ) = ق(∠ أ حـ ب)

= (١٨٠° − ٤٠°) ÷ ٢ = ٧٠° (المطلوب أولاً)

، ∵ ق(∠ ب حـ ء) = ½ ق(∠ ب م ء)

(محيطية ومركزية مشتركتان فى ب ء)

∴ ق(∠ ب حـ ء) = ½ × ٧٠° = ٣٥°

∴ ق(∠ أ حـ ء) = ٧٠° − ٣٥° = ٣٥° (المطلوب ثانياً)

١٨

∵ س ء ، س هـ قطعتان مماستان للدائرة.

∴ س ء = س هـ

∴ ق(∠ ١) = ق(∠ ٢) (١)

، ∵ ء هـ // ص ع ، ء ص قاطع لهما.

∴ ق(∠ ٢) = ق(∠ ٣) بالتناظر (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ ق(∠ ١) = ق(∠ ٣)

∴ الشكل ص ع هـ ء رباعى دائرى. (وهو المطلوب)

١٩

العمل :

نرسم ب حـ يقطع أم فى و

البرهان :

∵ أحـ ، أب قطعتان مماستان للدائرة م

∴ أو ⊥ ب حـ ∴ ق(∠ حـ و م) = ٩٠°

، ∵ ب ء قطر فى الدائرة م

∴ ق(∠ ب حـ ء) = ٩٠°

∴ ق(∠ حـ و م) + ق(∠ و حـ ء) = ١٨٠°

وهما داخلتان وفى جهة واحدة من القاطع ب حـ

∴ أم // حـ ء (وهو المطلوب)

٢٠

العمل : نرسم ب م

البرهان :

∵ أحـ ، أب قطعتان مماستان للدائرة م

∴ أس ⊥ ب حـ

، ∵ ص منتصف ب ء ∴ م ص ⊥ ب ء

∴ ق(∠ ب س م) + ق(∠ م ص ب) = ١٨٠°

∴ الشكل س ب ص م رباعى دائرى (المطلوب أولاً)

∴ ق(∠ س ب م) = ق(∠ س ص م) = ٣٥°

، ∵ م ب نصف قطر ، أب مماسة للدائرة م عند ب

∴ م ب ⊥ أب

∴ ق(∠ أ ب حـ) = ٩٠° − ٣٥° = ٥٥°

، ∵ أب ، أحـ قطعتان مماستان للدائرة م

∴ أب = أحـ

∴ ق(∠ أ ب حـ) = ق(∠ أ حـ ب) = ٥٥°

∴ ق(∠ ب أ حـ) = ١٨٠° − ٢ × ٥٥° = ٧٠°

(المطلوب ثانياً)

٢١

∵ أب تمس الدائرة عند ب ∴ م ب ⊥ أب

، ∵ أحـ تمس الدائرة عند حـ ∴ م حـ ⊥ أحـ

∴ ق(∠ أ ب م) + ق(∠ أ حـ م) = ٩٠° + ٩٠° = ١٨٠°

∴ الشكل أ ب م حـ رباعى دائرى. (المطلوب أولاً)

، ∵ ∠ حـ م ء خارجة عنه.

∴ ق(∠ حـ م ء) = ق(∠ أ) = ٤٥° ∴ فى △ م حـ ء

ق(∠ ء) = ١٨٠° − (٩٠° + ٤٥°) = ٤٥°

∴ حـ ء = م حـ (١)

، ∵ أحـ ، أب قطعتان مماستان للدائرة.

∴ أحـ = أب (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ حـ ء + أحـ = م حـ + أب

∴ أء = أب + م حـ

، ∵ م حـ = م ب (طولا نصفى قطرين)

∴ أء = أب + م ب (المطلوب ثانياً)

٢٢

∵ حـ أ ، حـ ء مماستان للدائرة م

∴ حـ أ = حـ ء (١)

، ∵ حـ ء ، حـ ب مماستان للدائرة م

∴ حـ ء = حـ ب (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ حـ أ = حـ ء = حـ ب

∴ حـ منتصف أب (المطلوب أولاً)

∴ فى △ أ ب ء : ء حـ متوسط ، ء حـ = $\frac{1}{2}$ أ ب

∴ أ ء ⊥ ب ء (المطلوب ثانياً)

٢٣

∵ أ ء ، أ حـ قطعتان مماستان للدائرة م

∴ أ ء = أ حـ

، ∵ أ حـ ، أ ب قطعتان مماستان للدائرة ن

∴ أ حـ = أ ب ∴ أ ء = أ حـ = أ ب (المطلوب أولاً)

∴ أ مركز الدائرة المارة بالنقط ء ، حـ ، ب

∴ ق(∠ حـ ء ب) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ حـ أ ب) = ٣٤°

(محيطية ومركزية مشتركتان فى ب⌢حـ)(المطلوب ثانياً)

٢٤

∵ س أ ، س حـ قطعتان مماستان للدائرة م

∴ س م ينصف ∠ أ س ص

∴ ق(∠ أ س م) = ق(∠ م س ص)

، ∵ ص حـ ، ص ب قطعتان مماستان للدائرة م

∴ ص م ينصف ∠ ب ص س

∴ ق(∠ ب ص م) = ق(∠ م ص س)

، ∵ أ م ⊥ أ س ، م ب ⊥ ب ص

∴ من الشكل الرباعى أ ب ص س :

ق(∠ أ س ص) + ق(∠ ب ص س) = ٣٦٠° - ١٨٠° = ١٨٠°

∴ $\frac{1}{2}$ ق(∠ أ س ص) + $\frac{1}{2}$ ق(∠ ب ص س) = ٩٠°

∴ ق(∠ م س ص) + ق(∠ م ص س) = ٩٠°

∴ فى △ س م ص : ق(∠ س م ص) = ٩٠°

∴ س م ⊥ ص م (المطلوب أولاً)

، ∵ س أ ، س حـ قطعتان مماستان للدائرة م

∴ س أ = س حـ وبالمثل ص ب = ص حـ

∴ س أ + ص ب = س حـ + ص حـ

∴ س أ + ص ب = س ص = ١٣ سم

، ∵ أ س // ب ص ، أ س ≠ ب ص

∴ الشكل أ س ص ب شبه منحرف

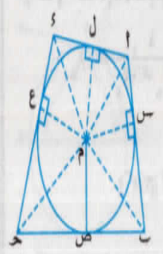
∴ مساحة الشكل أ س ص ب

= $\frac{1}{2}$ (أ س + ب ص) × أ ب

= $\frac{1}{2}$ × ١٣ × ١٠ = ٦٥ سم² (المطلوب ثانياً)

للمتفوقين

١



العمل :

نرسم م س ⊥ أ ب

، م ل ⊥ أ ء ، م ع ⊥ ء حـ

البرهان :

∵ الدائرة م دائرة داخلة للشكل الرباعى أ ب حـ ء

∴ الدائرة م تمس أضلاع الشكل أ ب حـ ء

فى س ، ص ، ع ، ل

∴ أ س ، أ ل قطعتان مماستان ∴ أ س = أ ل

وبالمثل ب س = ب ص ، حـ ع = حـ ص ، ء ع = ء ل

بالجمع ينتج أن : أ س + ب س + حـ ع + ع ء

= أ ل + ب ص + حـ ص + ء ل

∴ أ ب + ء حـ = أ ء + ب حـ

= $\frac{1}{2}$ محيط الشكل أ ب حـ ء

∴ محيط الشكل أ ب حـ ء

= ٢ (أ ب + ء حـ) = ٢ (٩ + ١٢) = ٤٢ سم (المطلوب أولاً)

، مساحة الشكل أ ب حـ ء

= مساحة △ م أ ب + مساحة △ م ب حـ

+ مساحة △ م حـ ء + مساحة △ م ء أ

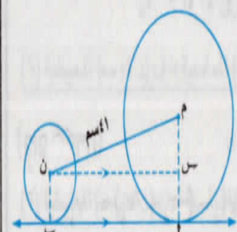
= $\frac{1}{2}$ أ ب × نق + $\frac{1}{2}$ ب حـ × نق + $\frac{1}{2}$ حـ ء × نق

+ $\frac{1}{2}$ أ ء × نق

= $\frac{1}{2}$ نق (أ ب + ب حـ + حـ ء + ء أ)

= $\frac{1}{2}$ × ٥ × ٤٢ = ١٠٥ سم² (المطلوب ثانياً)

٢



العمل :

نرسم م أ

، ن ب

، ن س // أ ب ويقطع م أ فى س

البرهان :

∵ م أ نصف قطر ، أ ب مماس للدائرة م عند أ

∴ ق(∠ م أ ب) = ٩٠° (١)

وبالمثل ق(∠ ن ب أ) = ٩٠° (٢)

، ∵ ن س // أ ب ∴ ق(∠ أ س ن) = ٩٠° (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) : ∴ الشكل أ س ن ب مستطيل

، ∵ ب ن = ٨ سم

∴ أ س = ٨ سم ∴ م س = ٩ سم

، ∵ ق(∠ م س ن) = ٩٠°

∴ (س ن)² = (م ن)² - (م س)² = ١٦٨١ - ٨١ = ١٦٠٠

∴ س ن = ٤٠ سم

∴ أ ب = س ن = ٤٠ سم (وهو المطلوب)

إجابات تمارين ١٢

أولاً مسائل على نظرية (٥) ونتيجتها

١

شكل (١) : ق(∠ ب أ حـ) = ٧٠°

شكل (٢) : ق(∠ أ م ب) = ١١٢°

شكل (٣) : ق(∠ أ ء ب) = ٨٠°

شكل (٤) : ق(∠ حـ أ ب) = ٧٠°

شكل (٥) : ق(∠ حـ أ ب) = ٩٠°

شكل (٦) : ق(∠ حـ أ ب) = ٦٠°

شكل (٧) : ق(∠ حـ أ ب) = ٥٠°

شكل (٨) : ق(∠ حـ أ ب) = ٦٥°

، ق(∠ أ ء ب) = ١١٥°

شكل (٩) : ق(∠ حـ أ ء) = ٤٠°

شكل (١٠) : ق(∠ أ ب ء) = ٥٠°

شكل (١١) : ق(∠ أ ء ب) = ٤٠°

شكل (١٢) : ق(∠ ب أ ء) = ٣٠°

، ق(∠ ء أ هـ) = ١٠٠°

شكل (١٣) : ق(∠ أ ب ء) = ٣٨°

شكل (١٤) : ق(∠ حـ أ ب) = ٨٠°

، ق(∠ ب ء حـ) = ٥٠°

شكل (١٥) : ق(∠ حـ أ ب) = ٦٠°

، ق(∠ أ هـ ب) = ٦٠°

شكل (١٦) : ق(∠ حـ أ ب) = ٦٥°

٢

١ (جـ) ٢ (أ) ٣ (جـ)

٤ (د) ٥ (أ) ٦ (د)

٧ (ب) ٨ (جـ) ٩ (جـ)

٣ نظرى.

٤

∵ أب ، أج مماستان للدائرة عند ب ، ج

∴ ق(∠ أ ب ج) = ق(∠ أ ج ب)

، ∵ ق(∠ أ ب ج) المماسية

= ق(∠ ب د ج) المحيطية = ٦٥°

∴ ق(∠ أ) = ١٨٠° − [٦٥° + ٦٥°] = ٥٠°

(وهو المطلوب)

٥

∵ ق(∠ أ ب د) المماسية = ق(∠ ج) المحيطية (١)

، ∵ س ص // ب د ، س ب قاطع لهما

∴ ق(∠ ص س ب) = ق(∠ س ب د) (بالتبادل) (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ ق(∠ ج) = ق(∠ ص س ب)

∴ الشكل أ س ص ج رباعي دائري. (وهو المطلوب)

٦

∵ ق(∠ أ ج ب) المحيطية = ق(∠ س أ ب) المماسية

= ٤٠°

∴ ق(∠ ب أ ج) = ١٨٠° − (٤٠° + ١١٠°) = ٣٠°

∴ ق(∠ ج د ب) = ق(∠ ب أ ج) = ٣٠°

(محيطيتان مشتركتان في ب⌒ج) (وهو المطلوب)

٧

في △ أ ج د : ∵ س° + ٦ س° + ٢ س° = ١٨٠°

∴ ٩ س° = ١٨٠° ∴ س° = ٢٠°

∴ ق(∠ أ د ج) = ٢ × ٢٠° = ٤٠°

، ∵ ق(∠ ب أ ج) المماسية = ق(∠ أ د ج) المحيطية

∴ ق(∠ ب أ ج) = ٤٠° (وهو المطلوب)

٨

∵ أب قطر في الدائرة ∴ ق(أ⌒ج⌒ب) = ١٨٠°

، ∵ ج د // أب

∴ ق(أ⌒ج) = ق(ج⌒ب) = $\frac{١٨٠°}{٢}$ = ٩٠

∴ ق(∠ د ج أ) المماسية = $\frac{١}{٢}$ ق(أ⌒ج) = ٤٥°

(المطلوب أولاً)

∴ طول أ⌒ج = $\frac{٩٠°}{٣٦٠°}$ × ٤٤ = ١١ سم (المطلوب ثانيًا)

٩

∵ س ع ، س ص مماسان للدائرة

∴ س ع = س ص

∴ ق(∠ س ع ص) = $\frac{١٨٠° - ٤٠°}{٢}$ = ٧٠°

، ∵ ق(∠ ع هـ ص) المحيطية = ق(∠ س ع ص) المماسية

∴ ق(∠ ع هـ ص) = ٧٠° (١)

، ∵ الشكل ص ع د هـ رباعي دائري

∴ ق(∠ ع ص هـ) + ق(∠ د) = ١٨٠°

∴ ق(∠ ع ص هـ) = ١٨٠° − ١١٠° = ٧٠° (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ ق(∠ ع هـ ص) = ق(∠ ع ص هـ)

∴ ع هـ = ع ص

∴ ق(ع⌒د⌒هـ) = ق(ع⌒ص) (وهو المطلوب)

١٠

∵ ق(∠ أ ب ج) المماسية = ق(∠ ب د ج) المحيطية (١)

، ∵ ب ج = ج د

∴ ق(∠ ج ب د) = ق(∠ ج د ب) (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ ق(∠ أ ب ج) = ق(∠ ج ب د) (المطلوب أولاً)

، ∵ ب د هـ ج رباعي دائري

∴ ق(∠ د ب ج) = ١٨٠° − ١١٠° = ٧٠°

∴ ق(∠ أ ب ج) = ٧٠°

، ∵ أب = أج

∴ ق(∠ أ) = ١٨٠° − (٧٠° + ٧٠°) = ٤٠°

(المطلوب ثانيًا)

١١

∵ أ ب ج د رباعي دائري

∴ ق(∠ أ ب ج) = ١٨٠° − ١٠٠° = ٨٠° (المطلوب أولاً)

، ∵ أب // د ج ، أج قاطع لهما

∴ ق(∠ ب أ ج) = ق(∠ أ ج د) = ٥٠° (بالتبادل)

∴ ق(∠ ج ب هـ) المماسية

= ق(∠ ب أ ج) المحيطية = ٥٠° (المطلوب ثانيًا)

∴ ق(∠ أ ب و) = ١٨٠° − [ق(∠ أ ب ج) + ق(∠ ج ب هـ)]

= ١٨٠° − (٨٠° + ٥٠°) = ٥٠°

، ∵ و أ = و ب

∴ ق(∠ و) = ١٨٠° − (٥٠° + ٥٠°) = ٨٠°

(المطلوب ثالثًا)

١٢

∵ أج = أب ، ق(∠ أ) = ٤٠°

∴ ق(∠ أ ج ب) = ق(∠ أ ب ج)

= $\frac{١٨٠° - ٤٠°}{٢}$ = ٧٠° (المطلوب أولاً)

، ∵ أج // ب د ، ج ب قاطع لهما

∴ ق(∠ أ ج ب) = ق(∠ ج ب د) = ٧٠° (بالتبادل)

∴ ق(∠ هـ ج د) المماسية

= ق(∠ ج ب د) المحيطية = ٧٠° (المطلوب ثانيًا)

، ∵ ق(∠ ج د ب) المحيطية = ق(∠ أ ج ب) المماسية

= ٧٠°

∴ ق(∠ ج ب د) = ق(∠ ج د ب) = ٧٠°

∴ في △ ج ب د : ج ب = ج د (المطلوب ثالثًا)

١٣

∵ أ ب ج د رباعي دائري.

∴ ق(∠ أ ب ج) = ١٨٠° − ١٢٠° = ٦٠°

، ∵ ب ج قطر في الدائرة.

∴ ق(∠ ب أ ج) = ٩٠°

∴ ق(∠ أ ج ب) = ١٨٠° − (٩٠° + ٦٠°) = ٣٠°

∴ ق(∠ هـ أ ب) المماسية

= ق(∠ أ ج ب) المحيطية = ٣٠° (١)

، ∵ ∠ أ ب ج خارجة عن △ أ ب هـ

∴ ق(∠ هـ) = ٦٠° − ٣٠° = ٣٠° (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ ق(∠ هـ أ ب) = ق(∠ هـ)

∴ ب أ = ب هـ (المطلوب أولاً)

، ∵ ∠ أ ب هـ خارجة عن △ أ ب ج

∴ ق(∠ أ ب هـ) = ق(∠ ب أ ج) + ق(∠ أ ج ب)

، ∵ ق(∠ هـ أ ب) المماسية = ق(∠ أ ج ب) المحيطية

∴ ق(∠ أ ب هـ) = ق(∠ ب أ ج) + ق(∠ هـ أ ب)

∴ ق(∠ أ ب هـ) = ق(∠ هـ أ ج) (المطلوب ثانيًا)

١٤

∵ أب مماس للدائرة.

∴ ق(∠ أ ب ج) المماسية = ق(∠ د) المحيطية (١)

، ∵ ∠ أ ج ب خارجة عن △ ب ج د

∴ ق(∠ أ ج ب) = ق(∠ ج ب د) + ق(∠ د) (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ ق(∠ أ ج ب) = ق(∠ ج ب د) + ق(∠ أ ب ج)

∴ ق(∠ أ ب د) = ١٠٠° (وهو المطلوب)

١٥

∵ د منتصف أج ، هـ منتصف ب ج

∴ أب // د هـ (المطلوب أولاً)

∴ ق(∠ ب د هـ) = ق(∠ أ ب د) (بالتبادل)

، ∵ ق(∠ء ا ن) المماسية = ق(∠ن ح ه) المحيطية

∴ ق(∠ن ء ه) = ق(∠ن ح ه)

وهما مرسومتان على $\overline{نه}$ وفى جهة واحدة منها

∴ الشكل ن ء ح ه رباعى دائرى

∴ النقط ن ، ء ، ح ، ه تمر بها دائرة واحدة. (المطلوب ثانياً)

16

∵ ا ب = ا ح ∴ ق(⌒ا ب) = ق(⌒ا ح)

، ∵ ق(∠ح ص ء) = $\frac{1}{2}$ [ق(⌒ا ب) + ق(⌒ء ح)]

∴ ق(∠ح ص ء) = $\frac{1}{2}$ [ق(⌒ا ح) + ق(⌒ء ح)]

∴ ق(∠ح ص ء) = $\frac{1}{2}$ ق(⌒ا ء)

، ∵ ق(∠س ء ص) = $\frac{1}{2}$ ق(⌒ا ء)

∴ ق(∠س ص ء) = ق(∠س ء ص)

∴ س ص = س ء (وهو المطلوب)

17

∵ $\overleftrightarrow{ءح}$ مماس للدائرة

∴ ق(∠ب ح ء) المماسية

= ق(∠ب ا ح) المحيطية

، ∵ $\overleftrightarrow{ءه}$ // $\overleftrightarrow{اح}$ ، $\overleftrightarrow{اه}$ قاطع لهما

∴ ق(∠ب ه ء) = ق(∠ب ا ح) (بالتناظر)

∴ ق(∠ب ح ء) = ق(∠ب ه ء)

وهما مرسومتان على $\overline{بء}$ وفى جهة واحدة منها

∴ ب ه ح ء شكل رباعى دائرى (وهو المطلوب)

18

∵ $\overline{اب}$ قطر ∴ ق(∠ا ح ب) = 90°

، ∵ $\overline{ءه}$ ⊥ $\overline{اب}$

∴ ق(∠ا ح ب) + ق(∠ء ا ه) = 90° + 90° = 180°

∴ الشكل ا ء ه ح رباعى دائرى (المطلوب أولاً)

∴ ق(∠ء ه ح) الخارجة = ق(∠ا)

، ∵ ق(∠ء ح ه) المماسية = ق(∠ا) المحيطية

∴ ق(∠ء ح ه) = ق(∠ء ه ح)

∴ △ء ح ه متساوى الساقين. (المطلوب ثانياً)

، ∵ ق(∠ا ه ح) = 90°

∴ $\overline{اح}$ قطر فى الدائرة المارة برؤوس الشكل ا ء ه ح

∴ مركز الدائرة هو نقطة منتصف $\overline{اح}$ (المطلوب ثالثاً)

19

∵ س منتصف $\overline{اب}$ ∴ $\overline{مس}$ ⊥ $\overline{اب}$

، ∵ $\overleftrightarrow{هح}$ مماس ، $\overline{مح}$ نصف قطر

∴ $\overline{مح}$ ⊥ $\overline{هح}$

∴ ق(∠ه س م) + ق(∠ه ح م)

= 90° + 90° = 180°

∴ الشكل ه ح م س رباعى دائرى (المطلوب أولاً)

∴ ق(∠ه م س) = ق(∠ه ح س)

مرسومتان على $\overline{هس}$ وفى جهة واحدة منها ولكن

ق(∠ه ح ء) المماسية = ق(∠ء ب ح) المحيطية

∴ ق(∠ه م س) = ق(∠ء ب ح) (المطلوب ثانياً)

20

∵ $\overline{اء}$ مماس للدائرة

∴ ق(∠1) المماسية

= ق(∠3) المحيطية

، ∵ $\overline{بح}$ قطر ∴ ق(∠ب ا ح) = 90°

∴ فى △△ ا ء ب ، ح ا ب :

ق(∠1) = ق(∠3) ، ق(∠ء) = ق(∠ب ا ح) = 90°

∴ ق(∠2) = ق(∠4) (وهو المطلوب)

21

∵ ا ب ح ء ه خماسى منتظم

∴ ا ب = ب ح = ح ء = ء ه = ا ه

∴ ق(⌒ا ب) = ق(⌒ب ح) = ق(⌒ح ء)

= ق(⌒ء ه) = ق(⌒ا ه)

∴ ق(⌒ا ه) = $\frac{360°}{5}$ = 72° (المطلوب أولاً)

∴ ق(∠ا ه س) المماسية = $\frac{1}{2}$ ق(⌒ا ه)

= $\frac{1}{2}$ × 72° = 36°

، ∵ ا س = ه س

∴ ق(∠ه ا س) = ق(∠ا ه س) = 36°

∴ فى △ا ه س :

ق(∠ا س ه) = 180° − (36° + 36°)

= 108° (المطلوب ثانياً)

22

فى الدائرة الصغرى :

∵ ق(∠س ا ب) المماسية = ق(∠ا ء ب) المحيطية (1)

وفى الدائرة الكبرى :

∵ ق(∠س ا ح) المماسية = ق(∠ا ه ح) المحيطية (2)

من (1) ، (2) : ∴ ق(∠ا ء ب) = ق(∠ا ه ح)

وهما فى وضع تناظر

∴ $\overline{ءب}$ // $\overline{هح}$ (وهو المطلوب)

23

العمل : نرسم $\overline{بح}$

البرهان :

ق(∠ء ا ب) المماسية

= ق(∠ا ح ب) المحيطية

، ∵ ∠ا ح ب خارجة عن الرباعى الدائرى ب ح ه ء

∴ ق(∠ا ح ب) = ق(∠ء)

∴ ق(∠ء ا ب) = ق(∠ء) وهما فى وضع تبادل

∴ $\overleftrightarrow{او}$ // $\overline{ءه}$ (وهو المطلوب)

24

العمل : نرسم $\overline{اب}$

البرهان :

فى الدائرة م : ق(∠1) المحيطية

= ق(∠3) المماسية

وفى الدائرة ن : ق(∠2) المحيطية = ق(∠4) المماسية

فى △ء ح ه :

∵ ق(∠3) + ق(∠4) + ق(∠5) = 180°

∴ ق(∠1) + ق(∠2) + ق(∠5) = 180°

∴ ق(∠ه ا ح) + ق(∠ه ء ح) = 180°

∴ الشكل ا ه ء ح رباعى دائرى. (وهو المطلوب)

ثانياً مسائل على عكس نظرية (5)

1

[1] ∵ ا ء = ب ء

∴ ق(∠ب) = ق(∠ب ا ء) = 70°

∴ ق(∠ء) = 180° − (70° + 70°) = 40°

∴ ق(∠ح ا ب) = ق(∠ء)

∴ $\overleftrightarrow{اح}$ يمس الدائرة م عند ا

[2] ∵ ق(∠ب ا ء) = 90° (مرسومة فى نصف دائرة)

∴ ق(∠ء) = 90° − 50° = 40°

∴ ق(∠ب ا ح) = ق(∠ء)

∴ $\overleftrightarrow{اح}$ يمس الدائرة م عند ا

[3] ∵ ق(∠ا م ب) المركزية = 110°

، ق(∠ح ا ب) = 55°

∴ ق(∠ح ا ب) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ب م ا) المركزية

∴ $\overleftrightarrow{اح}$ يمس الدائرة م عند ا

[4] ∵ ا ب = ب ء

∴ ق(∠ب ا ء) = ق(∠ء) = $\frac{180° - 50°}{2}$ = 65°

∴ ق(∠ح ا ب) = ق(∠ء)

∴ $\overleftrightarrow{اح}$ يمس الدائرة م عند ا

٢

[١] ∵ ب أ = ب حـ

∴ ق(∠ب أ حـ) = ق(∠حـ)

$= \frac{١٨٠° - ٤٠°}{٢} = ٧٠°$

∴ ق(∠ب أ ء) = ١٤٠° - ٧٠° = ٧٠°

∴ ق(∠ب أ ء) = ق(∠حـ)

∴ أء مماس للدائرة التي تمر برؤوس Δ أ ب حـ

[٢] ∵ Δ أ ب حـ متساوي الأضلاع

∴ ق(∠حـ) = ق(∠ب) = ٦٠°

، ∵ أء // حـ ب ، أحـ قاطع لهما.

∴ ق(∠حـ) = ق(∠ء أ حـ) = ٦٠° (بالتبادل)

∴ ق(∠ب) = ق(∠ء أ حـ)

∴ أء مماس للدائرة التي تمر برؤوس Δ أ ب حـ

[٣] ∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ٦٠° + ٣ س° + ٥ س° = ١٨٠°

∴ ٨ س° = ١٢٠° ∴ س° = ١٥°

∴ ق(∠حـ) = ٥ × ١٥° = ٧٥°

∴ ق(∠حـ) = ق(∠ء أ ب)

∴ أء مماس للدائرة التي تمر برؤوس Δ أ ب حـ

[٤] ∵ Δ أ ب حـ قائم الزاوية في أ

، أحـ = $\frac{١}{٢}$ ب حـ ∴ ق(∠ب) = ٣٠°

∴ ق(∠حـ) = ١٨٠° - (٩٠° + ٣٠°) = ٦٠°

∴ ق(∠حـ) = ق(∠ء أ ب)

∴ أء مماس للدائرة التي تمر برؤوس Δ أ ب حـ

٣

∵ أهـ // ب ء ، أب قاطع لهما.

∴ ق(∠أ ب ء) = ق(∠ب أ هـ) = ٥٥° (بالتبادل)

، ∵ أب = أء

∴ ق(∠أ ء ب) = ٥٥°

∴ ق(∠ب أ ء) = ١٨٠° - (٥٥° + ٥٥°) = ٧٠°

∴ ق(∠ب أ ء) + ق(∠ب حـ ء) = ٧٠° + ١١٠° = ١٨٠°

∴ الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري. (المطلوب أولاً)

، ∵ ق(∠أ ء ب) = ق(∠ب أ هـ)

∴ أهـ مماس للدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب ء

، ∵ الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب ء هي نفسها الدائرة المارة برؤوس الشكل الرباعي الدائري أ ب حـ ء لاشتراكهما في ثلاث نقاط

∴ أهـ مماس للدائرة المارة برؤوس الشكل أ ب حـ ء (المطلوب ثانياً)

٤

∵ الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري.

∴ ق(∠أ) = ١٨٠° - ١٤٠° = ٤٠°

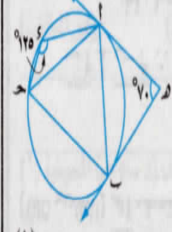
، ∵ أب = أء

∴ ق(∠أ ب ء) = $\frac{١٨٠° - ٤٠°}{٢}$ = ٧٠°

∴ ق(∠أ ب ء) = ق(∠أ ء هـ)

∴ ءهـ مماس للدائرة عند ء (وهو المطلوب)

٥



∵ الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري

∴ ق(∠أ ب حـ) = ١٨٠° - ١٢٥° = ٥٥° (١)

، ∵ هـ أ ، هـ ب مماسان للدائرة عند أ ، ب

∴ هـ أ = هـ ب

، ∵ ق(∠هـ) = ٧٠°

∴ ق(∠هـ أ ب) = $\frac{١٨٠° - ٧٠°}{٢}$ = ٥٥°

، ∵ هـ أ مماس للدائرة عند أ

∴ ق(∠هـ أ ب) المماسية = ق(∠أ حـ ب) المحيطية

∴ ق(∠أ حـ ب) = ٥٥° (٢)

من (١) ، (٢) :

ق(∠أ حـ ب) = ق(∠أ ب حـ) = ٥٥°

∴ أب = أحـ (المطلوب أولاً)

∴ ق(∠ب أ حـ) = ١٨٠° - ٢ × ٥٥° = ٧٠°

∴ ق(∠ب أ حـ) = ق(∠هـ) = ٧٠°

∴ أحـ مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، هـ (المطلوب ثانياً)

٦

∵ ءأ ، ءب قطعتان مماستان للدائرة م عند أ ، ب

∴ ءأ = ءب

∴ ق(∠١) = ق(∠٢)

∴ ق(∠ء) = ١٨٠° - ٢ ق(∠١) (١)

، في Δ أ ب حـ : ∵ أب = أحـ

∴ ق(∠٣) = ق(∠٤)

∴ ق(∠ب أ حـ) = ١٨٠° - ٢ ق(∠٤) (٢)

، ∵ أء مماسة للدائرة

∴ ق(∠٤) المحيطية = ق(∠١) المماسية (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) : ∴ ق(∠ء) = ق(∠ب أ حـ)

∴ أحـ مماس للدائرة المارة برؤوس Δ أ ب ء (وهو المطلوب)

٧

في Δ أ ب حـ :

∵ ق(∠ب أ ء) + ق(∠ء أ حـ) = ٩٠° (١)

في Δ أ ء حـ :

∵ ق(∠أ ء حـ) = ٩٠°

∴ ق(∠حـ) + ق(∠ء أ حـ) = ٩٠° (٢)

من (١) ، (٢) :

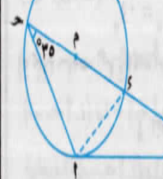
∴ ق(∠ب أ ء) + ق(∠ء أ حـ)

= ق(∠حـ) + ق(∠ء أ حـ)

∴ ق(∠ب أ ء) = ق(∠حـ)

∴ أب مماس للدائرة المارة برؤوس Δ أ ء حـ (وهو المطلوب)

٨



العمل : نرسم أء

البرهان :

∵ حـ ء قطر في الدائرة م

∴ ق(∠ء أ حـ) = ٩٠°

من Δ أ ب حـ : ق(∠ب أ حـ) = ١٨٠° - (٢٠° + ٣٥°) = ١٢٥°

∴ ق(∠ب أ ء) = ١٢٥° - ٩٠° = ٣٥°

∴ ق(∠حـ) = ق(∠ب أ ء)

∴ ب أ مماس للدائرة عند أ (وهو المطلوب)

٩



∵ أحـ = ب حـ

∴ ق(∠ب)

= ق(∠ب أ حـ) (١)

، ∵ أء // ب حـ ، أحـ قاطع لهما

∴ ق(∠ء حـ أ) = ق(∠ب أ حـ) (بالتبادل) (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ ق(∠ب) = ق(∠ء حـ أ)

∴ حـ ء مماس للدائرة الخارجة للمثلث أ ب حـ (وهو المطلوب)

10

∵ ق(∠ ا هـ جـ) = ق(∠ ب) (1)

(محيطيتان مشتركتان في ⌒ا جـ)

، في △ ا ب جـ :

∵ ا ب = ا جـ

∴ ق(∠ ا جـ ب) = ق(∠ ب) (2)

من (1) ، (2) :

∴ ق(∠ ا هـ جـ) = ق(∠ ا جـ ب)

∴ ا جـ قطعة مماسة للدائرة المارة برؤوس المثلث جـ د هـ

(وهو المطلوب)

11

∵ ن جـ ⊥ ا ب ، ن ا = ن جـ = نق

∴ ق(∠ ن جـ ا) = ق(∠ ن ا جـ) = $\frac{180° - 90°}{2}$ = 45°

، ق(∠ ا هـ جـ) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ ا ن جـ) = 45°

(محيطية ومركزية مشتركتان في ⌒ا جـ)

∴ ق(∠ د جـ ا) = ق(∠ د هـ جـ) = 45°

∴ ا جـ مماس للدائرة الخارجة للمثلث جـ د هـ

(وهو المطلوب)

12

في △ ا ب جـ : ∵ ا ب = ا جـ

∴ ق(∠ ا ب جـ) = ق(∠ ا جـ ب)

، ∵ ل هـ مماس للدائرة.

∴ ق(∠ ل ا ب) المماسية = ق(∠ ا جـ ب) المحيطية

∴ ق(∠ ل ا ب) = ق(∠ ا ب جـ) (المطلوب أولاً)

، ∵ ق(∠ ل ا ب) = ق(∠ ا ب جـ) وهما في وضع تبادل.

∴ ب جـ // ل هـ

∴ ق(∠ ب هـ ا) = ق(∠ جـ ب هـ) (بالتبادل)

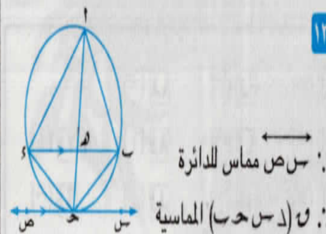
، ق(∠ جـ ا د) = ق(∠ جـ ب د) (محيطيتان مشتركتان في ⌒جـ د)

∴ ق(∠ د هـ ا) = ق(∠ جـ ا د)

∴ ا جـ مماس للدائرة المارة برؤوس △ ا د هـ

(المطلوب ثانياً)

13



∵ س ص مماس للدائرة

∴ ق(∠ س جـ ب) المماسية

= ق(∠ ب ا جـ) المحيطية (1)

، ∵ س ص // ب د ، ب جـ قاطع لهما

∴ ق(∠ س جـ ب) = ق(∠ جـ ب د) (بالتبادل) (2)

، ∵ ق(∠ جـ ب د) = ق(∠ جـ ا د) (3)

(محيطيتان مشتركتان في ⌒جـ د)

من (1) ، (2) ، (3) :

∴ ق(∠ ب ا جـ) = ق(∠ جـ ا د)

∴ ا جـ ينصف ∠ ب ا د (المطلوب أولاً)

ومن (1) ، (2) ينتج أن :

ق(∠ ب ا هـ) = ق(∠ جـ ب هـ)

∴ ب جـ يمس الدائرة المارة برؤوس △ ا ب هـ

(المطلوب ثانياً)

14

∵ ا د مماس للدائرة عند ا

∴ ق(∠ د ا جـ) المماسية

= ق(∠ ب) المحيطية

، ∵ س ص // ب جـ ، ا ب قاطع لهما

∴ ق(∠ ا س ص) = ق(∠ ب) (بالتناظر)

∴ ق(∠ د ا جـ) = ق(∠ ا س ص)

∴ ا د مماس للدائرة المارة بالنقط ا ، س ، ص

(وهو المطلوب)

15

∵ ا ب قطر في الدائرة.

∴ ق(∠ ا جـ ب) = 90°

∴ ق(∠ 1) + ق(∠ 2)

= 90° (1)

، ∵ ب د مماس للدائرة عند ب

∴ ا ب ⊥ ب د

∴ ق(∠ 1) + ق(∠ 3) = 90° (2)

من (1) ، (2) : ∴ ق(∠ 2) = ق(∠ 3)

∴ ا ب مماس للدائرة المارة برؤوس △ جـ ب د

(المطلوب أولاً)

في △ ا ب د : ∵ ق(∠ ا ب د) = 90°

∴ ا د = $\sqrt{(ا ب)^2 + (ب د)^2}$ = $\sqrt{64 + 36}$

= $\sqrt{100}$ = 10 سم

∵ ب جـ ⊥ ا د

∴ ب جـ = $\frac{ا ب \times ب د}{ا د}$ = $\frac{8 \times 6}{10}$ = 4.8 سم

(المطلوب ثانياً)

16

∵ ا ل ، ا جـ مماسان للدائرة م

∴ ا ل = ا جـ = 7 سم (المطلوب أولاً)

∴ في △ ا ل جـ :

ق(∠ ا ل جـ) = ق(∠ ا جـ ل)

، ∵ ق(∠ ل ا جـ) = 90°

∴ ق(∠ ا جـ ل) = $\frac{180° - 90°}{2}$ = 45°

، ∵ ا م ينصف ∠ ل ا جـ

∴ ق(∠ ل ا م) = 45°

∴ ق(∠ ل ا ن) = ق(∠ ا جـ ل) = 45°

∴ ا ل مماس للدائرة المارة برءوس △ ا ن جـ

(المطلوب ثانياً)

17

∵ الشكل د ب جـ و رباعي دائري.

∴ ق(∠ ا و جـ) الخارجة = ق(∠ ب) (1)

، ∵ ا س // جـ و ، ا و قاطع لهما.

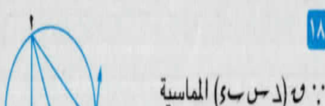
∴ ق(∠ س ا و) = ق(∠ ا و جـ) (بالتبادل) (2)

من (1) ، (2) : ∴ ق(∠ ب) = ق(∠ س ا د)

∴ ا س مماس للدائرة المارة برؤوس △ ا ب د

(وهو المطلوب)

18



∵ ق(∠ س ب د) المماسية

= ق(∠ ب ا د) المحيطية (1)

، ∵ ق(⌒ب د) = ق(⌒جـ د)

∴ ق(∠ ب ا د) = ق(∠ د ا جـ)

∴ ق(∠ س ب ص) = ق(∠ س ا ص)

وهما مرسومتان على س ص وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل ا ب س ص رباعي دائري (المطلوب أولاً)

∴ ق(∠ ب ص س) = ق(∠ ب ا س)

مرسومتان على ب س وفي جهة واحدة منها

، ∵ ق(∠ ب ا س) = ق(∠ س ا ص)

∴ ق(∠ ب ص س) = ق(∠ س ا ص)

∴ س ص مماس للدائرة الخارجة للمثلث ا د ص

(المطلوب ثانياً)

19

∵ △ ا ب جـ متساوي الأضلاع

∴ ق(∠ ا جـ ب) = 60°

، ∵ △ د جـ هـ متساوي الأضلاع

∴ ق(∠ جـ د هـ) = 60°

∴ ق(∠ ا جـ ب) = ق(∠ جـ د هـ)

∴ ا جـ مماسة للدائرة المارة برؤوس △ جـ هـ د

(المطلوب أولاً)

، ∵ △ ا ب جـ متساوي الأضلاع

، هـ منتصف ب جـ

∴ ا هـ ⊥ ب جـ ∴ ق(∠ جـ هـ و) = 90° (1)

، ∵ هـ منتصف ب جـ

∴ هـ د متوسط في △ ب جـ د

، ∵ هـ د = $\frac{1}{2}$ ب جـ

∴ ق(∠ ب د جـ) = 90° (2)

من (1) ، (2) :

∴ ق(∠ جـ هـ و) + ق(∠ ب د جـ) = 180°

∴ الشكل حـ ء و هـ رباعى دائرى (المطلوب ثانيًا)

، ∵ ق (∠ حـ هـ و) = ٩٠°

∴ منتصف و حـ هو مركز الدائرة المارة برؤوس الشكل حـ ء و هـ (المطلوب ثالثًا)

٢٠

∵ أء ، أحـ قطعتان مماستان للدائرة م

∴ أء = أحـ

، ∵ أحـ ، أب قطعتان مماستان للدائرة ن

∴ أحـ = أب

∴ أء = أحـ = أب (المطلوب أولًا)

∴ أب = أء = ٥ سم

، ∵ م ء + ن ب = م ن = ٦ سم

∴ محيط الشكل أ ب ن م ء = ٥ + ٥ + ٦ + ٦

= ٢٢ سم (المطلوب ثانيًا)

، ∵ أحـ ، أب قطعتان مماستان للدائرة ن

∴ ن أ ينصف ∠ حـ ن ب (المطلوب ثالثًا)

∴ ق (∠ أ ن حـ) = ١١٠° / ٢ = ٥٥°

∴ ق (∠ أ ن حـ) = ق (∠ ء أ حـ) = ٥٥°

∴ أء مماسة للدائرة المارة برؤوس المثلث أ حـ ن (المطلوب رابعًا)

٢١

∵ أب = ب حـ

∴ ق (∠ ب أ حـ) = ق (∠ ب حـ أ)

، ∵ ب س مماس للدائرة م

∴ ق (∠ س ب حـ) المماسية = ق (∠ ب أ حـ) المحيطية

∴ ق (∠ س ب حـ) = ق (∠ ب حـ أ) وهما فى وضع تبادل

∴ ب س // حـ هـ (المطلوب أولًا)

، ∵ ق (∠ ص ب ء) المماسية = ق (∠ ء حـ ب) المحيطية

، ق (∠ ص ب هـ) = ق (∠ ء هـ) (بالتبادل)

∴ ق (∠ ء حـ ب) = ق (∠ ء هـ)

∴ ب حـ مماس للدائرة المارة بالنقط حـ ، ء ، هـ (المطلوب ثانيًا)

للمتفوقين

١

العمل : نرسم أب

البرهان :

∵ ق (∠ ء أ ب) المماسية = ق (∠ حـ) المحيطية

، ق (∠ ء أ ب) = ق (∠ ء هـ ب)

(محيطيتان مشتركتان فى ⌒ب ء)

∴ ق (∠ ء هـ ب) = ق (∠ حـ) وهما وضع تبادل.

∴ أحـ // ء هـ (وهو المطلوب)

٢

∵ ب حـ = ب هـ

∴ ق (⌒ب حـ) = ق (⌒ب هـ)

، ∵ ق (∠ أ) = ½ [ق (⌒ب حـ) - ق (⌒ء هـ)]

= ½ [ق (⌒ب هـ) - ق (⌒ء هـ)]

= ½ ق (⌒ب ء)

، ∵ ق (∠ ء هـ ب) المحيطية = ½ ق (⌒ب ء)

∴ ق (∠ أ) = ق (∠ ء هـ ب)

∴ ب هـ مماسة للدائرة المارة برؤوس Δ أ ء هـ

(وهو المطلوب)

إجابات مفاهيم ومهارات أساسية تراكمية

١ (جـ)	٢ (أ)	٣ (جـ)	٤ (ب)
٥ (ب)	٦ (ب)	٧ (جـ)	٨ (د)
٩ (جـ)	١٠ (أ)	١١ (ب)	١٢ (د)
١٣ (جـ)	١٤ (جـ)	١٥ (د)	١٦ (ب)
١٧ (جـ)	١٨ (ب)	١٩ (ب)	٢٠ (ب)
٢١ (جـ)	٢٢ (د)	٢٣ (أ)	٢٤ (ب)
٢٥ (جـ)	٢٦ (ب)	٢٧ (أ)	٢٨ (أ)
٢٩ (د)	٣٠ (ب)	٣١ (جـ)	

إجابات الجزء الخاص

بالتقويـــم المستمـــر

فى الجبـــر والاحتمـــال



إجابات الاختبارات التراكمية فى الجبر والاحتمال

اختبار تراكمى ١

١ ١ (أ)　٢ (جـ)　٣ (ب)
٤ (د)　٥ (د)　٦ (د)

٢ أ = -٢ ، ب = -١

٣ ٤٥ $سم^{٢}$

اختبار تراكمى ٢

١ ١ (جـ)　٢ (جـ)　٣ (ب)
٤ (ب)　٥ (جـ)　٦ (ب)

٢ ١ م . ح = {٠,٢٣ ، ١,٤٣}
٢ م . ح = {٠,٤٤ ، ٤,٥٦}

٣ مثل بنفسك ، م . ح = {(١ ، ٢)}

اختبار تراكمى ٣

١ ١ (جـ)　٢ (ب)　٣ (أ)
٤ (ب)　٥ (ب)　٦ (جـ)

٢ م . ح = {(٣ ، ٢)}

٣ م . ح = {-٦,٢ ، ٦,٤}

اختبار تراكمى ٤

١ ١ (جـ)　٢ (د)　٣ (ب)
٤ (ب)　٥ (أ)　٦ (أ)

٢ (أ) أ = ١ ، ب = -٨
(ب) أ = -٥٠

٣ العدد هو ٢٤

اختبار تراكمى ٥

١ ١ (د)　٢ (جـ)　٣ (جـ)
٤ (أ)　٥ (أ)　٦ (ب)

٢ م = ٦ ، حـ = ٣

٣ م . ح = {-١,٦٥ ، ٣,٦٥}

اختبار تراكمى ٦

١ ١ (د)　٢ (ب)　٣ (أ)
٤ (جـ)　٥ (أ)　٦ (د)

٢ (أ) المجال المشترك = ع - {-٤ ، ٠ ، ٤}
(ب) أثبت بنفسك.

٣ م . ح = {(١ ، -٢)}

اختبار تراكمى ٧

١ ١ (ب)　٢ (د)　٣ (ب)
٤ (جـ)　٥ (أ)　٦ (د)

٢ (أ) م . ح = {(١ ، ١)}
(ب) مجال ن = ع - {١ ، -١ ، ٥}
، ن (س) = ١

٣ (أ) مجال ن = ع - {٢ ، ١ ، -٢}
، ن (س) = ٢
(ب) $ن_{١} \neq ن_{٢}$ ، اذكر بنفسك.

اختبار تراكمى ٨

١ ١ (د)　٢ (ب)　٣ (جـ)
٤ (د)　٥ (جـ)　٦ (ب)

٢ (أ) ١ مجال $ن^{-١}$ = ع - {٠ ، ٢}
، $ن^{-١}(س) = \frac{١}{س}$
٢ ٣

(ب) مجال ن = ع - {٣ ، ٤ ، ٠}
، $ن(س) = \frac{١}{س}$
، ن (٤) غير معرفة

٣ (أ) مجال ن = ع - {٢ ، -٢ ، ٠ ، -١}
، ن (س) = ٣
(ب) م . ح = {(١ ، ٣) ، (٣ ، ١)}

اختبار تراكمى ٩

١ ١ (أ)　٢ (أ)　٣ (د)
٤ (د)　٥ (ب)　٦ (ب)

٢ ١ $\frac{١}{٤}$　٢ $\frac{٧}{١٢}$

٣ مجال ن = ع - {-٣ ، -١ ، ١}
، ن (س) = ١

اختبار تراكمى ١٠

١ ١ (د)　٢ (ب)　٣ (ب)
٤ (د)　٥ (أ)　٦ (د)

٢ ١ ٠,٤　٢ ٠,٨　٣ ٠,٢

٣ (أ) ١ صفر　٢ $\frac{٤}{٥}$　٣ $\frac{٣}{٥}$
(ب) العدد هو : ٢٣

إجابات الأسئلة الهامة فى الجبر والاحتمال

الوحدة الأولى

أولًا إجابات أسئلة الاختيار من متعدد

١ (ب)	٢ (د)	٣ (أ)	٤ (ب)
٥ (ب)	٦ (ب)	٧ (د)	٨ (جـ)
٩ (ب)	١٠ (د)	١١ (جـ)	١٢ (جـ)
١٣ (د)	١٤ (ب)	١٥ (أ)	١٦ (أ)
١٧ (د)	١٨ (ب)	١٩ (د)	٢٠ (جـ)
٢١ (جـ)	٢٢ (ب)	٢٣ (ب)	٢٤ (ب)
٢٥ (د)	٢٦ (د)	٢٧ (جـ)	٢٨ (أ)

ثانيًا إجابات الأسئلة المقالية

١

١ م . ح = {(٣ ، -١)}

٢ م . ح = {(٢ ، ٢)}

٣ م . ح = {(٢ ، ١)}

٤ م . ح = {(٢ ، ١)}

٥ م . ح = {(-١ ، ١)}

٢

١ ارسم بنفسك ، م . ح = {(٢ ، ١)}

٢ ارسم بنفسك ، م . ح = {(٢ ، ١)}

٣ ارسم بنفسك ، م . ح = {(-١ ، ٣)}

٤ ارسم بنفسك ، م . ح = {(٢ ، -٣)}

٥ ارسم بنفسك ، م . ح = {(-١ ، ١)}

٣

١ م . ح = {(٨ ، ٣)}

٢ م . ح = {(٣ ، -١)}

٣ م . ح = {(٢ ، -١)}

٤ م . ح = {(-١ ، ٣)}

٥ م . ح = {(٣ ، ٤)}

٦ م . ح = {(٣ ، -١)}

٧ م . ح = {(-١ ، ١)}

٤

١ م . ح = {٠,٨ ، -٣,٨}

٢ م . ح = {٢,٨٢ ، ٠,١٨}

٣ م . ح = {١,٤٣ ، ٠,٢٣}

٤ م . ح = {٠,٣ ، -٣,٣}

٥ م . ح = {-٠,٣٨ ، -٢,٦٢}

٦ م . ح = {٤,٣٠ ، ٠,٧٠}

٧ م . ح = {٢,٦٢ ، ٠,٣٨}

٨ م . ح = {-٠,٧٨ ، ١,٢٨}

٩ م . ح = {-١ + $\sqrt{٥}$ ، -١ - $\sqrt{٥}$}

٥

١ م . ح = {(٣ ، ٤) ، (٣ ، -٤)}

٢ م . ح = {(٤ ، ٤) ، (-٤ ، -٤)}

٣ م . ح = {(-١ ، -٦) ، (٣ ، ٢)}

٤ م . ح = {(٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢)}

٥ م . ح = {(٢ ، ٠) ، (٣ ، ١)}

٦ م . ح = {(٠ ، -١)}

٧ م . ح = {(-٢ ، ٠) ، (١ ، ٣)}

٨ م . ح = {(٣ ، ٣) ، (-٣ ، -٣)}

٩ م . ح = {(٠ ، -$\frac{١}{٢}$) ، (-١ ، -١)}

٦ أ = ٥ ، ب = -٢

٧ أ = ٧ ، ب = -٦

٨ أ = ٢ ، ب = ١

٩ أ = ١ ، ب = -١

١٠ أ = ٧ ، ب = ٤

١١ العددان هما : ٢٥ ، ١٥

١٢ قياسا الزاويتين هما : ٣٦° ، ١٤٤°

١٣ العددان هما : ٥ ، ٧

١٤ العدد هو : ٤٧

١٥ العددان هما : ١ ، ٥

١٦ الطول = ٧ سم ، العرض = ٢ سم

١٧ العددان هما : -٢ ، -٥ أ، ٥ ، ٢

١٨ العددان هما : ٤ ، ٣

١٩ بعدا المستطيل هما : ٦ سم ، ٣ سم

٢٠ المحيط = ٢٢ سم

الوحدة الثانية

أولًا إجابات أسئلة الاختيار من متعدد

١ (أ)	٢ (ب)	٣ (أ)	٤ (د)
٥ (جـ)	٦ (أ)	٧ (جـ)	٨ (أ)
٩ (جـ)	١٠ (أ)	١١ (د)	١٢ (جـ)
١٣ (جـ)	١٤ (جـ)	١٥ (جـ)	١٦ (أ)
١٧ (ب)	١٨ (د)	١٩ (د)	٢٠ (أ)
٢١ (جـ)	٢٢ (جـ)	٢٣ (جـ)	٢٤ (د)
٢٥ (د)	٢٦ (د)	٢٧ (أ)	٢٨ (جـ)
٢٩ (ب)	٣٠ (أ)	٣١ (أ)	٣٢ (ب)
٣٣ (جـ)	٣٤ (د)	٣٥ (جـ)	٣٦ (جـ)
٣٧ (جـ)	٣٨ (ب)	٣٩ (د)	٤٠ (د)

ثانيًا إجابات الأسئلة المقالية

١ أثبت بنفسك.

٢ -٩

٣ أ = -١ ، ب = صفر

٤ أ = ٢ ، ب = ٦

٥ ٦

٦ أ = ٦ ، ب = -٢

٧ مجال ن = ح - {٠} ، ن (س) = $\frac{١}{٤}$

٨ ٣

٩ مجال ن = ح ، ن (صفر) = -١ ، ن (٢) = $\frac{٣}{٥}$

١٠ المجال المشترك = ح - {٢ ، ٣ ، ٠ ، -٣}

١١ أثبت بنفسك

، المجال المشترك = ح - {-١ ، -٤}

١٢ أثبت بنفسك.

١٣ $ن_١ \neq ن_٢$ ، اذكر بنفسك

١٤ $ن_١ \neq ن_٢$ ، اذكر بنفسك

١٥ مجال ن = ح - {٢ ، ٥} ، ن (س) = $\frac{٢}{س - ٢}$

١٦ مجال ن = ح - {-١ ، ٢ ، ١}
، ن (س) = $\frac{٢}{س - ٢}$

١٧ مجال ن = ح - {٤ ، -٤ ، -٢}
، ن (س) = $\frac{س + ٤}{س - ٤}$

١٨ مجال ن = ح - {-١ ، ٠ ، ١}
، ن (س) = $\frac{س}{س - ١}$

١٩ ن (س) = $\frac{٣}{س + ٢}$ ، ن (٣) غير معرفة

٢٠ مجال ن = ح - {-٣} ، ن (س) = ١
ن (-٣) غير معرفة ، ن (٢٠١٦) = ١

٢١ أ = -٤ ، ب = ٢١

٢٢ أ = ٤ ، ب = ١٥

٢٣ أ = ٥ ، ب = ٣

٢٤ مجال ن = ح - {٠ ، ٢ ، -٢}
، ن (س) = $\frac{٣}{س + ٢}$

٢٥ مجال ن = ح - {-١ ، -٢ ، ١} ، ن (س) = ١

٢٦ مجال ن = ح - {٢ ، ٣ ، -٣}
، ن (س) = $\frac{٥}{س - ٣}$

٢٧ مجال ن = ح - {-٢ ، ٢ ، ٣}
، ن (س) = ١

٢٨ مجال ن = ح - {٢ ، -٢ ، ١}
، ن (س) = $\frac{٣}{س - ١}$

٢٩ مجال ن = ح - {-١ ، ١ ، ٠ ، -٣}
، ن (س) = $\frac{س - ٤}{س + ٣}$

٣٠ مجال ن = ح - {٢ ، -١ ، -$\frac{١}{٣}$ ، -٥}
، ن (س) = $\frac{١}{٣س + ١}$

٣١ مجال ن = ح - {٢ ، ٣ ، -٣}
، ن (س) = ١ ، ن (٠) = ١

٣٢ مجال ن = ح - {-١} ، ن (س) = $\frac{٢ (س - ١)}{س + ١}$
، ن (١) = ٠ ، ن (-١) غير معرفة

٣٣ مجال ن = ح - {٣ ، -٣ ، ٠} ، ن (س) = $\frac{١}{٢}$

٣٤ مجال ن = ح - {-٣ ، ٣ ، ٥}
، ن (س) = $\frac{س - ٣}{٢}$

٣٥ مجال ن = ح - {$\frac{-٣}{٢}$ ، ٢ ، $\frac{٣}{٢}$ ، ٠}
، ن (س) = $\frac{س - ٣}{س - ٢}$

٣٦ مجال ن = ح - {١ ، ٥ ، ٠ ، $\frac{-١}{٢}$ ، ٣}
، ن (س) = $\frac{(س - ٢) (٢س + ١) (س - ٣)}{س (س - ١) (س - ٥)}$
، ن (١) غير معرفة ، ن (٠) غير معرفة

٣٧ ① مجال $ن^{-١}$ = ح - {-٣ ، ٠}
، $ن^{-١}$ (س) = $\frac{س + ٣}{س}$
② س = ١

٣٨ ① مجال $ن^{-١}$ = ح - {-١ ، ٢}
② $ن^{-١}$ (٣) = ٤

٣٩ هـ = ١

الوحدة الثالثة

أولًا إجابات أسئلة الاختيار من متعدد

١ (ب)	٢ (أ)	٣ (جـ)	٤ (أ)
٥ (ب)	٦ (ب)	٧ (ب)	٨ (ب)
٩ (د)	١٠ (د)	١١ (أ)	١٢ (ب)
١٣ (أ)	١٤ (جـ)	١٥ (أ)	١٦ (أ)
١٧ (د)	١٨ (ب)	١٩ (د)	٢٠ (جـ)

ثانيًا إجابات الأسئلة المقالية

١ ٠,٢

٢ ① $\frac{١}{٦}$ ② $\frac{٥}{٦}$

٣ ① ٠,٧ ② ٠,٦

٤ $\frac{١}{٤}$

٥ $\frac{١}{٤}$

٦ ① $\frac{٣}{٤}$ ② $\frac{٢}{٣}$

٧ ① $\frac{١}{٤}$ ② $\frac{١}{٣}$

٨ ① $\frac{١٧}{٢٤}$ ② $\frac{٥}{٦}$

٩ ① $\frac{٥}{١٦}$ ② $\frac{٣}{٤}$

١٠ ① $\frac{٢}{٣}$ ② $\frac{٥}{٦}$

١١ ① ٠,٤ ② ٠,٨ ③ ٠,٢

١٢ ① $\frac{٣}{٤}$ ② أثبت بنفسك.

١٣ ① ٠,٨ ② ٠,٣ ③ ٠,٤

١٤ ① $\frac{١٣}{٢٤}$ ② $\frac{١}{٨}$

١٥ ① $\frac{١}{٢}$ ② $\frac{١}{٣}$

١٦ ① $\frac{٣}{٤}$ ② $\frac{١}{١٠}$ ③ $\frac{١٧}{٢٠}$

١٧ ① $\frac{١}{٢}$ ② $\frac{٥}{٦}$

١٨ ① $\frac{٤}{٧}$ ، $\frac{٣}{٧}$ ② ١

١٩ ① $\frac{٢}{٣}$ ② $\frac{٥}{٦}$

٢٠ ① ٠,٣ ② ٠,٣ ③ ٠,٩

إجابات نماذج امتحانات الكتاب المدرسى فى الجبر والاحتمال

نموذج ١

١
١ (ب) ٢ (أ) ٣ (د)
٤ (جـ) ٥ (ب) ٦ (أ)

٢ (أ) م.ح = {٢,٠ ، ٣,٢}

(ب) المجال = ح - {٣ ، ٤ ، ٠}

، ن (س) = $\frac{١}{\text{س}}$

٣ (أ) م.ح = {(-٣ ، -٣) ، (٣ ، ٣)}

(ب) مجال ن = ح - {٣ ، -٣}

، ن (س) = $\frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ٣}$

، ن (٢) = -٣ ، ن (-٣) غير معرفة.

٤ (أ) مساحة المستطيل = ٤٥ سم^٢

(ب) ١ $\text{ن}^{-١}$ (س) = $\frac{\text{س} - ١}{\text{س}}$

، مجال $\text{ن}^{-١}$ = ح - {٠ ، ٢ ، ١}

٢ س = $-\frac{١}{٢}$

٥ (أ) أثبت بنفسك.

(ب) ١ $\frac{١}{٢}$ ٢ $\frac{١}{٦}$ ٣ $\frac{١}{٢}$

نموذج ٢

١
١ (أ) ٢ (د) ٣ (أ)
٤ (ب) ٥ (جـ)

٢ (أ) م.ح = {١,٤٣ ، ٠,٢٣}

(ب) ن (س) = ١ ، مجال ن = ح - {٢ ، -٣}

٣ (أ) م.ح = {(-٣ ، -٤) ، (٤ ، ٣)}

(ب) ١ ل (أ ∪ ب) = ٠,٧

٢ ل (أ - ب) = ٠,١

٤ (أ) س = ٢ ، ص = ١

(ب) ن (س) = $\frac{\text{س} + ٢}{٢ (\text{س} - ٣)}$

، مجال ن = ح - {٣ ، -٣ ، ٠}

٥ (أ) ن (س) = $\frac{\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ٣}{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٣)}$

، مجال ن = ح - {-٢ ، ٢ ، ٣}

(ب) ارسم بنفسك.

ومن الرسم : م.ح = {-١ ، ١}

إجابة امتحان الطلاب المدمجين

١
١ صفر ٢ $\frac{١}{\text{س} - ٢}$ ٣ $\frac{٢}{٣}$
٤ الثانية ٥ الثانى ٦ {٥}

٢
١ (أ) ٢ (ب) ٣ (جـ)
٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (أ)

٣
١ ✗ ٢ ✗ ٣ ✓
٤ ✓ ٥ ✗ ٦ ✓

٤
١ {(٢ ، ١)} ٢ $\frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^٢ - ٤\text{أ}\text{حـ}}}{٢\text{أ}}$
٣ ح - {١ ، -١} ٤ $\frac{\text{س}}{\text{س}^٢ + ٤}$
٥ {٥} ٦ $\frac{١}{٢}$

إجابات امتحانات المحافظات فى الجبر والاحتمال

١ محافظة القاهرة

المجموعة الأولى

١ (جـ) ٢ (د) ٣ (أ)
٤ (ب) ٥ (ب) ٦ (جـ)
٧ (د) ٨ (أ) ٩ (جـ)

المجموعة الثانية

١٠ ∵ ٢س - ص = ٣ (١)

، س + ص = ٩ (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∵ ٣س = ١٢ ∴ س = ٤

بالتعويض فى (٢) : ∴ ص = ٥

∴ م.ح = {(٤ ، ٥)}

١١ ∵ س - ص = ٢ ∴ س = ٢ + ص (١)

، ∵ س ص = ٢٤ (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ (٢ + ص) × ص = ٢٤

∴ ص^٢ + ٢ ص - ٢٤ = ٠

∴ (ص - ٤) (ص + ٦) = ٠

∴ ص = ٤ أ، ص = -٦ (مرفوض)

بالتعويض فى (١) : ∴ س = ٦

∴ العددان هما : ٦ ، ٤

١٢ ∵ $\text{ن}_١$ (س) = $\frac{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)}{\text{س} + ٣}$

∴ مجال $\text{ن}_١$ = ح - {-٣}

، $\text{ن}_١$ (س) = س - ٣

، ∵ $\text{ن}_٢$ (س) = $\frac{٢ (\text{س} - ٣)}{٢}$

∴ مجال $\text{ن}_٢$ = ح ، $\text{ن}_٢$ (س) = س - ٣

∴ $\text{ن}_١$ (س) = $\text{ن}_٢$ (س)

لجميع قيم س ∈ ح - {-٣}

١٣ ∵ ن (س) = $\frac{١}{\text{س} + ٢} + \frac{\text{س} + ٢}{(\text{س} + ٢)^٢}$

∴ مجال ن = ح - {-٢}

، ن (س) = $\frac{١}{\text{س} + ٢} + \frac{١}{\text{س} + ٢} = \frac{٢}{\text{س} + ٢}$

١٤ ∵ أ = ٣ ، ب = -٥ ، حـ = ١

∴ س = $\frac{٥ \pm \sqrt{(-٥)^٢ - ٤ \times ٣ \times ١}}{٢ \times ٣} = \frac{٥ \pm \sqrt{١٣}}{٦}$

∴ س ≃ ١,٤ أ، س ≃ ٠,٢

∴ م.ح = {١,٤ ، ٠,٢}

١٥ ∵ ن (س) = $\frac{(\text{س} + ٣)(\text{س} - ٢)}{(\text{س} - ٢)(\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ٤)} \times \frac{\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ٤}{\text{س} + ٣}$

∴ مجال ن = ح - {٢ ، -٣}

، ن (س) = ١

١٦ ① ل (أ ∩ بَ) = ١ - ل (أ ∩ ب)

= ١ - $\frac{١}{٣}$ = $\frac{٢}{٣}$

② ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) - ل (أ ∩ ب)

= $\frac{١}{٢} + \frac{٢}{٣} - \frac{١}{٣} = \frac{٥}{٦}$

٢ محافظة الجيزة

المجموعة الأولى

١ (د) ٢ (أ) ٣ (جـ)
٤ (ب) ٥ (أ) ٦ (ب)
٧ (ب) ٨ (د) ٩ (جـ)

المجموعة الثانية

١٠ ∵ ن (س) = $\frac{\text{س} + ٢}{\text{س}^٢ + ٣\text{س} + ٢} + \frac{\text{س}^٢ - \text{س}}{\text{س}^٢ - ١}$

= $\frac{\text{س} + ٢}{(\text{س} + ٢)(\text{س} + ١)}$

+ $\frac{\text{س} (\text{س} - ١)}{(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)}$

∴ مجال ن = ح - {-٢ ، -١ ، ١}

، ن (س) = $\frac{١}{\text{س} + ١} + \frac{\text{س}}{\text{س} + ١} = \frac{\text{س} + ١}{\text{س} + ١} = ١$

[١١] ∵ س − ص = ٠ ∴ س = ص (١)

، ∵ س ص = ١٦ (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ $س^٢ = ١٦$ ∴ س = ٤ أ، س = −٤

بالتعويض فى (١) :

∴ ص = ٤ أ، ص = −٤

∴ م.ح = {(٤ ، ٤) ، (−٤ ، −٤)}

[١٢] ∵ أ = ١ ، ب = −٦ ، جـ = ٤

∴ $س = \frac{٦ \pm \sqrt{(-٦)^٢ - ٤ \times ١ \times ٤}}{٢ \times ١} = \frac{٦ \pm ٢\sqrt{٥}}{٢}$

$= ٣ \pm \sqrt{٥}$

∴ س ≃ ٥,٢ أ، س ≃ ٠,٨

∴ م.ح = {٥,٢ ، ٠,٨}

[١٣] ① ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

= ٠,٧ + ٠,٥ − ٠,٣ = ٠,٩

② ل (أ − ب) = ل (أ) − ل (أ ∩ ب)

= ٠,٥ − ٠,٣ = ٠,٢

[١٤] ∵ $ن_١ (س) = \frac{٥ س}{٥ (س + ٥)}$

∴ مجال $ن_١$ = ح − {−٥}
، $ن_١ (س) = \frac{س}{س + ٥}$ (١)

، ∵ $ن_٢ (س) = \frac{س (س + ٥)}{(س + ٥)^٢}$

∴ مجال $ن_٢$ = ح − {−٥}
، $ن_٢ (س) = \frac{س}{س + ٥}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $ن_١ = ن_٢$

[١٥] ∵ $ن (س) = \frac{(س - ٢)(س^٢ + ٢ س + ٤)}{(س + ٣)(س - ٢)}$

$\times \frac{٢ (س + ٣)}{س^٢ + ٢ س + ٤}$

∴ مجال ن = ح − {−٣ ، ٢}

، ن (س) = ٢

[١٦] ∵ ٣ س + ٢ ص = ٤ (١)

، س − ٣ ص = ٥

∴ س = ٥ + ٣ ص (٢)

بالتعويض من (٢) فى (١) :

∴ ٣ (٥ + ٣ ص) + ٢ ص = ٤

∴ ١٥ + ٩ ص + ٢ ص = ٤

∴ ١١ ص = −١١

∴ ص = −١

بالتعويض فى (٢) :

∴ س = ٢

∴ م.ح = {(٢ ، −١)}

٣ محافظة الإسكندرية

[١] (جـ) [٢] (ب) [٣] (أ)

[٤] ∵ س + ص = ٧ (١) ، س − ص = ٣ (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ ٢ س = ١٠

∴ س = ٥

بالتعويض فى (١) : ∴ ص = ٢

∴ م.ح = {(٥ ، ٢)}

[٥] (د) [٦] (ب) [٧] (أ)

[٨] ∵ أ = ١ ، ب = −٥ ، جـ = ٢

∴ $س = \frac{٥ \pm \sqrt{(-٥)^٢ - ٤ \times ١ \times ٢}}{٢ \times ١}$

$= \frac{٥ \pm \sqrt{١٧}}{٢} = \frac{٥ \pm ٤,١٢}{٢}$

∴ س = ٤,٥٦ أ، س = ٠,٤٤

∴ م.ح = {٤,٥٦ ، ٠,٤٤}

[٩] (ب) [١٠] (ب) [١١] (أ)

[١٢] ∵ $ن (س) = \frac{س (س + ٤)}{(س - ٤)(س + ٤)}$

$+ \frac{س - ٣}{(س - ٣)(س - ٤)}$

∴ مجال ن = ح − {٤ ، −٤ ، ٣}

، $ن (س) = \frac{س}{س - ٤} + \frac{١}{س - ٤} = \frac{س + ١}{س - ٤}$

[١٣] ∵ $ن_١ (س) = \frac{س^٢}{س (س - ١)}$

∴ مجال $ن_١$ = ح − {٠ ، ١}
، $ن_١ (س) = \frac{س}{س - ١}$ (١)

، ∵ $ن_٢ (س) = \frac{س^٢ (س - ١)}{س (س - ١)^٢}$

∴ مجال $ن_٢$ = ح − {٠ ، ١}
، $ن_٢ (س) = \frac{س}{س - ١}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $ن_١ = ن_٢$

[١٤] ∵ $ن (س) = \frac{س - ٥}{(س - ٥)(س + ٣)} \div \frac{٨}{٢ (س + ٣)}$

∴ مجال ن = ح − {٥ ، −٣}

، $ن (س) = \frac{١}{س + ٣} \times \frac{س + ٣}{٤} = \frac{١}{٤}$

[١٥] ∵ $ن (س) = \frac{٣ (س - ٣)}{(س - ٣)(س - ٢)}$

∴ $ن^{-١} (س) = \frac{(س - ٣)(س - ٢)}{٣ (س - ٣)}$

∴ مجال $ن^{-١}$ = ح − {٣ ، ٢}

، $ن^{-١} (س) = \frac{س - ٢}{٣}$

، $ن^{-١}$ (٣) غير معرفة لأن ٣ ∉ مجال $ن^{-١}$

[١٦] ① ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

= ٠,٤ + ٠,٥ − ٠,٢ = ٠,٧

② احتمال عدم وقوع أ = ل (أ́) = ١ − ل (أ)

= ١ − ٠,٤ = ٠,٦

٤ محافظة القليوبية

المجموعة الأولى

[١] (أ) [٢] (جـ) [٣] (ب)

[٤] (جـ) [٥] (د) [٦] (أ)

[٧] (أ) [٨] (د) [٩] (أ)

المجموعة الثانية

[١٠] ∵ س + ٢ ص = ٥

∴ س = ٥ − ٢ ص (١)

، ∵ ٢ س + ص = ١ (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ ٢ (٥ − ٢ ص) + ص = ١

∴ ١٠ − ٤ ص + ص = ١ ∴ ١٠ − ٣ ص = ١

∴ −٣ ص = −٩ ∴ ص = ٣

بالتعويض فى (١) : ∴ س = −١

∴ م.ح = {(−١ ، ٣)}

[١١] ∵ أ = ٢ ، ب = −٦ ، جـ = ١

∴ $س = \frac{٦ \pm \sqrt{(-٦)^٢ - ٤ \times ٢ \times ١}}{٢ \times ٢}$

$= \frac{٦ \pm ٢\sqrt{٧}}{٤} = \frac{٣ \pm \sqrt{٧}}{٢}$

∴ س ≃ ٢,٨٢ أ، س ≃ ٠,١٨

∴ م.ح = {٢,٨٢ ، ٠,١٨}

[١٢] ∵ س = ٢ ص (١)

، $س^٢ + ص^٢ = ٢٠$ (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ $(٢ ص)^٢ + ص^٢ = ٢٠$

∴ $٤ ص^٢ + ص^٢ = ٢٠$

∴ $٥ ص^٢ = ٢٠$ ∴ $ص^٢ = ٤$

∴ ص = ٢ أ، ص = −٢

بالتعويض فى (١) : ∴ س = ٤ أ، س = −٤

∴ م.ح = {(٤ ، ٢) ، (−٤ ، −٢)}

١٣ ∵ $ن_1(س) = \frac{٢}{٢(س + ٣)}$

∴ مجال $ن_1$ = ح − {−٣}
، $ن_1(س) = \frac{١}{س + ٣}$ (١)

، ∵ $ن_2(س) = \frac{س^٢ - ٣س + ٩}{(س + ٣)(س^٢ - ٣س + ٩)}$

∴ مجال $ن_2$ = ح − {−٣}
، $ن_2(س) = \frac{١}{س + ٣}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $ن_1 = ن_2$

١٤ ∵ $ن(س) = \frac{س(س + ٤)}{(س + ٤)(س - ٤)} + \frac{٤(س + ٢)}{(س - ٤)(س + ٢)}$

∴ مجال ن = ح − {−٤ ، ٤ ، −٢}

، $ن(س) = \frac{س}{س - ٤} + \frac{٤}{س - ٤} = \frac{س + ٤}{س - ٤}$

١٥ ∵ $ن(س) = \frac{س + ١}{س - ٢} \times \frac{(س + ٢)(س - ١)}{(س + ١)(س - ١)}$

∴ مجال ن = ح − {٢ ، −١ ، ١}

، $ن(س) = \frac{س + ٢}{س - ٢}$

١٦ ① ∵ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

∴ ٠,٩ = ٠,٥ + ٠,٦ − ل(أ ∩ ب)

∴ ل(أ ∩ ب) = ٠,٥ + ٠,٦ − ٠,٩ = ٠,٢

② ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب)

= ٠,٥ − ٠,٢ = ٠,٣

③ ل(أَ) + ل(بَ) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب)

+ ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

= ل(أ) + ل(ب) − ٢ ل(أ ∩ ب)

= ٠,٥ − ٠,٢ + ٠,٦ − ٠,٢ = ٠,٧

٥ محافظة الشرقية

السؤال الأول

(أ) ∵ $ن(س) = \frac{(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)}{(س - ٣)(س + ٣)}$

$\times \frac{س + ٣}{س^٢ + ٢س + ٤}$

∴ مجال ن = ح − {٣ ، −٣}

، $ن(س) = \frac{س - ٢}{س - ٣}$

(ب) ① ل(أ) = ١ − ل(أَ) = ١ − ٠,٤ = ٠,٦

② ∵ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

∴ ٠,٨ = ٠,٦ + ٠,٥ − ل(أ ∩ ب)

∴ ل(أ ∩ ب) = ٠,٦ + ٠,٥ − ٠,٨ = ٠,٣

السؤال الثانى

(أ) ① (د) ② (جـ) ③ (جـ)

(ب) ∵ أ = ٢ ، ب = −٤ ، جـ = ١

∴ $س = \frac{٤ \pm \sqrt{(-٤)^٢ - ٤ \times ٢ \times ١}}{٢ \times ٢}$

$= \frac{٤ \pm ٢\sqrt{٢}}{٤} = \frac{٢ \pm \sqrt{٢}}{٢}$

∴ س ≃ ١,٧١ أو س ≃ ٠,٢٩

∴ م.ح = {١,٧١ ، ٠,٢٩}

السؤال الثالث

(أ) ∵ $ن(س) = \frac{س^٢ - ٣س + ٢}{س^٢ - ٤} + \frac{س^٢ - ٣س}{س^٢ - س - ٦}$

$= \frac{(س - ٢)(س - ١)}{(س - ٢)(س + ٢)}$

$+ \frac{س(س - ٣)}{(س - ٣)(س + ٢)}$

∴ مجال ن = ح − {٢ ، −٢ ، ٣}

، $ن(س) = \frac{س - ١}{س + ٢} + \frac{س}{س + ٢} = \frac{٢س - ١}{س + ٢}$

(ب) ∵ س − ص = ٣ (١)

، ٢س + ص = ٦ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ ٣س = ٩ ∴ س = ٣

بالتعويض فى (١) : ∴ ص = ٠

∴ م.ح = {(٣ ، ٠)}

السؤال الرابع

(أ) ① (جـ) ② (أ) ③ (ب)

(ب) ∵ $ن_1(س) = \frac{٥س}{٥(س + ٢)}$

∴ مجال $ن_1$ = ح − {−٢}
، $ن_1(س) = \frac{س}{س + ٢}$ (١)

، ∵ $ن_2(س) = \frac{س(س + ٢)}{(س + ٢)^٢}$

∴ مجال $ن_2$ = ح − {−٢}
، $ن_2(س) = \frac{س}{س + ٢}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $ن_1 = ن_2$

السؤال الخامس

(أ) ① (جـ) ② (أ) ③ (ب)

(ب) ∵ س − ص = ١ ∴ س = ص + ١ (١)

، ∵ ص² + س = ٧ (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ ص² + ص + ١ = ٧

∴ ص² + ص − ٦ = ٠

∴ (ص + ٣)(ص − ٢) = ٠

∴ ص = −٣ أو ص = ٢

بالتعويض فى (١) :

∴ س = −٢ أو س = ٣

∴ م.ح = {(−٢ ، −٣) ، (٣ ، ٢)}

٦ محافظة المنوفية

السؤال الأول

(أ) ① (جـ) ② (د) ③ (د)

(ب) ∵ س − ص = ٧

∴ س = ص + ٧ (١)

، ∵ س ص = ١٨ (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ (ص + ٧) × ص = ١٨

∴ ص² + ٧ص − ١٨ = ٠

∴ (ص + ٩)(ص − ٢) = ٠

∴ ص = −٩ أو ص = ٢

بالتعويض فى (١) :

∴ س = −٢ أو س = ٩

∴ م.ح = {(−٢ ، −٩) ، (٩ ، ٢)}

السؤال الثانى

(أ) ① (أ) ② (ب) ③ (جـ)

(ب) ∵ $ن(س) = \frac{س^٢ + ٢س + ٤}{(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)}$

$+ \frac{(س + ٢)(س - ١)}{(س + ٢)(س - ٢)}$

∴ مجال ن = ح − {٢ ، −٢}

، $ن(س) = \frac{١}{س - ٢} + \frac{س - ١}{س - ٢} = \frac{س}{س - ٢}$

السؤال الثالث

(أ) ① (ب) ② (جـ) ③ (ب)

(ب) ∵ $ن_1(س) = \frac{٢س}{٢(س + ٤)}$

∴ مجال $ن_1$ = ح − {−٤}
، $ن_1(س) = \frac{س}{س + ٤}$ (١)

، ∵ $ن_2(س) = \frac{س(س + ٤)}{(س + ٤)^٢}$

∴ مجال ن$_{٢}$ = ح − {−٤}
، ن$_{٢}$(س) = س / (س + ٤)   (٢)
من (١) ، (٢) : ∴ ن$_{١}$ = ن$_{٢}$

السؤال الرابع

(أ) ① ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)
= ١/٢ + ١/٤ − ١/٨ = ٥/٨
② ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب)
= ١/٢ − ١/٨ = ٣/٨
③ ل(ب′) = ١ − ل(ب) = ١ − ١/٤ = ٣/٤

(ب) ∵ ن(س) = ٢س(س + ٢) / ((س + ٢)(س − ٢)) × (س − ٢) / (٢(س + ٣))
∴ مجال ن = ح − {−٢ ، ٢ ، −٣}
، ن(س) = س / (س + ٣)

السؤال الخامس

(أ) ∵ ٢س − ص = ٣   (١)
، س + ٢ص = ٤
∴ س = ٤ − ٢ص   (٢)
بالتعويض من (٢) في (١) :
∴ ٢(٤ − ٢ص) − ص = ٣
∴ ٨ − ٤ص − ص = ٣
∴ −٥ص = −٥   ∴ ص = ١
بالتعويض في (٢) : ∴ س = ٢
∴ م.ح = {(٢ ، ١)}

(ب) ∵ أ = ١ ، ب = −٢ ، حـ = −٤
∴ س = (٢ ± $\sqrt{(−٢)^{٢} − ٤ × ١ × −٤}$) / (٢ × ١)
= (٢ ± ٢$\sqrt{٥}$) / ٢ = ١ ± $\sqrt{٥}$
∴ س ≈ ٣,٢٤ أو س ≈ −١,٢٤
∴ م.ح = {٣,٢٤ ، −١,٢٤}

٧ محافظة الغربية

المجموعة الأولى

١ (د)   ٢ (جـ)   ٣ (ب)
٤ (أ)   ٥ (ب)   ٦ (جـ)
٧ (أ)   ٨ (ب)   ٩ (أ)

المجموعة الثانية

١٠ ∵ أ = ٢ ، ب = −٤ ، حـ = ١
∴ س = (٤ ± $\sqrt{(−٤)^{٢} − ٤ × ٢ × ١}$) / (٢ × ٢)
= (٤ ± ٢$\sqrt{٢}$) / ٤ = (٢ ± $\sqrt{٢}$) / ٢
∴ س ≈ ١,٧١ أو س ≈ ٠,٢٩
∴ م.ح = {١,٧١ ، ٠,٢٩}

١١ ∵ (٣ ، −١) حل للمعادلة : أس + ب ص − ٥ = ٠
∴ ٣أ − ب − ٥ = ٠
∴ ٣أ − ب = ٥   (١)
، ∵ (٣ ، −١) حل للمعادلة : ٣أس + ب ص = ١٧
∴ ٩أ − ب = ١٧
∴ −٩أ + ب = −١٧   (٢)
بجمع (١) ، (٢) :
∴ −٦أ = −١٢   ∴ أ = ٢
بالتعويض في (١) : ∴ ب = ١

١٢ ∵ س + ص = ٣   ∴ ص = ٣ − س   (١)
، ∵ س ص = ٢   (٢)
بالتعويض من (١) في (٢) :
∴ س(٣ − س) = ٢
∴ ٣س − س^{٢} = ٢
∴ س^{٢} − ٣س + ٢ = ٠
∴ (س − ١)(س − ٢) = ٠
∴ س = ١ أو س = ٢

بالتعويض في (١) :
∴ ص = ٢ أو ص = ١
∴ م.ح = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ١)}

١٣ ∵ ن$_{١}$(س) = س / (س(س − ١))
∴ مجال ن$_{١}$ = ح − {٠ ، ١}
، ن$_{١}$(س) = ١ / (س − ١)   (١)
، ∵ ن$_{٢}$(س) = (س^{٢} + س + ١) / ((س − ١)(س^{٢} + س + ١))
∴ مجال ن$_{٢}$ = ح − {١}
، ن$_{٢}$(س) = ١ / (س − ١)   (٢)
من (١) ، (٢) :
∴ ن$_{١}$ ≠ ن$_{٢}$ لأن مجال ن$_{١}$ ≠ مجال ن$_{٢}$

١٤ ∵ ن(س) = س(س − ٣) / ((س − ٣)(س − ٢)) − ٢(س + ٢) / ((س + ٢)(س − ٢))
∴ مجال ن = ح − {٣ ، ٢ ، −٢}
، ن(س) = س / (س − ٢) − ٢ / (س − ٢) = (س − ٢) / (س − ٢) = ١

١٥ ∵ ن(س) = س(س + ٢) / ((س − ٣)(س^{٢} + ٣س + ٩)) ÷ (س + ٢) / (س^{٢} + ٣س + ٩)
∴ مجال ن = ح − {٣ ، −٢}
، ن(س) = س(س + ٢) / ((س − ٣)(س^{٢} + ٣س + ٩)) × (س^{٢} + ٣س + ٩) / (س + ٢) = س / (س − ٣)
، ن(−٢) غير معرفة لأن −٢ ∉ مجال ن

١٦ ل(أ) = ١ − ل(أ′) = ١ − ٠,٣ = ٠,٧
ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب)
= ٠,٧ − ٠,٣ = ٠,٤

٨ محافظة الدقهلية

السؤال الأول

(أ) ∵ ن(س) = (س^{٢} − ٢س + ٤) / ((س + ٢)(س^{٢} − ٢س + ٤)) + (س − ١)(س + ١) / ((س − ١)(س + ٢))
∴ مجال ن = ح − {−٢ ، ١}
، ن(س) = ١ / (س + ٢) + (س + ١) / (س + ٢) = (س + ٢) / (س + ٢) = ١

(ب) ① ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)
= ٠,٥ + ٠,٤ − ٠,١ = ٠,٨
② ل(ب − أ) = ل(ب) − ل(أ ∩ ب)
= ٠,٤ − ٠,١ = ٠,٣

السؤال الثاني

(أ) ① (جـ)   ② (أ)   ③ (د)

(ب) ∵ (١ ، ٢) حل للمعادلة : أس + ب ص = −٥
∴ أ + ٢ب = −٥   (١)
، ∵ (١ ، ٢) حل للمعادلة : ٢أس + ب ص = ٢
∴ ٢أ + ٢ب = ٢
∴ أ + ب = ١
∴ −أ − ب = −١   (٢)
بجمع (١) ، (٢) : ∴ ب = −٦
بالتعويض في (١) : ∴ أ = ٧

السؤال الثالث

(أ) ① (د)   ② (أ)   ③ (جـ)

(ب) ∵ أ = ١ ، ب = −٦ ، حـ = ٤
∴ س = (٦ ± $\sqrt{(−٦)^{٢} − ٤ × ١ × ٤}$) / (٢ × ١)
= (٦ ± ٢$\sqrt{٥}$) / ٢ = ٣ ± $\sqrt{٥}$
∴ س ≈ ٥,٢٣٦ أو س ≈ ٠,٧٦٤
∴ م.ح = {٥,٢٣٦ ، ٠,٧٦٤}

السؤال الرابع

(1) ① ∵ ن(س) = س(س − ٢) / ((س − ٢)(س^{٢} + ٢))

∴ ن$^{-١}$(س) = (س − ٢)(س^{٢} + ٢) / (س(س − ٢))

∴ مجال ن$^{-١}$ = ح − {٠ ، ٢}

، ن$^{-١}$(س) = (س^{٢} + ٢) / س

② ∵ ن$^{-١}$(س) = ٣ ∴ (س^{٢} + ٢) / س = ٣

∴ س^{٢} + ٢ = ٣س

∴ س^{٢} − ٣س + ٢ = ٠

∴ (س − ٢)(س − ١) = ٠

∴ س = ٢ (مرفوض) أ، س = ١

(ب) نفرض أن طول المستطيل = س سم

∴ عرض المستطيل = (س − ٣) سم

∴ س(س − ٣) = ٢٨

∴ س^{٢} − ٣س − ٢٨ = ٠

∴ (س − ٧)(س + ٤) = ٠

∴ س = ٧ أ، س = −٤ (مرفوض)

∴ طول المستطيل = ٧ سم

، عرض المستطيل = ٤ سم

∴ المحيط = ٢ (٧ + ٤) = ٢٢ سم

السؤال الخامس

(1) ① (أ) ② (د) ③ (ب)

(ب) ∵ ن$_{١}$(س) = ٢س / (٢(س + ٢))

∴ مجال ن$_{١}$ = ح − {−٢}
، ن$_{١}$(س) = س / (س + ٢) (1)

، ∵ ن$_{٢}$(س) = س(س + ٢) / (س + ٢)^{٢}

∴ مجال ن$_{٢}$ = ح − {−٢}
، ن$_{٢}$(س) = س / (س + ٢) (2)

من (1) ، (2) : ∴ ن$_{١}$ = ن$_{٢}$

٩ محافظة الإسماعيلية

المجموعة الأولى

١ (ب) ٢ (أ) ٣ (جـ)

٤ (ب) ٥ (د) ٦ (جـ)

٧ (جـ) ٨ (د) ٩ (ب)

المجموعة الثانية

١٠ ∵ ٢س + ص = ٩ (1)

، ٣س − ص = ٦ (2)

بجمع (1) ، (2) : ∴ ٥س = ١٥ ∴ س = ٣

بالتعويض فى (1) : ∴ ص = ٣

∴ م.ح = {(٣ ، ٣)}

١١ ∵ ن(س) = س(س + ٢) / ((س − ٢)(س + ٢)) + (س − ٣) / ((س − ٣)(س − ٢))

∴ مجال ن = ح − {٢ ، −٢ ، ٣}

، ن(س) = س / (س − ٢) + ١ / (س − ٢) = (س + ١) / (س − ٢)

١٢ ① ∵ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

∴ ٠,٧ = ٠,٣ + ٠,٥ − ل(أ ∩ ب)

∴ ل(أ ∩ ب) = ٠,٣ + ٠,٥ − ٠,٧ = ٠,١

② ل(ب − أ) = ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

= ٠,٥ − ٠,١ = ٠,٤

١٣ ∵ س − ص = ١

∴ س = ص + ١ (1)

، ∵ س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥ (2)

بالتعويض من (1) فى (2) :

∴ (ص + ١)^{٢} + ص^{٢} = ٢٥

∴ ص^{٢} + ٢ص + ١ + ص^{٢} = ٢٥

∴ ٢ص^{٢} + ٢ص − ٢٤ = ٠

∴ ص^{٢} + ص − ١٢ = ٠

∴ (ص + ٤)(ص − ٣) = ٠

∴ ص = −٤ أ، ص = ٣

بالتعويض فى (1) : ∴ س = −٣ أ، س = ٤

∴ م.ح = {(−٣ ، −٤) ، (٤ ، ٣)}

١٤ ∵ ن$_{١}$(س) = ١ / (س − ١)
∴ مجال ن$_{١}$ = ح − {١} (1)

، ∵ ن$_{٢}$(س) = (س^{٢} + س + ١) / ((س − ١)(س^{٢} + س + ١))

∴ مجال ن$_{٢}$ = ح − {١}
، ن$_{٢}$(س) = ١ / (س − ١) (2)

من (1) ، (2) : ∴ ن$_{١}$ = ن$_{٢}$

١٥ ∵ أ = ١ ، ب = ٣ ، جـ = ١

∴ س = (−٣ ± √(٣^{٢} − ٤ × ١ × ١)) / (٢ × ١) = (−٣ ± √٥) / ٢

∴ س ≃ −٠,٣٨ أ، س ≃ −٢,٦٢

∴ م.ح = {−٠,٣٨ ، −٢,٦٢}

١٦ ∵ ن(س) = (س − ٣)^{٢} / (س − ٣) × ١٥ / (٥(س − ٣))

∴ مجال ن = ح − {٣}

، ن(س) = ٣

١٠ محافظة بورسعيد

المجموعة الأولى

١ (د) ٢ (جـ) ٣ (جـ)

٤ (ب) ٥ (أ) ٦ (ب)

٧ (جـ) ٨ (د) ٩ (أ)

المجموعة الثانية

١٠ ∵ ن(س) = س(س + ٣) / ((س − ٣)(س + ٣)) × (س − ٣) / (٢س)

∴ مجال ن = ح − {٣ ، −٣ ، ٠}

، ن(س) = ١/٢

١١ ∵ ن$_{١}$(س) = (س − ٢)(س + ٢) / (س − ٢)^{٢}

∴ مجال ن$_{١}$ = ح − {٢}
، ن$_{١}$(س) = (س + ٢) / (س − ٢) (1)

، ∵ ن$_{٢}$(س) = (س + ٢) / (س − ٢)
∴ مجال ن$_{٢}$ = ح − {٢} (2)

من (1) ، (2) : ∴ ن$_{١}$ = ن$_{٢}$

١٢ ∵ أ ، ب حدثان متنافيان

∴ ل(أ ∩ ب) = ٠

، ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) = ٣/٥ + ١/٥ = ٤/٥

١٣ ∵ ن(س) = ٢س / (س + ٢) + ٤ / (س + ٢)

∴ مجال ن = ح − {−٢}

، ن(س) = (٢س + ٤) / (س + ٢)

= ٢(س + ٢) / (س + ٢) = ٢

١٤ ∵ س − ٢ص = ٠ ∴ س = ٢ص (1)

، ∵ س ص = ٨ (2)

بالتعويض من (1) فى (2) :

∴ ٢ص × ص = ٨ ∴ ٢ص^{٢} = ٨

∴ ص^{٢} = ٤ ∴ ص = ٢ أ، ص = −٢

بالتعويض فى (1) :

∴ س = ٤ أ، س = −٤

∴ م.ح = {(٤ ، ٢) ، (−٤ ، −٢)}

١٥ ∵ أ = ١ ، ب = −٥ ، جـ = ٣

∴ س = (٥ ± √((−٥)^{٢} − ٤ × ١ × ٣)) / (٢ × ١) = (٥ ± √١٣) / ٢

∴ س ≃ ٤,٣ أ، س ≃ ٠,٧

∴ م.ح = {٤,٣ ، ٠,٧}

16 ∵ س + ص = ٥ (١)

، س − ص = ١ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ ٢ س = ٦ ∴ س = ٣

بالتعويض فى (١) : ∴ ص = ٢

∴ م.ح = {(٣ ، ٢)}

١١ محافظة دمياط

السؤال الأول

(أ) ① (د) ② (جـ) ③ (ب)

(ب) ∵ ن (س) = $\frac{٢ س}{س (س - ٢)} - \frac{س + ٢}{(س + ٢) (س - ٢)}$

∴ مجال ن = ح − {٠ ، ٢ ، −٢}

، ن (س) = $\frac{٢}{س - ٢} - \frac{١}{س - ٢} = \frac{١}{س - ٢}$

السؤال الثانى

(أ) ① (جـ) ② (د) ③ (أ)

(ب) ∵ ن (س) = $\frac{س (س + ٢)}{(س - ٣) (س^2 + ٣ س + ٩)}$ ÷ $\frac{س + ٢}{س^2 + ٣ س + ٩}$

∴ مجال ن = ح − {٣ ، −٢}

، ن (س) = $\frac{س (س + ٢)}{(س - ٣) (س^2 + ٣ س + ٩)}$ × $\frac{س^2 + ٣ س + ٩}{س + ٢} = \frac{س}{س - ٣}$

السؤال الثالث

(أ) ① (د) ② (أ) ③ (ب)

(ب) ∵ $ن_1$ (س) = $\frac{س + ٥}{(س + ٥) (س - ٥)}$

∴ مجال $ن_1$ = ح − {−٥ ، ٥}

، $ن_1$ (س) = $\frac{١}{س - ٥}$ (١)

، ∵ $ن_2$ (س) = $\frac{٣}{٣ (س - ٥)}$

∴ مجال $ن_2$ = ح − {٥}

، $ن_2$ (س) = $\frac{١}{س - ٥}$ (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ $ن_1 \neq ن_2$ لأن مجال $ن_1 \neq$ مجال $ن_2$

السؤال الرابع

(أ) ∵ س + ص = ١ (١) ، س − ص = ٣ (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ ٢ س = ٤ ∴ س = ٢

بالتعويض فى (١) : ∴ ص = −١

∴ م.ح = {(٢ ، −١)}

(ب) ∵ أ ، ب حدثان متنافيان

∴ ل (أ ∩ ب) = ٠

∴ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب)

∴ $\frac{٧}{١٢} = \frac{١}{٣}$ + ل (ب)

∴ ل (ب) = $\frac{٧}{١٢} - \frac{١}{٣} = \frac{١}{٤}$

السؤال الخامس

(أ) ∵ س − ٢ ص = ٠ ∴ س = ٢ ص (١)

، ∵ $س^2 + ص^2$ = ٢٠ (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ $(٢ ص)^2 + ص^2$ = ٢٠

∴ ٤ $ص^2 + ص^2$ = ٢٠

∴ ٥ $ص^2$ = ٢٠ ∴ $ص^2$ = ٤

∴ ص = ٢ أ، ص = −٢

بالتعويض فى (١) : ∴ س = ٤ أ، س = −٤

∴ م.ح = {(٤ ، ٢) ، (−٤ ، −٢)}

(ب) ∵ أ = ١ ، ب = −٤ ، جـ = ١

∴ س = $\frac{٤ \pm \sqrt{(-٤)^2 - ٤ \times ١ \times ١}}{٢ \times ١} = \frac{٤ \pm ٢\sqrt{٣}}{٢}$

= ٢ ± ١,٧

∴ س = ٣,٧ أ، س = ٠,٣

∴ م.ح = {٣,٧ ، ٠,٣}

١٢ محافظة كفر الشيخ

المجموعة الأولى

1 (أ) 2 (ب) 3 (د)

4 (د) 5 (د) 6 (أ)

7 (جـ) 8 (جـ) 9 (أ)

المجموعة الثانية

10 ∵ $س^2$ − ٥ س − ٧ = ٠

∴ أ = ١ ، ب = −٥ ، جـ = −٧

∴ س = $\frac{٥ \pm \sqrt{(-٥)^2 - ٤ \times ١ \times -٧}}{٢ \times ١} = \frac{٥ \pm \sqrt{٥٣}}{٢}$

∴ س ≃ ٦,١ أ، س ≃ −١,١

∴ م.ح = {٦,١ ، −١,١}

11 ① ∵ ن (س) = $\frac{س (س - ٢)}{(س - ٢) (س - ١)}$

∴ $ن^{-1}$ (س) = $\frac{(س - ٢) (س - ١)}{س (س - ٢)}$

∴ مجال $ن^{-1}$ = ح − {٢ ، ١ ، ٠}

، $ن^{-1}$ (س) = $\frac{س - ١}{س}$

② ∵ $ن^{-1}$ (س) = ٣ ∴ $\frac{س - ١}{س}$ = ٣

∴ ٣ س = س − ١ ∴ ٢ س = −١

∴ س = $\frac{-١}{٢}$

12 ∵ ٣ س + ٢ ص = ٧ (١)

، ٢ س + ص = ٤ (بالضرب × −٢)

∴ −٤ س − ٢ ص = −٨ (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ − س = −١ ∴ س = ١

بالتعويض فى (١) : ∴ ص = ٢

∴ م.ح = {(١ ، ٢)}

13 ل (ب) = ١ − ل (ب‌َ) = ١ − ٠,٧ = ٠,٣

∵ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

∴ ٠,٦ = ٠,٥ + ٠,٣ − ل (أ ∩ ب)

∴ ل (أ ∩ ب) = ٠,٥ + ٠,٣ − ٠,٦ = ٠,٢

14 ∵ $ن_1$ (س) = $\frac{س^2}{س^2 (س - ١)}$

∴ مجال $ن_1$ = ح − {٠ ، ١}

، $ن_1$ (س) = $\frac{١}{س - ١}$ (١)

، ∵ $ن_2$ (س) = $\frac{س (س^2 + س + ١)}{س (س - ١) (س^2 + س + ١)}$

∴ مجال $ن_2$ = ح − {٠ ، ١}

، $ن_2$ (س) = $\frac{١}{س - ١}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $ن_1 = ن_2$

15 ∵ س − ص = ١ ∴ س = ص + ١ (١)

، ∵ $ص^2$ = ١٣ − $س^2$ (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ $ص^2$ = ١٣ − $(ص + ١)^2$

∴ $ص^2$ = ١٣ − $ص^2$ − ٢ ص − ١

∴ ٢ $ص^2$ + ٢ ص − ١٢ = ٠

∴ $ص^2$ + ص − ٦ = ٠

∴ (ص + ٣) (ص − ٢) = ٠

∴ ص = −٣ أ، ص = ٢

بالتعويض فى (١) : ∴ س = −٢ أ، س = ٣

∴ م.ح = {(−٢ ، −٣) ، (٣ ، ٢)}

16 ∵ ن (س) = $\frac{س^2 - ٣ س}{س^2 - ٩} + \frac{س - ١}{س^2 + ٢ س - ٣}$

= $\frac{س (س - ٣)}{(س - ٣) (س + ٣)}$

+ $\frac{س - ١}{(س + ٣) (س - ١)}$

∴ مجال ن = ح − {٣ ، −٣ ، ١}

، ن (س) = $\frac{س}{س + ٣} + \frac{١}{س + ٣} = \frac{س + ١}{س + ٣}$

١٣ محافظة البحيرة

المجموعة الأولى

1 (ب) 2 (أ) 3 (جـ)

4 (ب) 5 (ب) 6 (أ)

7 (د) 8 (د) 9 (جـ)

المجموعة الثانية

١٠ $\because$ ٣س + ص = ٩ (١)

، ٢س − ص = ١ (٢)

بجمع (١) ، (٢) : $\therefore$ ٥س = ١٠ $\therefore$ س = ٢

بالتعويض فى (١) : $\therefore$ ص = ٣

$\therefore$ م.ح = {(٢ ، ٣)}

١١ $\because$ $ن(س) = \frac{(س+٢)(س+٤)}{(س+٢)(س-٢)}$

$- \frac{س(س-٥)}{(س-٥)(س-٢)}$

$\therefore$ مجال ن = ح − {−٢ ، ٢ ، ٥}

، $ن(س) = \frac{س+٤}{س-٢} - \frac{س}{س-٢} = \frac{٤}{س-٢}$

١٢ $\because$ أ = ١ ، ب = ٢ ، جـ = −٤

$\therefore$ $س = \frac{-٢ \pm \sqrt{(٢)^٢ - ٤ \times ١ \times -٤}}{٢ \times ١}$

$= \frac{-٢ \pm ٢\sqrt{٥}}{٢} = -١ \pm \sqrt{٥}$

$\therefore$ س ≃ ١,٢٤ أ، س ≃ −٣,٢٤

$\therefore$ م.ح = {١,٢٤ ، −٣,٢٤}

١٣ $\because$ $ن(س) = \frac{(س-٢)(س-٣)}{(س-٢)(س^٢+٢س+٤)}$

$\div \frac{س-٣}{س^٢+٢س+٤}$

$\therefore$ مجال ن = ح − {٢ ، ٣}

، $ن(س) = \frac{س-٣}{س^٢+٢س+٤}$

$\times \frac{س^٢+٢س+٤}{س-٣} = ١$

١٤ $\because$ س − ص = ١ $\therefore$ ص = س − ١ (١)

، $\because$ $س^٢$ − س ص = ٣ (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) :

$\therefore$ $س^٢$ − س(س − ١) = ٣

$\therefore$ $س^٢ - س^٢$ + س = ٣ $\therefore$ س = ٣

بالتعويض فى (١) : $\therefore$ ص = ٢

$\therefore$ م.ح = {(٣ ، ٢)}

١٥ $\because$ $ن_١(س) = \frac{س^٢}{س^٢(س-١)}$

$\therefore$ مجال $ن_١$ = ح − {٠ ، ١}
، $ن_١(س) = \frac{١}{س-١}$ (١)

، $\because$ $ن_٢(س) = \frac{س(س^٢+س+١)}{س(س-١)(س^٢+س+١)}$

$\therefore$ مجال $ن_٢$ = ح − {٠ ، ١}
، $ن_٢(س) = \frac{١}{س-١}$ (٢)

من (١) ، (٢) : $\therefore$ $ن_١ = ن_٢$

١٦ ① ل(أ') = ١ − ل(أ) = ١ − ٠,٧ = ٠,٣

② ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

= ٠,٧ + ٠,٦ − ٠,٤ = ٠,٩

③ ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب)

= ٠,٧ − ٠,٤ = ٠,٣

١٤ محافظة الفيوم

السؤال الأول

١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (جـ)

٤ (جـ) ٥ (أ) ٦ (د)

السؤال الثانى

(أ) $\because$ ٢ص = س − ٥

$\therefore$ س = ٢ص + ٥ (١)

، $\because$ ٤س = ٢ − ص (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) :

$\therefore$ ٤(٢ص + ٥) = ٢ − ص

$\therefore$ ٨ص + ٢٠ = ٢ − ص

$\therefore$ ٩ص = −١٨

$\therefore$ ص = −٢

بالتعويض فى (١) : $\therefore$ س = ١

$\therefore$ م.ح = {(١ ، −٢)}

(ب) $\because$ $س^٢$ − ٢س − ٤ = ٠

$\therefore$ أ = ١ ، ب = −٢ ، جـ = −٤

$\therefore$ $س = \frac{٢ \pm \sqrt{(-٢)^٢ - ٤ \times ١ \times -٤}}{٢ \times ١}$

$= \frac{٢ \pm ٢\sqrt{٥}}{٢} = ١ \pm \sqrt{٥}$

$\therefore$ س ≃ ٣,٢٤ أ، س ≃ −١,٢٤

$\therefore$ م.ح = {٣,٢٤ ، −١,٢٤}

السؤال الثالث

(أ) $\because$ $د(س) = \frac{٢س-٦}{س^٢-٩} + \frac{٨}{س^٢+٢س-٣}$

$= \frac{٢(س-٣)}{(س-٣)(س+٣)}$

$+ \frac{٨}{(س+٣)(س-١)}$

$\therefore$ مجال د = ح − {٣ ، −٣ ، ١}

، $د(س) = \frac{٢}{س+٣} + \frac{٨}{(س+٣)(س-١)}$

$= \frac{٢(س-١)+٨}{(س+٣)(س-١)}$

$= \frac{٢س-٢+٨}{(س+٣)(س-١)}$

$= \frac{٢س+٦}{(س+٣)(س-١)}$

$= \frac{٢(س+٣)}{(س+٣)(س-١)} = \frac{٢}{س-١}$

(ب) $\because$ ص − س = −٣ $\therefore$ ص = س − ٣ (١)

، $\because$ $س^٢ + ص^٢ = ٥$ (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) :

$\therefore$ $س^٢ + (س-٣)^٢ = ٥$

$\therefore$ $س^٢ + س^٢ - ٦س + ٩ = ٥$

$\therefore$ $٢س^٢ - ٦س + ٤ = ٠$

$\therefore$ $س^٢ - ٣س + ٢ = ٠$

$\therefore$ (س − ١)(س − ٢) = ٠

$\therefore$ س = ١ أ، س = ٢

بالتعويض فى (١) :

$\therefore$ ص = −٢ أ، ص = −١

$\therefore$ م.ح = {(١ ، −٢) ، (٢ ، −١)}

السؤال الرابع

(أ) $\because$ $ن(س) = \frac{٣س(س-٢)}{(س-٢)(س+٢)}$

$\div \frac{س(س+١)}{(س+١)(س+٢)}$

$\therefore$ مجال ن = ح − {٢ ، −٢ ، −١ ، ٠}

، $ن(س) = \frac{٣س}{س+٢} \times \frac{س+٢}{س} = ٣$

(ب) ① ل(أ') = ١ − ل(أ) = ١ − ٠,٦ = ٠,٤

② ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

= ٠,٦ + ٠,٥ − ٠,٣ = ٠,٨

③ ل(ب − أ) = ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

= ٠,٥ − ٠,٣ = ٠,٢

السؤال الخامس

(أ) $\because$ $ن_١(س) = \frac{٢س}{٢(س+٢)}$

$\therefore$ مجال $ن_١$ = ح − {−٢}
، $ن_١(س) = \frac{س}{س+٢}$ (١)

، $\because$ $ن_٢(س) = \frac{س(س+٢)}{(س+٢)^٢}$

$\therefore$ مجال $ن_٢$ = ح − {−٢}
، $ن_٢(س) = \frac{س}{س+٢}$ (٢)

من (١) ، (٢) : $\therefore$ $ن_١ = ن_٢$

(ب) ① (د) ② (ب) ③ (جـ)

١٥ محافظة بنى سويف

السؤال الأول

١ (ب) ٢ (أ) ٣ (جـ)

٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د)

السؤال الثانى

(أ) ① (د) ② (أ) ③ (ب)

(ب) ∵ ص − س = ٢ ∴ ص = س + ٢ (١)

، ∵ $س^2$ + س ص − ٤ = ٠ (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢):

∴ $س^2$ + س (س + ٢) − ٤ = ٠

∴ $س^2$ + $س^2$ + ٢ س − ٤ = ٠

∴ ٢ $س^2$ + ٢ س − ٤ = ٠

∴ $س^2$ + س − ٢ = ٠

∴ (س + ٢) (س − ١) = ٠

∴ س = −٢ أ، س = ١

بالتعويض فى (١):

∴ ص = ٠ أ، ص = ٣

∴ م.ح = {(−٢ ، ٠) ، (١ ، ٣)}

السؤال الثالث

(أ) ∵ ن (س) = $\frac{س - ٢}{(س - ٢)(س + ٢)} + \frac{٢ (س + ٣)}{(س + ٣)(س + ٢)}$

∴ مجال ن = ح − {٢ ، −٢ ، −٣}

، ن (س) = $\frac{١}{س + ٢} + \frac{٢}{س + ٢} = \frac{٣}{س + ٢}$

(ب) ∵ س = ٣ ص + ٧ (١)

، س + ٢ ص = ١٢ (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢):

∴ ٣ ص + ٧ + ٢ ص = ١٢

∴ ٥ ص = ٥

∴ ص = ١

بالتعويض فى (١): ∴ س = ١٠

∴ م.ح = {(١٠ ، ١)}

السؤال الرابع

(أ) ∵ ن (س) = $\frac{(س + ٧)^2}{(س - ٢)(س^2 + ٢ س + ٤)} \div \frac{س + ٧}{س - ٢}$

∴ مجال ن = ح − {٢ ، −٧}

، ن (س) = $\frac{(س + ٧)^2}{(س - ٢)(س^2 + ٢ س + ٤)} \times \frac{س - ٢}{س + ٧} = \frac{س + ٧}{س^2 + ٢ س + ٤}$

، ن (−١) = $\frac{-١ + ٧}{(-١)^2 - ٢ + ٤} = \frac{٦}{٣} = ٢$

(ب) ∵ $س^2$ + ٢ س − ٥ = ٠

∴ أ = ١ ، ب = ٢ ، جـ = −٥

∴ س = $\frac{-٢ \pm \sqrt{(٢)^2 - ٤ \times ١ \times -٥}}{٢ \times ١} = \frac{-٢ \pm ٢\sqrt{٦}}{٢} = -١ \pm \sqrt{٦}$

∴ س ≃ ١,٤٥ أ، س ≃ −٣,٤٥

∴ م.ح = {١,٤٥ ، −٣,٤٥}

السؤال الخامس

(أ) ∵ $ن_1$ (س) = $\frac{٣}{س - ١} - \frac{٢}{س - ١}$

∴ مجال $ن_1$ = ح − {١}

، $ن_1$ (س) = $\frac{١}{س - ١}$

، ∵ $ن_2$ (س) = $\frac{س^2}{س^2 (س - ١)}$

∴ مجال $ن_2$ = ح − {٠ ، ١}

، $ن_2$ (س) = $\frac{١}{س - ١}$

∴ $ن_1$ (س) = $ن_2$ (س)

لجميع قيم س ∈ ح − {٠ ، ١}

(ب) ل (أ') = ١ − ل (أ) = ١ − ٠,٧ = ٠,٣

∵ ل (أ − ب) = ل (أ) − ل (أ ∩ ب)

∴ ٠,٥ = ٠,٧ − ل (أ ∩ ب)

∴ ل (أ ∩ ب) = ٠,٧ − ٠,٥ = ٠,٢

١٦ محافظة أسيوط

السؤال الأول

١ (د) ٢ (جـ) ٣ (جـ)

٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (جـ)

السؤال الثانى

(أ) ∵ ن (س) = $\frac{(س - ٣)(س^2 + ٣ س + ٩)}{(س - ٣)(س - ٢)} \div \frac{س^2 + ٣ س + ٩}{س - ٢}$

∴ مجال ن = ح − {٣ ، ٢}

، ن (س) = $\frac{س^2 + ٣ س + ٩}{س - ٢} \times \frac{س - ٢}{س^2 + ٣ س + ٩}$

= ١

(ب) ∵ $س^2$ + ٣ س − ١ = ٠

∴ أ = ١ ، ب = ٣ ، جـ = −١

∴ س = $\frac{-٣ \pm \sqrt{(٣)^2 - ٤ \times ١ \times -١}}{٢ \times ١} = \frac{-٣ \pm \sqrt{١٣}}{٢}$

∴ س ≃ ٠,٣ أ، س ≃ −٣,٣

∴ م.ح = {٠,٣ ، −٣,٣}

السؤال الثالث

(أ) ① (ب) ② (جـ) ③ (ب)

(ب) ∵ س = ٣ (١) ، $س^2$ + $ص^2$ = ٢٥ (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢):

∴ ٩ + $ص^2$ = ٢٥ ∴ $ص^2$ = ١٦

∴ ص = ٤ أ، ص = −٤

∴ م.ح = {(٣ ، ٤) ، (٣ ، −٤)}

السؤال الرابع

(أ) ∵ $ن_1$ (س) = $\frac{١}{س}$

∴ مجال $ن_1$ = ح − {٠} (١)

، ∵ $ن_2$ (س) = $\frac{س^2 + ٤}{س (س^2 + ٤)}$

∴ مجال $ن_2$ = ح − {٠}

، $ن_2$ (س) = $\frac{١}{س}$ (٢)

من (١) ، (٢): ∴ $ن_1$ = $ن_2$

(ب) ① ل (أ) = ١ − ل (أ') = ١ − ٠,٦ = ٠,٤

② ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

= ٠,٤ + ٠,٥ − ٠,٢ = ٠,٧

③ ل (ب − أ) = ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

= ٠,٥ − ٠,٢ = ٠,٣

السؤال الخامس

(أ) ∵ ن (س) = $\frac{س (س + ١)}{(س - ١)(س + ١)} - \frac{س - ٥}{(س - ٥)(س - ١)}$

∴ مجال ن = ح − {١ ، −١ ، ٥}

، ن (س) = $\frac{س}{س - ١} - \frac{١}{س - ١} = \frac{س - ١}{س - ١} = ١$

(ب) ∵ ٢ س + ص = ١٠ (١)

، س − ص = ٢ (٢)

بجمع (١) ، (٢): ∴ ٣ س = ١٢

∴ س = ٤

بالتعويض فى (٢): ∴ ص = ٢

∴ م.ح = {(٤ ، ٢)}

١٧ محافظة سوهاج

المجموعة الأولى

١ (ب) ٢ (أ) ٣ (ب)

٤ (جـ) ٥ (د) ٦ (ب)

٧ (ب) ٨ (جـ) ٩ (جـ)

المجموعة الثانية

١٠ ∵ س − ص = ٤ (بالضرب × ٢)

∴ ٢ س − ٢ ص = ٨ (١)

، ٣ س + ٢ ص = ٧ (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ ٥ س = ١٥

∴ س = ٣

بالتعويض فى (١) : ∴ ص = -١

∴ م.ح = {(٣ ، -١)}

١١ ① ∵ ن (س) = $\frac{\text{س + ١}}{\text{(س + ١) (س - ٢)}}$ × $\frac{\text{(س + ٥) (س - ٢)}}{\text{(س + ٥) (٣ س + ١)}}$

∴ مجال ن = ح - {-١ ، ٢ ، -٥ ، -$\frac{١}{٣}$}

، ن (س) = $\frac{\text{١}}{\text{٣ س + ١}}$

② ن (٠) = $\frac{\text{١}}{\text{٣ × ٠ + ١}}$ = ١

، ن (-١) غير معرفة لأن -١ ∉ مجال ن

١٢ ① احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل

= ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) - ل (أ ∩ ب)

= ٠,٦ + ٠,٥ - ٠,٣ = ٠,٨

② ل (ب - أ) = ل (ب) - ل (أ ∩ ب)

= ٠,٥ - ٠,٣ = ٠,٢

③ ل (أَ) = ١ - ل (أ) = ١ - ٠,٦ = ٠,٤

١٣ ∵ أ = ١ ، ب = -٦ ، حـ = ٤

∴ س = $\frac{\text{٦ ± } \sqrt{\text{(-٦)}^{\text{٢}} \text{ - ٤ × ١ × ٤}}}{\text{٢ × ١}}$

= $\frac{\text{٦ ± ٢} \sqrt{\text{٥}}}{\text{٢}}$ = ٣ ± $\sqrt{\text{٥}}$

∴ س ≃ ٥,٢٤ أ، س ≃ ٠,٧٦

∴ م.ح = {٥,٢٤ ، ٠,٧٦}

١٤ ∵ ن (س) = $\frac{\text{س}^{\text{٢}} \text{ + ٢ س + ٤}}{\text{(س - ٢) (س}^{\text{٢}} \text{ + ٢ س + ٤)}}$ + $\frac{\text{(س - ٣) (س + ٣)}}{\text{(س - ٢) (س + ٣)}}$

∴ مجال ن = ح - {٢ ، -٣}

، ن (س) = $\frac{\text{١}}{\text{س - ٢}}$ + $\frac{\text{س - ٣}}{\text{س - ٢}}$ = $\frac{\text{س - ٢}}{\text{س - ٢}}$ = ١

١٥ ∵ س - ص = ٢ ∴ س = ص + ٢ (١)

، ∵ س$^{\text{٢}}$ + ص$^{\text{٢}}$ = ١٠ (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ (ص + ٢)$^{\text{٢}}$ + ص$^{\text{٢}}$ = ١٠

∴ ص$^{\text{٢}}$ + ٤ ص + ٤ + ص$^{\text{٢}}$ = ١٠

∴ ٢ ص$^{\text{٢}}$ + ٤ ص - ٦ = ٠

∴ ص$^{\text{٢}}$ + ٢ ص - ٣ = ٠

∴ (ص + ٣) (ص - ١) = ٠

∴ ص = -٣ أ، ص = ١

بالتعويض فى (١) :

∴ س = -١ أ، س = ٣

∴ م.ح = {(-١ ، -٣) ، (٣ ، ١)}

١٦ ① ∵ ن (س) = $\frac{\text{س (س - ٢)}}{\text{(س - ٢) (س}^{\text{٢}} \text{ + ٢)}}$

∴ ن$^{\text{-١}}$ (س) = $\frac{\text{(س - ٢) (س}^{\text{٢}} \text{ + ٢)}}{\text{س (س - ٢)}}$

∴ مجال ن$^{\text{-١}}$ = ح - {٠ ، ٢}

، ن$^{\text{-١}}$ (س) = $\frac{\text{س}^{\text{٢}} \text{ + ٢}}{\text{س}}$

② ∵ ن$^{\text{-١}}$ (س) = ٣ ∴ $\frac{\text{س}^{\text{٢}} \text{ + ٢}}{\text{س}}$ = ٣

∴ س$^{\text{٢}}$ + ٢ = ٣ س

∴ س$^{\text{٢}}$ - ٣ س + ٢ = ٠

∴ (س - ١) (س - ٢) = ٠

∴ س = ١ أ، س = ٢ (مرفوض)

١٨ محافظة قنا

السؤال الأول

(أ) ① (جـ) ② (جـ) ③ (ب)

(ب) ل (ب - أ) = ل (ب) - ل (أ ∩ ب)

= ٠,٧ - ٠,٤ = ٠,٣

السؤال الثانى

(أ) ① (د) ② (جـ) ③ (ب)

(ب) ∵ ن (س) = $\frac{\text{(س - ٢) (س}^{\text{٢}} \text{ + ٢ س + ٤)}}{\text{(س - ٢) (س + ٣)}}$ ÷ $\frac{\text{س}^{\text{٢}} \text{ + ٢ س + ٤}}{\text{٣ (س + ٣)}}$

∴ مجال ن = ح - {٢ ، -٣}

، ن (س) = $\frac{\text{س}^{\text{٢}} \text{ + ٢ س + ٤}}{\text{س + ٣}}$ × $\frac{\text{٣ (س + ٣)}}{\text{س}^{\text{٢}} \text{ + ٢ س + ٤}}$

= ٣

السؤال الثالث

(أ) ① (جـ) ② (أ) ③ (د)

(ب) ∵ ن$_{\text{١}}$ (س) = $\frac{\text{س (س - ١)}}{\text{س}^{\text{٢}} \text{ (س - ٢)}}$

∴ مجال ن$_{\text{١}}$ = ح - {٠ ، ٢}

، ن$_{\text{١}}$ (س) = $\frac{\text{س - ١}}{\text{س (س - ٢)}}$ (١)

، ∵ ن$_{\text{٢}}$ (س) = $\frac{\text{(س - ٢) (س - ١)}}{\text{س (س - ٢)}^{\text{٢}}}$

∴ مجال ن$_{\text{٢}}$ = ح - {٠ ، ٢}

، ن$_{\text{٢}}$ (س) = $\frac{\text{س - ١}}{\text{س (س - ٢)}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ ن$_{\text{١}}$ = ن$_{\text{٢}}$

السؤال الرابع

(أ) ∵ أ = ٢ ، ب = ٥ ، حـ = -١

∴ س = $\frac{\text{-٥ ± } \sqrt{\text{(٥)}^{\text{٢}} \text{ - ٤ × ٢ × -١}}}{\text{٢ × ٢}}$

= $\frac{\text{-٥ ± } \sqrt{\text{٣٣}}}{\text{٤}}$

∴ س ≃ ٠,١٨٥ أ، س ≃ -٢,٦٨٥

∴ م.ح = {٠,١٨٥ ، -٢,٦٨٥}

(ب) ∵ س ص = ٣ (١)

، س + ص = ٤ ∴ ص = ٤ - س (٢)

بالتعويض من (٢) فى (١) :

∴ س (٤ - س) = ٣ ∴ ٤ س - س$^{\text{٢}}$ = ٣

∴ س$^{\text{٢}}$ - ٤ س + ٣ = ٠

∴ (س - ١) (س - ٣) = ٠

∴ س = ١ أ، س = ٣

بالتعويض فى (٢) :

∴ ص = ٣ أ، ص = ١

∴ م.ح = {(١ ، ٣) ، (٣ ، ١)}

السؤال الخامس

(أ) ∵ $\frac{\text{س}}{\text{س}^{\text{٢}} \text{ - ٤}}$ = $\frac{\text{س}}{\text{(س - ٢) (س + ٢)}}$

∴ مجال الكسر الأول = ح - {٢ ، -٢}

، ∵ $\frac{\text{٥}}{\text{س + ٢}}$

∴ مجال الكسر الثانى = ح - {-٢}

∴ المجال المشترك = ح - {٢ ، -٢}

(ب) نفرض أن قياسى الزاويتين هما س ، ص

∴ س + ص = ١٨٠ (١)

، س = ٤ ص (٢)

بالتعويض من (٢) فى (١) :

∴ ٤ ص + ص = ١٨٠ ∴ ٥ ص = ١٨٠

∴ ص = ٣٦

بالتعويض فى (٢) : ∴ س = ١٤٤

∴ قياسا الزاويتين هما : ٣٦° ، ١٤٤°

١٩ محافظة الأقصر

المجموعة الأولى

١ (ب) ٢ (د) ٣ (جـ)

٤ (جـ) ٥ (أ) ٦ (ب)

٧ (د) ٨ (جـ) ٩ (جـ)

المجموعة الثانية

١٠ ∵ ن (س) = $\frac{\text{س (س - ١)}}{\text{(س - ١) (س - ٢)}}$

∴ ن$^{\text{-١}}$ (س) = $\frac{\text{(س - ١) (س - ٢)}}{\text{س (س - ١)}}$

∴ مجال $\text{ن}^{-١}$ = ح - {٠ ، ١ ، ٢}

، $\text{ن}^{-١}(\text{س}) = \frac{\text{س} - ٢}{\text{س}}$

١١ ∵ أ = ١ ، ب = -٤ ، جـ = ٢

∴ $\text{س} = \frac{٤ \pm \sqrt{(-٤)^{٢} - ٤ \times ١ \times ٢}}{٢ \times ١}$

$= \frac{٤ \pm ٢\sqrt{٢}}{٢} = ٢ \pm \sqrt{٢}$

∴ س ≃ ٣,٤١ أ، س ≃ ٠,٥٩

١٢ ∵ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٥)}{(\text{س} - ١)(\text{س} - ٥)} \div \text{س}(\text{س} - ٢)$

∴ مجال ن = ح - {١ ، ٥ ، ٠ ، ٢}

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س} - ٢}{\text{س} - ١} \times \frac{١}{\text{س}(\text{س} - ٢)}$

$= \frac{١}{\text{س}(\text{س} - ١)}$

١٣ نفرض أن طول المستطيل = س سم

، عرضه = ص سم

∴ س - ص = ٢ (١)

، ٢ (س + ص) = ٢٨

∴ س + ص = ١٤ (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ ٢ س = ١٦ ∴ س = ٨

بالتعويض فى (١) : ∴ ص = ٦

∴ طول المستطيل = ٨ سم

، عرض المستطيل = ٦ سم

∴ مساحة المستطيل = ٨ × ٦ = ٤٨ $\text{سم}^{٢}$

١٤ ∵ س - ص = ٣ ∴ س = ص + ٣ (١)

، ∵ س ص = ١٠ (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ (ص + ٣) × ص = ١٠

∴ $\text{ص}^{٢}$ + ٣ ص - ١٠ = ٠

∴ (ص + ٥) (ص - ٢) = ٠

∴ ص = -٥ أ، ص = ٢

بالتعويض فى (١) :

∴ س = -٢ أ، س = ٥

∴ م.ح = {(-٢ ، -٥) ، (٥ ، ٢)}

١٥ (١) ∵ الحدثين متنافيان. ∴ ل (أ ∩ ب) = ٠

∴ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب)

$= \frac{٢}{٥} + \frac{١}{٣} = \frac{١١}{١٥}$

(٢) ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) - ل (أ ∩ ب)

$= \frac{٢}{٥} + \frac{١}{٣} - \frac{١}{١٥} = \frac{٢}{٣}$

١٦ ∵ $\text{ن}_{١}(\text{س}) = \frac{٥\text{س}(\text{س}^{٢} + ٢)}{(\text{س}^{٢} + ٢)(\text{س} + ١)}$

∴ مجال $\text{ن}_{١}$ = ح - {-١}

، $\text{ن}_{١}(\text{س}) = \frac{٥\text{س}}{\text{س} + ١}$ (١)

، ∵ $\text{ن}_{٢}(\text{س}) = \frac{٥\text{س}}{\text{س} + ١}$

∴ مجال $\text{ن}_{٢}$ = ح - {-١} (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\text{ن}_{١} = \text{ن}_{٢}$

٢٠ محافظة أسوان

المجموعة الأولى

١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (جـ)

٤ (جـ) ٥ (د) ٦ (أ)

٧ (جـ) ٨ (د) ٩ (د)

المجموعة الثانية

١٠ ∵ س = ص (١) ، $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٥٠$ (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ $\text{س}^{٢} + \text{س}^{٢} = ٥٠$ ∴ $٢\text{س}^{٢} = ٥٠$

∴ $\text{س}^{٢} = ٢٥$

∴ س = ٥ أ، س = -٥

بالتعويض فى (١) :

∴ ص = ٥ أ، ص = -٥

∴ م.ح = {(٥ ، ٥) ، (-٥ ، -٥)}

١١ ∵ $\text{ن}_{١}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢)}$

∴ مجال $\text{ن}_{١}$ = ح - {٢ ، -٢} (١)

، ∵ $\text{ن}_{٢}(\text{س}) = \frac{٢\text{س}}{٢(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢)}$

∴ مجال $\text{ن}_{٢}$ = ح - {٢ ، -٢}

، $\text{ن}_{٢}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢)}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\text{ن}_{١} = \text{ن}_{٢}$

١٢ ∵ أ ، ب حدثين متنافيان.

∴ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب)

∴ $\frac{٧}{١٢} = \frac{١}{٣}$ + ل (ب)

∴ ل (ب) $= \frac{٧}{١٢} - \frac{١}{٣} = \frac{١}{٤}$

١٣ ∵ $٣\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ١ = ٠$

∴ أ = ٣ ، ب = -٥ ، جـ = ١

∴ $\text{س} = \frac{٥ \pm \sqrt{(-٥)^{٢} - ٤ \times ٣ \times ١}}{٢ \times ٣} = \frac{٥ \pm \sqrt{١٣}}{٦}$

∴ س ≃ ١,٤٣ أ، س ≃ ٠,٢٣

∴ م.ح = {١,٤٣ ، ٠,٢٣}

١٤ ∵ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}(\text{س} + ٢)} + \frac{٢(\text{س} - ٢)}{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢)}$

∴ مجال ن = ح - {٠ ، -٢ ، ٢}

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س} + ٢} + \frac{٢}{\text{س} + ٢} = \frac{\text{س} + ٢}{\text{س} + ٢} = ١$

١٥ ∵ ٣ س + ص = ٧ (١)

، س + ص = ٣ (بالضرب × -١)

∴ - س - ص = -٣ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ ٢ س = ٤ ∴ س = ٢

بالتعويض فى (١) : ∴ ص = ١

∴ م.ح = {(٢ ، ١)}

١٦ ∵ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س} + ١}{(\text{س} + ١)(\text{س} - ٢)}$

$\times \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٥)}{(٣\text{س} + ١)(\text{س} + ٥)}$

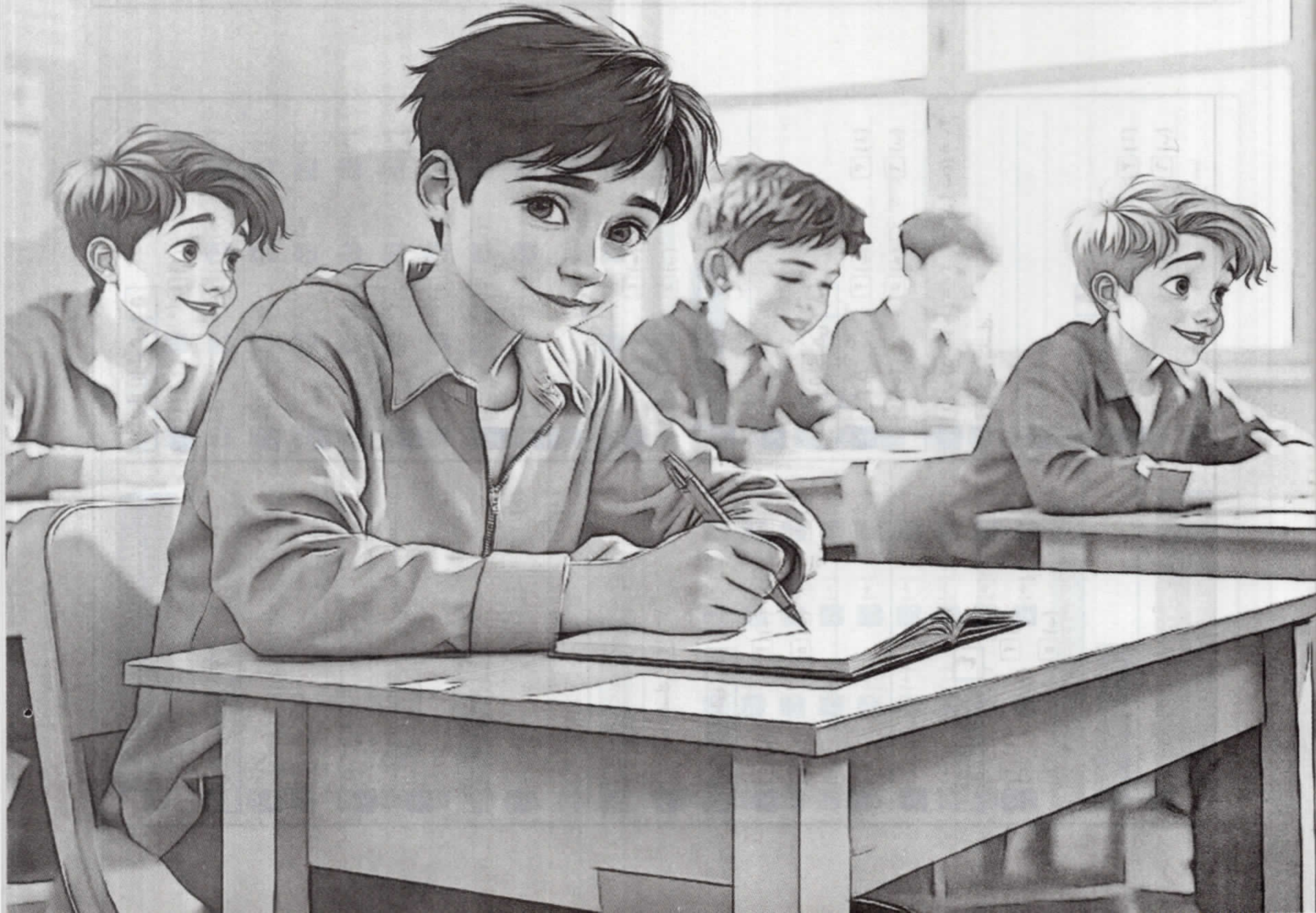
∴ مجال ن = ح - {-١ ، ٢ ، $-\frac{١}{٣}$ ، -٥}

، $\text{ن}(\text{س}) = \frac{١}{٣\text{س} + ١}$

إجابات الجزء الخاص

بالتقويـــم المستمـــر

فى الهندســـة



إجابات الاختبارات التراكمية في الهندسة

اختبار تراكمي ١

١ (١) (ب) (٢) (جـ) (٣) (د) (٤) (ب) (٥) (د) (٦) (جـ)

٢ (١) ١٢٤° (٢) ٢ سم

٣ (١) أثبت بنفسك. (٢) ٢٠°

اختبار تراكمي ٢

١ (١) (جـ) (٢) (د) (٣) (جـ) (٤) (ب) (٥) (ب) (٦) (د)

٢ ٢٤ سم

٣ (١) أثبت بنفسك. (٢) ١٣٠°

اختبار تراكمي ٣

١ (١) (ب) (٢) (جـ) (٣) (جـ) (٤) (ب) (٥) (ب) (٦) (ب)

٢ ٤٠°

٣ أثبت بنفسك.

اختبار تراكمي ٤

١ (١) (أ) (٢) (د) (٣) (أ) (٤) (أ) (٥) (ب) (٦) (أ)

٢ ٦٥°

٣ ارسم بنفسك ، دائرة واحدة

اختبار تراكمي ٥

١ (١) (جـ) (٢) (أ) (٣) (ب) (٤) (د) (٥) (د) (٦) (أ)

٢ أثبت بنفسك.

٣ ٦ سم.

اختبار تراكمي ٦

١ (١) (جـ) (٢) (أ) (٣) (جـ) (٤) (د) (٥) (د) (٦) (جـ)

٢ أثبت بنفسك ، ١٢ $\sqrt{٣}$ سم^{٢}

٣ ٩٩ سم

اختبار تراكمي ٧

١ (١) (جـ) (٢) (جـ) (٣) (ب) (٤) (د) (٥) (ب) (٦) (جـ)

٢ (١) ٦٠° (٢) أثبت بنفسك.

٣ ٦٠°

اختبار تراكمي ٨

١ (١) (جـ) (٢) (ب) (٣) (أ) (٤) (ب) (٥) (جـ) (٦) (ب)

٢ (١) ق(∠ب ء حـ) = ٣٠° ، ق(∠أ ب ء) = ٣٠°

(٢) أثبت بنفسك.

٣ أثبت بنفسك.

اختبار تراكمي ٩

١ (١) (جـ) (٢) (ب) (٣) (أ) (٤) (د) (٥) (جـ) (٦) (ب)

٢ ق(⌒هـ حـ) = ١٤٠° ، ق(⌒ب حـ) = ٨٠°

٣ (١) ١١٠° (٢) برهن بنفسك.

اختبار تراكمي ١٠

١ (١) (أ) (٢) (جـ) (٣) (جـ) (٤) (د) (٥) (جـ) (٦) (جـ)

٢ أثبت بنفسك.

٣ أثبت بنفسك.

اختبار تراكمي ١١

١ (١) (ب) (٢) (ب) (٣) (أ) (٤) (ب) (٥) (ب) (٦) (د)

٢ أثبت بنفسك.

٣ (١) ٦٥° (٢) ٦٥°

اختبار تراكمي ١٢

١ (١) (جـ) (٢) (أ) (٣) (د) (٤) (د) (٥) (ب) (٦) (د)

٢ أثبت بنفسك.

٣ أثبت بنفسك.

إجابات الأسئلة الهامة فى الهندسة

الوحدة الرابعة

أولًا إجابات أسئلة الاختيار من متعدد

١ (د)	٢ (جـ)	٣ (جـ)	٤ (أ)
٥ (جـ)	٦ (ب)	٧ (جـ)	٨ (أ)
٩ (جـ)	١٠ (أ)	١١ (ب)	١٢ (د)
١٣ (أ)	١٤ (جـ)	١٥ (ب)	١٦ (د)
١٧ (ب)	١٨ (ب)	١٩ (جـ)	٢٠ (جـ)
٢١ (جـ)	٢٢ (أ)	٢٣ (د)	٢٤ (جـ)
٢٥ (جـ)	٢٦ (ب)	٢٧ (ب)	٢٨ (جـ)
٢٩ (د)	٣٠ (ب)	٣١ (ب)	٣٢ (ب)
٣٣ (د)	٣٤ (أ)	٣٥ (جـ)	٣٦ (د)
٣٧ (جـ)			

ثانيًا إجابات الأسئلة المقالية

١ أثبت بنفسك.

٢ م ء = ٣ سم ، ء هـ = ٢ سم

٣ ٢٠ سم

٤ ١٢٥°

٥ : ٧ أثبت بنفسك.

٨ ٢٤ سم^2

٩ [١] ٨$\sqrt{٣}$ سم [٢] أثبت بنفسك.

١٠ ١٢٤°

١١ ٨ سم

١٢ $\frac{١٤\sqrt{٣}}{٣}$ سم.

١٣ أ ب = ٨$\sqrt{٣}$ سم ، أ حـ = ٤$\sqrt{٣}$ سم

١٤ [١] أثبت بنفسك. [٢] ١١٠°

١٥ : ١٧ أثبت بنفسك.

١٨ ١٢ سم

١٩ ١٤٠°

٢٠ ١٤,٤ سم

٢١ ارسم بنفسك ، يمكن رسم دائرتين.

٢٢ [١] ١١٠° [٢] أثبت بنفسك.

٢٣ : ٢٩ أثبت بنفسك.

٣٠ برهن بنفسك.

٣١ [١] ٣٠° [٢] أثبت بنفسك.

الوحدة الخامسة

أولًا إجابات أسئلة الاختيار من متعدد

١ (جـ)	٢ (جـ)	٣ (ب)	٤ (د)
٥ أولًا : (أ)	ثانيًا : (أ)	٦ (جـ)	
٧ (جـ)	٨ (ب)	٩ (د)	١٠ (ب)
١١ (د)	١٢ (ب)	١٣ (أ)	١٤ (جـ)
١٥ (د)	١٦ (ب)	١٧ (أ)	١٨ (ب)
١٩ (د)	٢٠ (د)	٢١ (جـ)	٢٢ (ب)
٢٣ (أ)	٢٤ (جـ)	٢٥ (جـ)	٢٦ (ب)
٢٧ (د)	٢٨ (ب)	٢٩ (جـ)	٣٠ (جـ)
٣١ (جـ)	٣٢ (جـ)	٣٣ (د)	٣٤ (أ)
٣٥ (ب)	٣٦ (جـ)	٣٧ (جـ)	٣٨ (ب)
٣٩ (د)	٤٠ (جـ)		

ثانيًا إجابات الأسئلة المقالية

١ ١٤ $\frac{٢}{٣}$ سم

٢ [١] ٥٠° [٢] ١٥,٧ سم

٣ ق($\overset{\frown}{أ حـ}$) = ٣٠° ، ق($\overset{\frown}{حـ ص}$) = ٦٠°

٤ أثبت بنفسك.

٥ [١] ٧٠° [٢] ٢٨٠°

٦ ٢٥°

٧ أثبت بنفسك.

٨ [١] ٦٠° [٢] ٣٠°

٩ ٥٠°

١٠ ٦٠°

١١ ١٣٠°

١٢ ٤٠°

١٣ ٧٠°

١٤ ١٠٠°

١٥ ب حـ = ١٥ سم ، أ ء = ٧,٢ سم

١٦ [١] ٧٠° [٢] ٣٥°

١٧ [١] ٢٢° [٢] ١١٢°

١٨ ٦٠°

١٩ ٧٠°

٢٠ ق(∠ ء هـ ب) = ٢٥° ، ق(∠ أ ء هـ) = ٧٥°

٢١ : ٢٥ أثبت بنفسك.

٢٦ [١] أثبت بنفسك. [٢] ٣٠°

٢٧ ١٢٥°

٢٨ أثبت بنفسك.

٢٩ [١] ٦٠° [٢] ١٣٠°

٣٠ ١٢٠°

٣١ ٢٠°

٣٢ ٨٥°

٣٣ اذكر بنفسك.

٣٤ : ٤٠ أثبت بنفسك.

٤١ [١] أثبت بنفسك. [٢] منتصف $\overline{أ حـ}$

٤٢ أثبت بنفسك.

٤٣ [١] أثبت بنفسك. [٢] ٥٠°

٤٤ ، ٤٥ أثبت بنفسك.

٤٦ [١] ٧٠° [٢] ٣٥°

٤٧ أثبت بنفسك.

٤٨ ٧ سم

٤٩ [١] ٨ سم [٢] △ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب

٥٠ س = ٥ سم ، ص = ٤ سم

٥١ [١] أثبت بنفسك. [٢] ٤٥°

٥٢ ٥٠°

٥٣ أثبت بنفسك.

٥٤ ٥٠°

٥٥ [١] ٧٢° [٢] ١٠٨°

٥٦ : ٦٢ أثبت بنفسك.

إجابات نماذج امتحانات الكتاب المدرسي في الهندسة

نموذج ١

١ ١ (د) ٢ (أ) ٣ (د)
٤ (أ) ٥ (ب) ٦ (أ)

٢ (أ) متكاملتان ، برهن بنفسك.
(ب) أثبت بنفسك.

٣ (أ) س = ٩ ، ص = ١٧
(ب) ١ ق(∠ب ء حـ) = ٣٠° ، ق(⌒أ ء) = ٦٠°
٢ أثبت بنفسك.

٤ (أ) ١ ق(∠ء م هـ) = ١١٠°
٢ أثبت بنفسك.
(ب) ١ ق(⌒ب ء) الأصغر = ٦٠°
٢ أثبت بنفسك.

٥ (أ) أثبت بنفسك.
(ب) ق(∠ب هـ ء) = ٢٥° ، ق(⌒أ ء ب) = ١٤٠°

نموذج ٢

١ ١ (ب) ٢ (د) ٣ (ب)
٤ (جـ) ٥ (د) ٦ (ب)

٢ (أ) أثبت بنفسك.
(ب) أثبت بنفسك.

٣ (أ) اذكر بنفسك.
(ب) أثبت بنفسك.

٤ (أ) محيط المثلث أ ب حـ = ٢٤ سم
(ب) برهن بنفسك.

٥ أثبت بنفسك.

إجابة امتحان الطلاب المدمجين

١
١ قطرًا ٢ عموديًا على هذا الوتر
٣ متساويتان ٤ ٢
٥ لا نهائي ٦ ١٨٠°

٢
١ (أ) ٢ (أ) ٣ (د)
٤ (جـ) ٥ (د) ٦ (جـ)

٣
١ × ٢ ✓ ٣ ×
٤ ✓ ٥ × ٦ ×

٤
١ ٩٠° ٢ ١٢٠° ٣ ٤٠°
٤ ٥ ٥ ٢٠° ٦ ٢ : ١

إجابات امتحانات المحافظات في الهندسة

١ محافظة القاهرة

المجموعة الأولى

١ (ب) ٢ (د) ٣ (ب)
٤ (أ) ٥ (ب) ٦ (ب)
٧ (جـ) ٨ (د) ٩ (أ)

المجموعة الثانية

١٠ ق(∠أ م ب) = ق(⌒أ ب) = ٦٠° (المطلوب أولًا)
، طول ⌒أ ب = $\frac{٦٠°}{٣٦٠°}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٢١
= ٢٢ سم (المطلوب ثانيًا)

١١ ① ∵ نق$_١$ + نق$_٢$ = ١٠ + ٥ = ١٥ سم
∴ م ن > نق$_١$ + نق$_٢$
∴ الدائرتان متباعدتان
② ∵ نق$_١$ − نق$_٢$ = ١٠ − ٥ = ٥ سم
∴ م ن < نق$_١$ − نق$_٢$
∴ الدائرتان متداخلتان

١٢ ∵ أ حـ قطر في الدائرة م ، أ ب مماسة لها
∴ أ حـ ⊥ أ ب ∴ ق(∠م أ ب) = ٩٠°
، ∵ ق(∠م أ ب) + ق(∠م هـ ب)
= ٩٠° + ٩٠° = ١٨٠°
∴ أ ب هـ م رباعي دائري. (المطلوب أولًا)
، ∵ م هـ ⊥ ء حـ ∴ هـ منتصف ء حـ
∴ ء هـ = $\frac{١}{٢}$ ء حـ = ٣,٥ سم (المطلوب ثانيًا)

١٣ ق(∠أ م حـ) = ٢ ق(∠أ ب حـ)
= ٨٠° (المطلوب أولًا)
في ∆ أ م حـ :
∵ أ م = حـ م = نق
∴ ق(∠أ حـ م) = ق(∠حـ أ م) = $\frac{١٨٠° - ٨٠°}{٢}$
= ٥٠° (المطلوب ثانيًا)

١٤ ∵ أ ب ، أ حـ مماستان للدائرة م عند ب ، حـ
∴ أ ب = أ حـ (١)
، ∵ أ ء ، أ هـ مماستان للدائرة ن عند ء ، هـ
∴ أ ء = أ هـ (٢)
بطرح (٢) من (١) :
∴ ء ب = هـ حـ = ٥ سم (المطلوب أولًا)
، أ ب = أ حـ = ٩ سم
∴ محيط الشكل أ ب م حـ
= ٩ + ٩ + ٤ + ٤ = ٢٦ سم (المطلوب ثانيًا)

١٥ ∵ أ ب حـ ء شكل رباعي دائري
∴ ق(∠أ ء حـ) = ق(∠حـ ب هـ)
= ٦٠° (المطلوب أولًا)
في ∆ أ حـ ء :
∵ ء حـ = ء أ ، ق(∠أ ء حـ) = ٦٠°
∴ ∆ أ حـ ء متساوي الأضلاع. (المطلوب ثانيًا)

١٦ ∵ ق(∠ب أ حـ) = $\frac{١}{٢}$ ق(⌒ب حـ)
= $\frac{١}{٢}$ × ١٢٠° = ٦٠°
∴ ق(∠أ حـ ب) = ١٨٠° − (٧٠° + ٦٠°) = ٥٠°
∴ ق(∠ب أ ء) (المماسية) = ق(∠أ حـ ب) (المحيطية)
= ٥٠° (وهو المطلوب)

٢ محافظة الجيزة

المجموعة الأولى

١ (ب) ٢ (ب) ٣ (ب)
٤ (جـ) ٥ (ب) ٦ (د)
٧ (أ) ٨ (جـ) ٩ (جـ)

المجموعة الثانية

١٠ ∵ أ ب ، أ حـ مماستان للدائرة م
∴ أ ب = أ حـ

∴ ق(∠ا ب حـ) = ق(∠ا حـ ب)
= (١٨٠° - ٤٠°) / ٢ = ٧٠°
، ∵ ق(∠حـ ب ء) (المحيطية)
= ق(∠ا ب حـ) (المماسية) = ٧٠°
∴ ب حـ ينصف ∠ا ب ء (المطلوب أولاً)
، ق(∠حـ م ء) = ٢ ق(∠حـ ب ء)
= ٢ × ٧٠° = ١٤٠°
(مركزية ومحيطية مشتركتان في حـ ء⌒) (المطلوب ثانياً)

١١ ∵ ∠ا هـ ء خارجة عن ∆ ا ب هـ
∴ ق(∠ا ب هـ) = ١١٠° - ٦٥° = ٤٥°
∴ ق(∠ا ب ء) = ق(∠ا حـ ء)
وهما مرسومتان على القاعدة ا ء
∴ ا ب حـ ء رباعي دائري. (وهو المطلوب)

١٢ ∵ س ص // ب حـ ، ا حـ قاطع لهما
∴ ق(∠ا ص س) = ق(∠ا حـ ب) (بالتناظر)
، ∵ ا ء مماس للدائرة م
∴ ق(∠ب ا ء) (المماسية)
= ق(∠ا حـ ب) (المحيطية)
∴ ق(∠س ا ء) = ق(∠ا ص س)
∴ ا ء مماس للدائرة المارة بالنقط ا ، س ، ص
(وهو المطلوب)

١٣ في ∆ م ب حـ :
∵ م ب = م حـ = نق
∴ ق(∠م ب حـ) = ق(∠م حـ ب) = ٢٠°
∴ ق(∠ب م حـ) = ١٨٠° - (٢٠° + ٢٠°) = ١٤٠°
∴ ق(∠ب ا حـ) = ½ ق(∠ب م حـ)
= ½ × ١٤٠° = ٧٠°
(محيطية ومركزية مشتركتان في ب حـ⌒) (وهو المطلوب)

١٤ ∵ ا ب حـ ء رباعي دائري
∴ ق(∠ا ء حـ) = ق(∠ا ب هـ) = ١١٠°
في ∆ ا حـ ء :
∴ ق(∠حـ ء ا) = ١٨٠° - (١١٠° + ٣٥°) = ٣٥°
∴ ق(∠ا حـ ء) = ق(∠حـ ء ا)
∴ ق(ا ء⌒) = ق(حـ ء⌒) (وهو المطلوب)

١٥ ∵ م ء ⊥ ا ب ∴ ق(∠ا ء م) = ٩٠°
، هـ منتصف ا حـ ∴ م هـ ⊥ ا حـ
∴ ق(∠ا هـ م) = ٩٠°
من الشكل الرباعي ا ء م هـ :
∴ ق(∠ء م هـ) = ٣٦٠° - (٤٦° + ٩٠° + ٩٠°)
= ١٣٤° (المطلوب أولاً)
∵ ا ب = ا حـ ∴ م ء = م هـ = ٦ سم
∴ م س = ٦ + ٨ = ١٤ سم
∴ محيط الدائرة = ٢ × ٢٢/٧ × ١٤
= ٨٨ سم (المطلوب ثانياً)

١٦ ∵ ق(ب ء⌒) = ٢ ق(∠ب ا ء) = ٢ × ٢٢° = ٤٤°
، ∵ ق(∠هـ) = ½ [ق(ا حـ⌒) - ق(ب ء⌒)]
∴ ٣٠° = ½ [ق(ا حـ⌒) - ٤٤°]
∴ ٦٠° = ق(ا حـ⌒) - ٤٤°
∴ ق(ا حـ⌒) = ٦٠° + ٤٤° = ١٠٤° (وهو المطلوب)

٣ محافظة الإسكندرية

١ (ا) ٢ (د) ٣ (ب)

٤ ∵ ا س ، ا ع مماستان للدائرة م
∴ ا س = ا ع = ٥ سم
، ب س ، ب ص مماستان للدائرة م
∴ ب س = ب ص = ٨ سم
، حـ ص ، حـ ع مماستان للدائرة م
∴ حـ ص = حـ ع = ٧ سم

∴ محيط ∆ ا ب حـ = ٥ + ٥ + ٨ + ٨ + ٧ + ٧
= ٤٠ سم (وهو المطلوب)

٥ ∵ ء منتصف ب حـ ∴ م ء ⊥ ب حـ
∴ ق(∠هـ ء م) = ٩٠°
، ∵ ا هـ مماس للدائرة م ∴ م هـ ⊥ ا هـ
∴ ق(∠م هـ ا) = ٩٠°
من الشكل الرباعي ا هـ م ء :
∴ ق(∠هـ ا ء) = ٣٦٠° - (١١٥° + ٩٠° + ٩٠°)
= ٦٥° (وهو المطلوب)

٦ (حـ) ٧ (د) ٨ (ا)

٩ طول القوس = ٣/٤ × ٢ × ٢٢/٧ × ٢١
= ٩٩ سم (وهو المطلوب)

١٠ (حـ) ١١ (ب) ١٢ (ا)

١٣ ∵ س منتصف ا ب ∴ م س ⊥ ا ب
، ∵ ا ب = حـ ء ، م ص ⊥ حـ ء
∴ م س = م ص
، ∵ م هـ = م و = نق
وبالطرح : ∴ س هـ = ص و (وهو المطلوب)

١٤ العمل : نرسم ب ء
البرهان :
∵ ا ء = ب حـ = ء حـ
، ا ب قطر في الدائرة
∴ ق(ا ء⌒) = ق(ب حـ⌒) = ق(ء حـ⌒) = ٦٠°
∴ ق(∠ا ب ء) = ق(∠ب ء حـ)
وهما في وضع تبادل
∴ ء حـ // ا ب (المطلوب أولاً)
، ∵ ق(ء حـ ب⌒) = ٦٠° + ٦٠° = ١٢٠°
∴ ق(∠ء ا ب) = ½ ق(ء حـ ب⌒) = ½ × ١٢٠°
= ٦٠°
∴ ق(∠هـ ء ا) = ١٨٠° - ٦٠°
= ١٢٠° (المطلوب ثانياً)

١٥ في ∆ ا ء هـ : ∵ ا هـ = ء هـ
∴ ق(∠ء ا هـ) = ق(∠ا ء هـ) = ٣٥°
∴ ق(∠هـ) = ١٨٠° - (٣٥° + ٣٥°)
= ١١٠° (المطلوب أولاً)
∴ ق(∠هـ) = ق(∠ا ب حـ)
∴ ا ب ء هـ رباعي دائري (المطلوب ثانياً)

١٦ ∵ هـ ا ، هـ ب قطعتان مماستان للدائرة م
∴ هـ ا = هـ ب
∴ ق(∠هـ ا ب) = ق(∠هـ ب ا) = (١٨٠° - ٨٠°) / ٢
= ٥٠°
∴ ق(∠ا ء ب) (المحيطية)
= ق(∠ا ب هـ) (المماسية) = ٥٠°
، ∵ ا ب حـ ء رباعي دائري
∴ ق(∠ب ا ء) = ١٨٠° - ١٣٠° = ٥٠°
∴ ق(∠ب ا ء) = ق(∠ا ء ب)
∴ ب ا = ب ء (المطلوب أولاً)
، ∵ ق(∠هـ ا ب) = ق(∠ب ا ء) = ٥٠°
∴ ا ب ينصف ∠هـ ا ء (المطلوب ثانياً)

٤ محافظة القليوبية

المجموعة الأولى

١ (حـ) ٢ (حـ) ٣ (حـ)
٤ (ب) ٥ (حـ) ٦ (ا)
٧ (حـ) ٨ (حـ) ٩ (د)

المجموعة الثانية

١٠ العمل : نرسم م ء ، م هـ
البرهان :
∵ ا ب مماس للدائرة الصغرى عند ء

∴ م ء ⊥ أب

، ∵ أحـ مماس للدائرة الصغرى عند هـ

∴ م هـ ⊥ أحـ

، ∵ م ء = م هـ

(طولا نصفى قطرين فى الدائرة الصغرى)

∴ أب = أحـ (وهو المطلوب)

11 ∵ أب مماس للدائرة م ∴ م ب ⊥ أب

∴ ق(∠أ ب م) = ٩٠°

فى △ أ ب م :

∴ ق(∠ب م أ) = ١٨٠° - (٣٠° + ٩٠°) = ٦٠°

، ∵ ق(∠ب حـ ء) = ½ ق(∠ب م ء)

(محيطية ومركزية مشتركتان فى ⌒ب ء)

∴ ق(∠ب حـ أ) = ½ × ٦٠°

= ٣٠° (وهو المطلوب)

12 ق(∠أ) = ½ [ق(⌒حـ هـ) - ق(⌒ب ء)]

= ½ (١٢٠° - ٣٠°)

= ٤٥° (وهو المطلوب)

13 ∵ أ ب حـ ء رباعى دائرى

∴ ق(∠أ ء حـ) = ق(∠أ ب هـ) = ٧٥°

، ∵ ق(∠ب ء حـ) = ½ ق(⌒ب حـ)

= ½ × ١٢٠° = ٦٠°

∴ ق(∠أ ء ب) = ٧٥° - ٦٠° = ١٥° (وهو المطلوب)

14 ∵ أب قطعة مماسة ∴ م ب ⊥ أب

∴ ق(∠أ ب م) = ٩٠°

، ∵ ء منتصف حـ هـ ∴ م ء ⊥ حـ هـ

∴ ق(∠أ ء م) = ٩٠°

∴ ق(∠أ ب م) + ق(∠أ ء م) = ٩٠° + ٩٠°

= ١٨٠°

∴ أ ب م ء رباعى دائرى. (وهو المطلوب)

15 ∵ أب ، أحـ مماستان للدائرة م

∴ أب = أحـ

∴ ق(∠أ ب حـ) = ق(∠أ حـ ب) = (١٨٠° - ٤٠°) ÷ ٢

= ٧٠°

، ∵ أب مماسة للدائرة

∴ م ب ⊥ أب ∴ ق(∠أ ب م) = ٩٠°

∴ ق(∠حـ ب ء) = ٩٠° - ٧٠° = ٢٠°

(وهو المطلوب)

16 ∵ ق(∠ب أ حـ) = ½ ق(⌒ب حـ) = ½ × ٧٠°

= ٣٥°

فى △ أ ب حـ :

∴ ق(∠أ حـ ب) = ١٨٠° - (١١٠° + ٣٥°)

= ٣٥°

∴ ق(∠ب أ ء) (المماسية)

= ق(∠أ حـ ب) (المحيطية) = ٣٥°

(وهو المطلوب)

5 محافظة الشرقية

السؤال الأول

(أ) ① (ب) ② (أ) ③ (أ)

(ب) ∵ ب حـ ء هـ رباعى دائرى

∴ ق(∠حـ ب هـ) = ١٨٠° - ١٢٥° = ٥٥°

، ∵ أب ، أحـ مماسان للدائرة م

∴ أب = أحـ

∴ ق(∠أ ب حـ) = ق(∠أ حـ ب) = (١٨٠° - ٧٠°) ÷ ٢

= ٥٥°

، ∵ ق(∠أ حـ ب) (المماسية)

= ق(∠ب هـ حـ) (المحيطية) = ٥٥°

∴ ق(∠حـ ب هـ) = ق(∠حـ هـ ب)

∴ حـ ب = حـ هـ (المطلوب أولاً)

∵ ق(∠حـ ب هـ) = ق(∠أ حـ ب) = ٥٥°

وهما فى وضع تبادل

∴ أحـ // ب هـ (المطلوب ثانياً)

السؤال الثانى

(أ) فى △ أ ب حـ :

∵ ق(∠ب) = ق(∠حـ)

∴ أب = أحـ (1)

، ∵ ق(∠ب) = ق(∠حـ)

∴ ق(⌒ب س ص) = ق(⌒حـ ص س)

بطرح ق(⌒س ص) من الطرفين

∴ ق(⌒ب س) = ق(⌒حـ ص)

∴ ب س = حـ ص (2)

بطرح (2) من (1) :

∴ أ س = أ ص (وهو المطلوب)

(ب) فى △ أ ب حـ :

∵ أب = أحـ

∴ ق(∠أ ب حـ) = ق(∠أ حـ ب) = (١٨٠° - ٨٠°) ÷ ٢

= ٥٠°

∴ ق(∠أ ب حـ) = ق(∠أ حـ ء)

∴ حـ ء مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، حـ (وهو المطلوب)

السؤال الثالث

(أ) ① (د) ② (أ) ③ (ب)

(ب) ∵ س منتصف أب ∴ م س ⊥ أب

∴ ق(∠أ س م) = ٩٠°

، ∵ ص منتصف أحـ ∴ م ص ⊥ أحـ

∴ ق(∠أ ص م) = ٩٠°

من الشكل الرباعى أ س م ص :

∴ ق(∠ء م هـ) = ٣٦٠° - (٩٠° + ٩٠° + ٥٠°)

= ١٣٠° (المطلوب أولاً)

، ∵ أب = أحـ

∴ م س = م ص

، ∵ م ء = م هـ = نق

وبالطرح : ∴ ء س = هـ ص (المطلوب ثانياً)

السؤال الرابع

(أ) ① (أ) ② (د) ③ (أ)

(ب) ∵ أب قطر فى الدائرة م

∴ ق(∠أ حـ ب) = ٩٠°

∴ ق(∠ب أ حـ) = ١٨٠° - (٩٠° + ٤٠°) = ٥٠°

، ∵ أحـ // م ء ، أب قاطع لهما

∴ ق(∠أ م ء) = ق(∠ب أ حـ) = ٥٠° (بالتبادل)

∴ ق(∠أ حـ ء) = ½ ق(∠أ م ء) = ½ × ٥٠°

= ٢٥°

(محيطية ومركزية مشتركتان فى ⌒أ ء) (وهو المطلوب)

السؤال الخامس

(أ) ∵ ق(∠أ هـ حـ) = ½ [ق(⌒أحـ) + ق(⌒ب ء)]

، ∵ ق(⌒أحـ) = ق(⌒ب ء)

∴ ق(∠أ هـ حـ) = ½ [ق(⌒أحـ) + ق(⌒أحـ)]

∴ ق(∠أ هـ حـ) = ق(⌒أحـ)

، ∵ ق(∠أ م حـ) = ق(⌒أحـ)

∴ ق(∠أ هـ حـ) = ق(∠أ م حـ)

وهما مرسومتان على القاعدة أحـ

∴ أ حـ م هـ رباعى دائرى (وهو المطلوب)

(ب) ∵ أب قطر فى الدائرة م

∴ ق(∠أ حـ ب) = ٩٠°

، ∵ ء هـ ⊥ أب ∴ ق(∠ء هـ أ) = ٩٠°
∴ ق(∠أ حـ ب) + ق(∠ء هـ أ)
= ٩٠° + ٩٠° = ١٨٠°
∴ أ هـ ء حـ رباعي دائري (المطلوب أولاً)
∴ ق(∠ب ء هـ) = ق(∠ب أ حـ)
، ∵ ق(∠ب أ حـ) = ½ ق(ب حـ⌒)
∴ ق(∠ب ء هـ) = ½ ق(ب حـ⌒) (المطلوب ثانياً)

٦ محافظة المنوفية

السؤال الأول

(أ) ① (حـ) ② (ب) ③ (حـ)

(ب) ∵ هـ منتصف أب ∴ م هـ ⊥ أب
، ∵ و منتصف حـ ء ∴ م و ⊥ حـ ء
، ∵ أب = حـ ء ∴ م هـ = م و
∴ في △ هـ م و:
ق(∠هـ و م) = ق(∠م هـ و) = (١٨٠° - ١٢٠°) ÷ ٢
= ٣٠° (وهو المطلوب)

السؤال الثاني

(أ) ① (أ) ② (أ) ③ (د)

(ب) ∵ أ ب حـ ء رباعي دائري
∴ ق(∠ب أ ء) = ١٨٠° - ٧٠° = ١١٠°
في △ أ ب ء:
∴ ق(∠أ ب ء) = ١٨٠° - (١١٠° + ٣٠°)
= ٤٠° (وهو المطلوب)

السؤال الثالث

(أ) ① (د) ② (ب) ③ (حـ)

(ب) ∵ أء // س ص ، أب قاطع لهما
∴ ق(∠أ س ص) = ق(∠س أ ء) (بالتبادل)
، ∵ ق(∠حـ) (المحيطية)
= ق(∠ب أ ء) (المماسية)
∴ ق(∠حـ) = ق(∠أ س ص)
∴ س ص حـ ب رباعي دائري. (وهو المطلوب)

السؤال الرابع

(أ) ∵ أب ، أحـ قطعتان مماستان للدائرة م
∴ أب = أحـ
∴ ق(∠أ ب حـ) = ق(∠أ حـ ب) = (١٨٠° - ٤٠°) ÷ ٢
= ٧٠°
، ∵ ق(∠ب حـ ء) = ½ ق(∠ب م ء)
= ½ × ١٤٠° = ٧٠°
(محيطية ومركزية مشتركتان في ب ء⌒)
∴ ق(∠أ ب حـ) = ق(∠ب حـ ء)
وهما في وضع تبادل
∴ أب // حـ ء (وهو المطلوب)

(ب) في △ أ ب هـ : ∵ أب = هـ ب
∴ ق(∠أ) = ق(∠أ هـ ب)
، ∵ ق(∠أ) = ق(∠حـ)
(من خواص متوازي الأضلاع)
∴ ق(∠حـ) = ق(∠أ هـ ب)
∴ هـ ب حـ ء رباعي دائري. (وهو المطلوب)

السؤال الخامس

(أ) ∵ ق(∠أ) = ½ ق(∠ب م ء) = س
(محيطية ومركزية مشتركتان في ب ء⌒)
، ∵ أ ب حـ ء رباعي دائري
∴ ق(∠أ) + ق(∠ب حـ ء) = ١٨٠°
∴ س + ٢ س = ١٨٠°
∴ ٣ س = ١٨٠° ∴ س = ٦٠°
∴ ق(∠أ) = ٦٠° (وهو المطلوب)

(ب) ∵ ق(∠هـ) = ½ [ق(أحـ⌒) - ق(ب ء⌒)]
∴ ٣٠° = ½ [١٢٠° - ق(ب ء⌒)]
∴ ٦٠° = ١٢٠° - ق(ب ء⌒)
∴ ق(ب ء⌒) = ١٢٠° - ٦٠° = ٦٠° (المطلوب أولاً)
، ∵ أب = حـ ء
∴ ق(أب⌒) = ق(حـ ء⌒) = (٣٦٠° - (١٢٠° + ٦٠°)) ÷ ٢
= ٩٠° (المطلوب ثانياً)

٧ محافظة الغربية

المجموعة الأولى

1 (ب) 2 (حـ) 3 (ب)
4 (د) 5 (ب) 6 (حـ)
7 (أ) 8 (حـ) 9 (أ)

المجموعة الثانية

10 ∵ ق(∠أ حـ ب) (المحيطية)
= ق(∠ب أ هـ) (المماسية) = ٦٠°
في △ أ ب حـ:
∴ ق(∠أ ب حـ) = ١٨٠° - (٣٠° + ٦٠°) = ٩٠°
∴ أحـ قطر في الدائرة. (وهو المطلوب)

11 ∵ ق(∠أ هـ حـ) = ½ [ق(أحـ⌒) + ق(ب ء⌒)]
= ½ (١٠٠° + ٥٠°) = ٧٥°
∴ ق(∠أ هـ ء) = ١٨٠° - ٧٥°
= ١٠٥° (وهو المطلوب)

12 ∵ أب مماس للدائرة م ∴ م ب ⊥ أب
∴ ق(∠أ ب م) = ٩٠°
∴ في △ أ ب م:
ق(∠أ م ب) = ١٨٠° - (٩٠° + ٤٠°) = ٥٠°
∴ ق(∠ب ء حـ) = ½ ق(∠ب م حـ)
= ½ × ٥٠° = ٢٥°
(محيطية ومركزية مشتركتان في ب حـ⌒)
(وهو المطلوب)

13 ∵ س ص // أ ء ، أحـ قاطع لهما
∴ ق(∠حـ س ص) = ق(∠حـ أ ء) (بالتناظر)
، ∵ ق(∠حـ ب ء) = ق(∠حـ أ ء)
(محيطيتان مشتركتان في حـ ء⌒)
∴ ق(∠حـ س ص) = ق(∠حـ ب ص)
وهما مرسومتان على القاعدة حـ ص
∴ ب س ص حـ رباعي دائري. (وهو المطلوب)

14 ∵ أب قطر في الدائرة ∴ ق(∠حـ) = ٩٠°
، ∵ و منتصف ء هـ ∴ م و ⊥ ء هـ
∴ ق(∠أ و ل) = ٩٠°
∴ ق(∠حـ) = ق(∠أ و ل) = ٩٠°
∴ ل حـ ب و رباعي دائري. (وهو المطلوب)

15 ∵ أب ، أحـ مماسان للدائرة م
∴ أب = أحـ
∴ ق(∠أ ب حـ) = ق(∠أ حـ ب)
، ∵ أحـ // ب ء ، ب حـ قاطع لهما
∴ ق(∠حـ ب ء) = ق(∠أ حـ ب) (بالتبادل)
∴ ق(∠أ ب حـ) = ق(∠حـ ب ء)
∴ ب حـ ينصف ∠ أ ب ء (وهو المطلوب)

16 ∵ ء هـ // ب حـ
∴ ق(حـ هـ⌒) = ق(ب ء⌒) = ٥٠°
∴ ق(∠حـ أ هـ) = ½ ق(حـ هـ⌒)
= ½ × ٥٠° = ٢٥°
∴ ٣ ص - ٥ = ٢٥
∴ ٣ ص = ٣٠
∴ ص = ١٠ (وهو المطلوب)

٨ محافظة الدقهلية

السؤال الأول

(أ) ∵ د هـ // ب ح

∴ ق(⌒ ب د) = ق(⌒ ح هـ)

∴ ق(∠ د ب أ) = ق(∠ د ح أ هـ)

وبإضافة ق(∠ د أ ح) للطرفين

∴ ق(∠ د أ ح) = ق(∠ هـ أ ب) (وهو المطلوب)

(ب) ∵ أ ب ح د رباعي دائري

∴ ق(∠ ب ح د) = ١٨٠° − ١١٥° = ٦٥°

، ∵ س و // د ح ، ب ح قاطع لهما

∴ ق(∠ و ب ح) = ق(∠ ب ح د) (بالتبادل)

= ٦٥°

∴ ق(∠ د) = ق(∠ هـ ب ح)

= ٧٠° + ٦٥° = ١٣٥° (وهو المطلوب)

السؤال الثاني

(أ) (١) (جـ) (٢) (جـ) (٣) (ب)

(ب) ∵ أ ب قطر في الدائرة م

∴ ق(∠ أ ح ب) = ٩٠°

في △ أ ب ح :

∴ ق(∠ ب أ ح) = ١٨٠° − (٩٠° + ٥٠°)

= ٤٠°

، ∵ أ ح // د م ، أ ب قاطع لهما

∴ ق(∠ أ م د) = ق(∠ ب أ ح) = ٤٠° (بالتبادل)

∴ ق(∠ أ ح د) = ½ ق(∠ أ م د)

= ½ × ٤٠° = ٢٠°

(محيطية ومركزية مشتركتان في ⌒ أ د) (وهو المطلوب)

السؤال الثالث

(أ) (١) (جـ) (٢) (أ) (٣) (د)

(ب) في △ أ ب ح :

∵ أ ح = ب ح

∴ ق(∠ ب أ ح) = ق(∠ ب)

، ∵ ق(∠ ب) = ق(∠ د) (خواص متوازي الأضلاع)

∴ ق(∠ ب أ ح) = ق(∠ د)

∴ أ ب مماسة للدائرة المارة برؤوس △ أ ح د (وهو المطلوب)

السؤال الرابع

(أ) في △ أ ب د : ∵ أ ب = أ د

∴ ق(∠ أ ب د) = ق(∠ أ د ب) = س

∴ ق(∠ أ) = ١٨٠° − (س + س)

= ١٨٠ − ٢ س

في △ ب ح د : ∵ د ب = د ح

∴ ق(∠ د ب ح) = ق(∠ د ح) = ٢ س

∴ ق(∠ أ) + ق(∠ ح)

= ١٨٠° − ٢ س + ٢ س = ١٨٠°

∴ أ ب ح د رباعي دائري. (وهو المطلوب)

(ب) ∵ أ ب ، أ ح قطعتان مماستان للدائرة

∴ أ ب = أ ح = ١٣ سم

، ∵ هـ ب ، هـ د قطعتان مماستان للدائرة

∴ هـ ب = هـ د

، ∵ و ح ، و د قطعتان مماستان للدائرة

∴ و ح = و د

∴ محيط △ أ هـ و = أ هـ + هـ د + أ و + و د

= أ هـ + هـ ب + أ و + و ح

= أ ب + أ ح = ١٣ + ١٣

= ٢٦ سم (وهو المطلوب)

السؤال الخامس

(أ) (١) (أ) (٢) (جـ) (٣) (د)

(ب) ∵ د منتصف أ ب ∴ م د ⊥ أ ب

∴ ق(∠ أ د م) = ٩٠°

، ∵ هـ منتصف أ ح ∴ م هـ ⊥ أ ح

∴ ق(∠ أ هـ م) = ٩٠°

من الشكل الرباعي أ د م هـ :

∴ ق(∠ د م هـ) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ٧٠°)

= ١١٠° (المطلوب أولاً)

، ∵ أ ب = أ ح ∴ م د = م هـ

، ∵ م س = م ص = نق

وبالطرح : ∴ د س = هـ ص (المطلوب ثانياً)

٩ محافظة الإسماعيلية

المجموعة الأولى

١ (ب) ٢ (د) ٣ (د)

٤ (د) ٥ (ب) ٦ (أ)

٧ (جـ) ٨ (جـ) ٩ (أ)

المجموعة الثانية

١٠ ∵ ب هـ مماس للدائرة

∴ ق(∠ ب أ د) + ق(∠ ح) = ١٨٠°

∴ ق(∠ ب أ د) = ١٨٠° − ٥٠°

= ١٣٠° (وهو المطلوب)

١١ ∵ ق(∠ ب) = ق(∠ ح) ∴ أ ب = أ ح

، ∵ س منتصف أ ب ∴ م س ⊥ أ ب

، ∵ م ص ⊥ أ ح ∴ م س = م ص

(وهو المطلوب)

١٢ ∵ أ ب ح د رباعي دائري

∴ ق(∠ د) = ١٨٠° − ٧٠° = ١١٠°

، ∵ ق(⌒ أ د) = ق(⌒ ح د)

∴ أ د = ح د

∴ في △ أ د ح :

ق(∠ د ح أ) = ق(∠ د أ ح) = $\frac{180° - 110°}{2}$

= ٣٥° (المطلوب أولاً)

، ∵ أ ب قطر في الدائرة

∴ ق(∠ أ ح ب) = ٩٠°

∴ في △ أ ب ح :

ق(∠ ح أ ب) = ١٨٠° − (٩٠° + ٧٠°)

= ٢٠° (المطلوب ثانياً)

١٣ ∵ ق(∠ أ د ب) = ½ ق(∠ أ م ب)

= ½ × ١٤٠° = ٧٠°

(محيطية ومركزية مشتركتان في ⌒ أ ب)

، ∵ أ ح // د ب ، أ د قاطع لهما

∴ ق(∠ ح أ د) + ق(∠ أ د ب) = ١٨٠°

(زاويتان داخلتان وفي جهة واحدة من القاطع)

∴ ق(∠ ح أ د) = ١٨٠° − ٧٠° = ١١٠°

(وهو المطلوب)

١٤ في △ أ هـ د : ∵ أ د = د هـ

∴ ق(∠ أ) = ق(∠ أ هـ د)

، ∵ ق(∠ أ) = ق(∠ ح) (خواص متوازي الأضلاع)

∴ ق(∠ ح) = ق(∠ أ هـ د)

∴ هـ ب ح د رباعي دائري. (وهو المطلوب)

١٥ ∵ ق(∠ أ ب ح) (المماسية)

= ق(∠ ب د ح) (المحيطية) = ٦٥°

، ∵ أ ب ، أ ح قطعتان مماستان للدائرة

∴ أ ب = أ ح

∴ ق(∠ أ ح ب) = ق(∠ أ ب ح) = ٦٥°

∴ ق(∠ ب أ ح) = ١٨٠° − (٦٥° + ٦٥°)

= ٥٠° (وهو المطلوب)

16 ∵ أ ب حـ ء رباعى دائرى

∴ ق(∠ أ ء حـ) = ق(∠ حـ ب هـ) = 95°

، ∵ ق(∠ أ ء ب) = $\frac{1}{2}$ ق(⌒أ ب)

= $\frac{1}{2}$ × 110° = 55°

∴ ق(∠ ب ء حـ) = 95° − 55° = 40°

(وهو المطلوب)

10 محافظة السويس

المجموعة الأولى

1 (د) 2 (جـ) 3 (أ)

4 (د) 5 (أ) 6 (ب)

7 (جـ) 8 (د) 9 (ب)

المجموعة الثانية

10 ∵ ء منتصف أ ب ∴ م ء ⊥ أ ب

، ∵ هـ منتصف أ حـ ∴ م هـ ⊥ أ حـ

، ∵ أ ب = أ حـ ∴ م ء = م هـ

، ∵ م س = م ص = نق

وبالطرح : ∴ ء س = هـ ص (وهو المطلوب)

11 ∵ ق(∠ م) = 2 ق(∠ ب)

(مركزية ومحيطية مشتركتان فى ⌒أ حـ)

∴ ق(∠ م) = 2 × 30° = 60°

، ∵ أ ب // حـ م ، أ م قاطع لهما

∴ ق(∠ أ) = ق(∠ م) = 60° (بالتبادل)

(وهو المطلوب)

12 ∵ ق(⌒أ حـ) = 2 ق(∠ ب) = 2 × 40° = 80°

، ∵ أ ب قطر فى الدائرة

∴ ق(⌒أ ب) = 180°

∴ ق(⌒حـ ب) = 180° − 80° = 100°

، ∵ هـ ء // ب حـ

∴ ق(⌒حـ ء) = ق(⌒ب ء) = $\frac{1}{2}$ × 100°

= 50° (وهو المطلوب)

13 فى △ أ ب حـ :

ق(∠ ب) = 180° − (50° + 30°) = 100°

، ∵ أ ب حـ ء رباعى دائرى

∴ ق(∠ ء) = 180° − 100° = 80°

(وهو المطلوب)

14 ∵ أ هـ قطر فى الدائرة

∴ ق(∠ أ ء هـ) = 90°

، ∵ أ حـ ⊥ ب حـ

∴ ق(∠ أ حـ ب) = 90°

∴ ق(∠ أ ء ب) = ق(∠ أ حـ ب) = 90°

وهما مرسومتان على القاعدة أ ب

∴ أ ب حـ ء رباعى دائرى. (وهو المطلوب)

15 ∵ أ ب ، أ حـ مماسان للدائرة

∴ أ ب = أ حـ

∴ ق(∠ أ ب حـ) = ق(∠ أ حـ ب)

= $\frac{180° - 40°}{2}$ = 70°

، ∵ ب حـ ء هـ رباعى دائرى

∴ ق(∠ حـ ب هـ) = 180° − 110° = 70°

∴ ق(∠ أ ب حـ) = ق(∠ حـ ب هـ)

∴ ب حـ ينصف ∠ أ ب هـ (المطلوب أولًا)

، ∵ ق(∠ حـ ب هـ) = ق(∠ أ حـ ب) = 70°

وهما فى وضع تبادل

∴ ب هـ // أ حـ (المطلوب ثانيًا)

16 فى △ أ ب حـ :

∵ ق(∠ ب أ حـ) = 90°

∴ جتا حـ = $\frac{4}{8}$ = $\frac{1}{2}$

∴ ق(∠ حـ) = 60°

∴ ق(∠ حـ) = ق(∠ ب أ ء)

∴ أ ء مماس للدائرة المارة برؤوس △ أ ب حـ

(وهو المطلوب)

11 محافظة دمياط

السؤال الأول

(أ) ① (أ) ② (ب) ③ (جـ)

(ب) ∵ م هـ ⊥ أ ب ∴ أ هـ = ب هـ = 5 سم

فى △ أ م هـ :

∵ ق(∠ أ هـ م) = 90° ، ق(∠ أ م هـ) = 30°

∴ أ م = 2 أ هـ = 2 × 5 = 10 سم

∴ حـ ء = 2 أ م = 2 × 10 = 20 سم

(وهو المطلوب)

السؤال الثانى

(أ) ① (جـ) ② (أ) ③ (د)

(ب) ق(∠ هـ أ حـ) = $\frac{1}{2}$ [ق(⌒هـ حـ) − ق(⌒ب ء)]

= $\frac{1}{2}$ (100° − 30°) = 35°

(وهو المطلوب)

السؤال الثالث

(أ) ① (جـ) ② (ب) ③ (د)

(ب) ∵ س أ ، س ب مماسان للدائرة

∴ س أ = س ب

∴ ق(∠ س أ ب) = ق(∠ س ب أ)

= $\frac{180° - 70°}{2}$ = 55°

، ∵ أ ب حـ ء رباعى دائرى

∴ ق(∠ ب أ ء) = 180° − 125° = 55°

∴ ق(∠ س أ ب) = ق(∠ ب أ ء) = 55°

∴ أ ب ينصف ∠ ء أ س (وهو المطلوب)

السؤال الرابع

(أ) ∵ أ ب // حـ ء

∴ ق(⌒أ حـ) = ق(⌒ب ء)

∴ ق(∠ أ) = ق(∠ ب) ∴ أ و = ب و

∴ △ أ و ب متساوى الساقين. (وهو المطلوب)

(ب) ∵ أ س // حـ و ، أ ء قاطع لهما

∴ ق(∠ و أ س) = ق(∠ أ و حـ) (بالتبادل)

، ∵ ب حـ و ء رباعى دائرى

∴ ق(∠ ب) = ق(∠ أ و حـ)

∴ ق(∠ ب) = ق(∠ ء أ س)

∴ أ س مماس للدائرة المارة برؤوس △ أ ب ء

(وهو المطلوب)

السؤال الخامس

(أ) فى △ أ ب ء :

∵ أ ب = أ ء

∴ ق(∠ ء) = ق(∠ أ ب ء) = $\frac{180° - 80°}{2}$ = 50°

∴ ق(∠ ء) = ق(∠ حـ) = 50°

وهما مرسومتان على القاعدة أ ب

∴ النقط أ ، ب ، حـ ، ء تمر بها دائرة واحدة

(وهو المطلوب)

(ب) ∵ أ ب مماس للدائرة الصغرى

∴ م ء ⊥ أ ب ∴ ق(∠ أ ء م) = 90°

، ∵ أ حـ مماس للدائرة الصغرى

∴ م و ⊥ أ حـ ∴ ق(∠ أ و م) = 90°

∴ ق(∠ أ ء م) + ق(∠ أ و م) = 90° + 90°

= 180°

∴ أ ء م و رباعى دائرى (المطلوب أولًا)

∴ ق(∠ ء م و) + ق(∠ ء أ و) = 180° (1)

، ∵ ق(∠ د م و) = ق(د و)   (٢)

، ق(∠ ب أ ح) = $\frac{1}{2}$ ق(ب ح)   (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) :

∴ ق(د و) + $\frac{1}{2}$ ق(ب ح) = ١٨٠°

(المطلوب ثانيًا)

١٢ محافظة كفر الشيخ

المجموعة الأولى

١ (أ)   ٢ (ب)   ٣ (ج)

٤ (ج)   ٥ (ب)   ٦ (ب)

٧ (ب)   ٨ (أ)   ٩ (د)

المجموعة الثانية

١٠ ∵ أ ب ح د رباعى دائرى

∴ ق(∠ د) = ق(∠ ب أ هـ) = ١٠٠°

فى △ د أ ح :

∴ ق(∠ د أ ح) = ١٨٠° − (١٠٠° + ٤٠°) = ٤٠°

∴ ق(∠ ح أ د) = ق(∠ أ ح د)

∴ ق(ح د) = ق(أ د)   (وهو المطلوب)

١١ ∵ أب ، أح مماسان للدائرة

∴ أب = أح

∴ ق(∠ أ ب ح) = ق(∠ أ ح ب)

= $\frac{١٨٠° - ٨٠°}{٢}$ = ٥٠°

∴ ق(∠ ب د ح) (المحيطية)

= ق(∠ أ ب ح) (المماسية) = ٥٠°

(وهو المطلوب)

١٢ فى △ أ م ب :

∵ أ م = ب م = نق

∴ ق(∠ م أ ب) = ق(∠ م ب أ) = ٥٠°

∴ ق(∠ أ م ب) = ١٨٠° − (٥٠° + ٥٠°) = ٨٠°

∴ ق(∠ أ ح ب) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ أ م ب)

= $\frac{1}{2}$ × ٨٠° = ٤٠°

(محيطية ومركزية مشتركتان فى أب)

(وهو المطلوب)

١٣ فى △ أ م ح :

∵ (ح م)² = (١٠)² = ١٠٠

، (أ م)² + (أ ح)² = (٦)² + (٨)² = ١٠٠

∴ (ح م)² = (أ م)² + (أ ح)²

∴ ق(∠ م أ ح) = ٩٠°

، ∵ ب ح مماسة للدائرة م

∴ م ب ⊥ ب ح

∴ ق(∠ م ب ح) = ٩٠°

∴ ق(∠ م أ ح) + ق(∠ م ب ح) = ٩٠° + ٩٠°

= ١٨٠°

∴ أ م ب ح رباعى دائرى   (وهو المطلوب)

١٤ ∵ م ن خط المركزين ، أب وتر مشترك

∴ م ن ⊥ أب

، ∵ هـ منتصف أح   ∴ م هـ ⊥ أح

، ∵ أب = أح

∴ م و = م هـ   (وهو المطلوب)

١٥ ∵ أ ب ح د مستطيل ∴ أب = د ح

∴ ق(أب) = ق(د ح)

، ∵ أ هـ = ب ح   ∴ ق(أ هـ) = ق(ب ح)

، بطرح ق(ب هـ) من الطرفين

∴ ق(أب) = ق(ح هـ)

∴ ق(د ح) = ق(ح هـ)

∴ د ح = ح هـ   (وهو المطلوب)

١٦ ∵ س ص // ب ح

، أ ح قاطع لهما

∴ ق(∠ أ ص س)

= ق(∠ ح) (بالتناظر)

، ∵ ق(∠ د أ ب) (المماسية) = ق(∠ ح) (المحيطية)

∴ ق(∠ أ ص س) = ق(∠ د أ س)

∴ أ د مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، س ، ص

(وهو المطلوب)

١٣ محافظة البحيرة

المجموعة الأولى

١ (ب)   ٢ (د)   ٣ (ب)

٤ (أ)   ٥ (ج)   ٦ (ج)

٧ (د)   ٨ (أ)   ٩ (ج)

المجموعة الثانية

١٠ فى △ أ ب ح :

∵ ق(∠ ب) = ق(∠ ح)   ∴ أب = أح

، ∵ س منتصف أب   ∴ م س ⊥ أب

، ∵ م ص ⊥ أح

∴ م س = م ص   (وهو المطلوب)

١١ ∵ ق(ب ح) = ٢ ق(∠ ب أ ح) = ٢ × ٣٠° = ٦٠°

، ∵ أب قطر فى الدائرة م

∴ ق(أ ح) = ١٨٠° − ٦٠° = ١٢٠°

، ∵ د منتصف أح

∴ ق(أ د) = ق(د ح) = $\frac{1}{2}$ × ١٢٠° = ٦٠°

∴ ق(∠ د ب أ) = $\frac{1}{2}$ ق(أ د) = $\frac{1}{2}$ × ٦٠° = ٣٠°

، ق(∠ ح د أ) = $\frac{1}{2}$ ق(د ح) = $\frac{1}{2}$ × ٦٠° = ٣٠°

(وهو المطلوب)

١٢ ∵ ح هـ ⊥ أب   ∴ ق(∠ أ هـ ح) = ٩٠°

، ∵ أ د ⊥ ب ح   ∴ ق(∠ أ د ح) = ٩٠°

∴ ق(∠ أ هـ ح) = ق(∠ أ د ح) = ٩٠°

وهما مرسومتان على القاعدة أح

∴ أ هـ د ح رباعى دائرى.   (المطلوب أولًا)

∴ ق(∠ هـ ح د) = ق(∠ هـ أ د)

مرسومتان على القاعدة هـ د

، ∵ ق(∠ ب ح س) = ق(∠ ب أ س)

(محيطيتان مرسومتان على ب س)

∴ ق(∠ هـ ح ب) = ق(∠ ب ح س)

∴ ح ب ينصف ∠ هـ ح س   (المطلوب ثانيًا)

١٣ ∵ ق(∠ ب د ح) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ ب م ح) = $\frac{1}{2}$ × ١٠٠°

= ٥٠°

(محيطية ومركزية مشتركتان فى ب ح)

، ∵ ∠ أ ب د خارجة عن △ ب ح د

∴ ق(∠ د ح ب) = ١٢٠° − ٥٠° = ٧٠°

(وهو المطلوب)

١٤ ∵ س ص // ب ح ، أ ح قاطع لهما

∴ ق(∠ أ ص س) = ق(∠ ح) (بالتناظر)

، ∵ ق(∠ د أ ب) (المماسية)

= ق(∠ ح) (المحيطية)

∴ ق(∠ أ ص س) = ق(∠ د أ س)

∴ أ د مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، س ، ص

(وهو المطلوب)

١٥ ∵ س ص ، س ع مماسان للدائرة

∴ س ص = س ع

∴ ق(∠ س ع ص) = ق(∠ س ص ع)

= $\frac{١٨٠° - ٤٠°}{٢}$ = ٧٠°

، ∵ ق(∠ص هـ ع) (المحيطية)

= ق(∠س ع ص) (المماسية) = ٧٠°

، ∵ د هـ ص ع رباعى دائرى

∴ ق(∠هـ ص ع) = ١٨٠° - ١١٠° = ٧٠°

∴ ق(∠ص هـ ع) = ق(∠هـ ص ع) = ٧٠°

∴ ع ص = ع هـ (وهو المطلوب)

١٦ ∵ أ ب جـ د رباعى دائرى

∴ ق(∠د) = ق(∠أ ب هـ) = ١٠٠°

فى △ د أ جـ :

∴ ق(∠د أ جـ) = ١٨٠° - (١٠٠° + ٤٠°) = ٤٠°

∴ ق(∠د جـ أ) = ق(∠د أ جـ) = ٤٠°

∴ أ د = د جـ (وهو المطلوب)

١٤ محافظة الفيوم

السؤال الأول

(أ) ① (أ) ② (د) ③ (جـ)

(ب) فى △ أ ب جـ :

∵ ق(∠ب) = ق(∠جـ) ∴ أ ب = أ جـ

، ∵ س منتصف $\overline{أب}$ ∴ $\overline{م س}$ ⊥ $\overline{أب}$

، ∵ $\overline{م ص}$ ⊥ $\overline{أجـ}$

∴ م س = م ص (وهو المطلوب)

السؤال الثانى

(أ) ∵ $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م

∴ ق(∠أ د ب) = ٩٠°

فى △ أ ب د :

∴ ق(∠ب أ د) = ١٨٠° - (٩٠° + ٢٥°) = ٦٥°

، ∵ أ ب جـ د رباعى دائرى

∴ ق(∠جـ) = ١٨٠° - ٦٥° = ١١٥°

(وهو المطلوب)

(ب) ∵ أ د = ب هـ (١)

∴ ق(⌒أ د) = ق(⌒ب هـ)

وبإضافة ق(⌒د هـ) للطرفين

∴ ق(⌒أ د هـ) = ق(⌒ب هـ د)

∴ ق(∠أ) = ق(∠ب)

∴ فى △ أ ب جـ : أ جـ = ب جـ (٢)

بطرح (١) من (٢) :

∴ جـ د = جـ هـ (وهو المطلوب)

السؤال الثالث

(أ) ① (جـ) ② (د) ③ (أ)

(ب) ∵ △ أ ب جـ متساوى الأضلاع

∴ ق(∠أ ب جـ) = ٦٠°

∴ ق(∠أ د جـ) = ق(∠أ ب جـ) = ٦٠°

(محيطيتان مشتركتان فى ⌒أ جـ)

، فى △ أ د هـ :

∵ أ د = د هـ ، ق(∠أ د هـ) = ٦٠°

∴ △ أ د هـ متساوى الأضلاع. (وهو المطلوب)

السؤال الرابع

(أ) ① (د) ② (ب) ③ (أ)

(ب) ∵ $\overleftrightarrow{أو}$ // $\overline{هـ د}$ ، $\overleftrightarrow{أب}$ قاطع لهما

∴ ق(∠أ هـ د) = ق(∠و أ هـ) (بالتبادل)

، ∵ ق(∠أ جـ ب) (المحيطية)

= ق(∠و أ ب) (المماسية)

∴ ق(∠د جـ ب) = ق(∠أ هـ د)

∴ د هـ ب جـ رباعى دائرى. (وهو المطلوب)

السؤال الخامس

(أ) ∵ $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أجـ}$ مماسان للدائرة

∴ أ ب = أ جـ

∴ ق(∠أ ب جـ) = ق(∠أ جـ ب) = $\frac{١٨٠° - ٥٠°}{٢}$

= ٦٥°

، ∵ ب جـ د هـ رباعى دائرى

∴ ق(∠جـ ب هـ) = ١٨٠° - ١١٥° = ٦٥°

∴ ق(∠أ ب جـ) = ق(∠جـ ب هـ) = ٦٥°

∴ $\overleftarrow{ب جـ}$ ينصف ∠أ ب هـ (المطلوب أولاً)

، ∵ ق(∠ب هـ جـ) (المحيطية)

= ق(∠أ ب جـ) (المماسية) = ٦٥°

∴ ق(∠جـ ب هـ) = ق(∠ب هـ جـ) = ٦٥°

∴ جـ ب = جـ هـ (المطلوب ثانيًا)

، ∵ ق(∠جـ ب هـ) = ق(∠أ جـ ب) = ٦٥°

وهما فى وضع تبادل

∴ $\overline{أجـ}$ // $\overline{ب هـ}$ (المطلوب ثالثًا)

(ب) ∵ ق(∠أ ب جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق(⌒أ جـ) = $\frac{١}{٢}$ × ١٠٠°

= ٥٠°

∵ ∠د هـ ب خارجة عن △ هـ ب جـ

∴ ق(∠جـ) = ١١٠° - ٥٠° = ٦٠°

(وهو المطلوب)

١٥ محافظة المنيا

السؤال الأول

① (ب) ② (د) ③ (أ)

④ (د) ⑤ (أ) ⑥ (ب)

السؤال الثانى

(أ) ① (جـ) ② (ب) ③ (جـ)

(ب) ∵ ص منتصف $\overline{أجـ}$ ∴ $\overline{م ص}$ ⊥ $\overline{أجـ}$

، ∵ $\overline{م س}$ ⊥ $\overline{أب}$ ، م س = م ص

∴ أ ب = أ جـ

∴ ق(∠ب) = ق(∠جـ) = ٧٥°

∴ ق(∠ب أ جـ) = ١٨٠° - (٧٥° + ٧٥°)

= ٣٠° (وهو المطلوب)

السؤال الثالث

(أ) ق(∠ب م جـ) = ٢ ق(∠ب أ جـ)

= ٢ × ٥٠° = ١٠٠° (المطلوب أولاً)

(مركزية ومحيطية مشتركتان فى ⌒ب جـ)

فى △ م ب جـ :

∵ م ب = م جـ = نق

∴ ق(∠م ب جـ) = ق(∠م جـ ب)

= $\frac{١٨٠° - ١٠٠°}{٢}$

= ٤٠° (المطلوب ثانيًا)

(ب) قياس القوس = $\frac{٣}{٥}$ × ٣٦٠° = ٢١٦°

طول القوس = $\frac{٣}{٥}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ = ٢٦,٤ سم

السؤال الرابع

(أ) ∵ $\overline{م هـ}$ ⊥ $\overline{أجـ}$ ∴ ق(∠د هـ م) = ٩٠°

، ∵ $\overleftarrow{جـ ب}$ مماس للدائرة م

∴ $\overline{م ب}$ ⊥ $\overline{جـ ب}$ ∴ ق(∠د ب م) = ٩٠°

∴ ق(∠د هـ م) + ق(∠د ب م)

= ٩٠° + ٩٠° = ١٨٠°

∴ هـ م ب جـ رباعى دائرى (المطلوب أولاً)

، ق(∠جـ) = ق(∠د م ب)

، ∵ ق(∠د م ب) = ٢ ق(∠د أ ب)

(مركزية ومحيطية مشتركتان فى ⌒د ب)

∴ ق(∠جـ) = ٢ ق(∠د أ ب) (المطلوب ثانيًا)

(ب) ∵ أ ب = أ جـ

∴ ق(∠ب) = ق(∠جـ)

∴ $\frac{١}{٢}$ ق(∠ب) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠جـ)

∴ ق(∠ص ب س) = ق(∠ص حـ س)

وهما مرسومتان على القاعدة ص س

∴ ب حـ س ص رباعي دائري. (وهو المطلوب)

السؤال الخامس

(أ) ∵ أ ء ، أ هـ مماستان للدائرة

∴ أ ء = أ هـ = ٢ سم

، ∵ ب ء ، ب و مماستان للدائرة

∴ ب ء = ب و = ٥ سم

، ∵ حـ هـ ، حـ و مماستان للدائرة

∴ حـ هـ = حـ و = ٤ سم

∴ محيط Δ أ ب حـ = ٢ + ٢ + ٥ + ٥ + ٤ + ٤

= ٢٢ سم (وهو المطلوب)

(ب) ∵ س ص // ب حـ ، أ ب قاطع لهما

∴ ق(∠أ س ص) = ق(∠ب) (بالتناظر)

، ∵ ق(∠حـ أ ء) (المماسية) = ق(∠ب) (المحيطية)

∴ ق(∠أ س ص) = ق(∠ص أ ء)

∴ أ ء مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، س ، ص

(وهو المطلوب)

١٦ محافظة أسيوط

السؤال الأول

(١) (جـ) (٢) (د) (٣) (ب)

(٤) (أ) (٥) (أ) (٦) (ب)

السؤال الثاني

(أ) ∵ أ ب مماس للدائرة م ∴ م ب ⊥ أ ب

∴ ق(∠أ ب م) = ٩٠°

، ∵ ق(∠ب م حـ) = ٢ ق(∠ب ء حـ)

= ٢ × ٢٥° = ٥٠°

(مركزية ومحيطية مشتركتان في ب حـ⌢)

∴ ق(∠أ) = ١٨٠° - (٩٠° + ٥٠°) = ٤٠°

(وهو المطلوب)

(ب) في Δ أ ب ء :

∵ ق(∠أ ب ء) = ١٨٠° - (٧٥° + ٥٠°) = ٥٥°

∴ ق(∠حـ ب ء) = ١٣٠° - ٥٥° = ٧٥°

∴ ق(∠أ) = ق(∠حـ ب ء)

∴ ب حـ مماسة للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، ء

(وهو المطلوب)

السؤال الثالث

(أ) ∵ Δ أ ب ء متساوي الأضلاع

∴ ق(∠أ) = ٦٠°

، ∵ أ ب حـ ء رباعي دائري

∴ ق(∠حـ) = ١٨٠° - ٦٠° = ١٢٠°

(وهو المطلوب)

(ب) ق(∠ب حـ ء) = ½ ق(∠ب م ء) = ½ × ١٢٠°

= ٦٠°

(المطلوب أولًا)

(محيطية ومركزية مشتركتان في ب ء⌢)

، ∵ أ ب // حـ ء ، ب حـ قاطع لهما

∴ ق(∠أ ب حـ) = ق(∠ب حـ ء)

= ٦٠° (بالتبادل)

، ∵ أ ب ، أ حـ قطعتان مماستان للدائرة

∴ أ ب = أ حـ

∴ ق(∠أ ب حـ) = ق(∠أ حـ ب) = ٦٠°

∴ ق(∠أ) = ١٨٠° - (٦٠° + ٦٠°)

= ٦٠° (المطلوب ثانيًا)

السؤال الرابع

(أ) (١) (ب) (٢) (ب) (٣) (ب)

(ب) ∵ م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ أ حـ ، م س = م ص

∴ أ ب = أ حـ

، ∵ ق(∠ب) = ٦٠°

∴ Δ أ ب حـ متساوي الأضلاع

∴ محيط Δ أ ب حـ = ٣ × ١١ = ٣٣ سم

(وهو المطلوب)

السؤال الخامس

(أ) ∵ س ص // أ ء ، أ ب قاطع لهما

∴ ق(∠ء أ ص) = ق(∠أ ص س) (بالتبادل)

، ∵ ق(∠أ حـ ب) (المحيطية)

= ق(∠ء أ ب) (المماسية)

∴ ق(∠أ حـ ب) = ق(∠أ ص س)

∴ س حـ ب ص رباعي دائري. (وهو المطلوب)

(ب) ∵ أ ب = حـ ء (خواص المستطيل)

، ∵ حـ ء = ء هـ

∴ أ ب = ء هـ

∴ ق(أ ب⌢) = ق(ء هـ⌢) وبإضافة ق(أ هـ⌢) للطرفين

∴ ق(ب هـ⌢) = ق(أ ء⌢)

∴ ب هـ = أ ء (وهو المطلوب)

١٧ محافظة سوهاج

المجموعة الأولى

١ (أ) ٢ (جـ) ٣ (د)

٤ (جـ) ٥ (جـ) ٦ (د)

٧ (جـ) ٨ (د) ٩ (جـ)

المجموعة الثانية

١٠ في Δ أ ب حـ :

∵ أ ب = أ حـ ∴ ق(∠ب) = ق(∠حـ)

∴ ق(حـ هـ ء⌢) = ق(ب ء هـ⌢)

وبطرح ق(ء هـ⌢) من الطرفين

∴ ق(ب ء⌢) = ق(حـ هـ⌢)

∴ ب ء = حـ هـ (وهو المطلوب)

١١ ∵ ق(∠ب حـ ء) = ½ ق(∠ب م ء)

= ½ × ١٢٠° = ٦٠°

(محيطية ومركزية مشتركتان في ب ء⌢)

، ∵ أ ب // حـ ء ، ب حـ قاطع لهما

∴ ق(∠أ ب حـ) = ق(∠ب حـ ء) (بالتبادل) (١)

، ∵ أ ب ، أ حـ قطعتان مماستان للدائرة م

∴ أ ب = أ حـ (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ Δ أ ب حـ متساوي الأضلاع. (وهو المطلوب)

١٢ ∵ ق(أ ص⌢) = ق(أ س⌢)

∴ ق(∠أ ب ص) = ق(∠أ حـ س)

وهما مرسومتان على القاعدة ء هـ

∴ ب حـ هـ ء رباعي دائري. (المطلوب أولًا)

∴ ق(∠ء هـ ب) = ق(∠ء حـ ب)

، ∵ ق(∠س حـ ب) = ق(∠س أ ب)

(محيطيتان مرسومتان على س ب⌢)

∴ ق(∠ء هـ ب) = ق(∠س أ ب)

(المطلوب ثانيًا)

١٣ ∵ أ ب // حـ ء

∴ ق(أ حـ⌢) = ق(ب ء⌢) = (١٨٠° - ٨٠°) ÷ ٢ = ٥٠°

∴ ق(∠ء هـ ب) = ½ ق(ب ء⌢) = ½ × ٥٠°

= ٢٥° (المطلوب أولًا)

، ق(∠ء أ هـ) = ½ [ق(أ هـ⌢) + ق(ء ب⌢)]

= ½ (١٠٠° + ٥٠°) = ٧٥°

(المطلوب ثانيًا)

١٤ ∵ أب ، أحـ مماسان للدائرة الصغرى
∴ أب = أحـ = ١٠ سم
، ∵ أب ، أء مماسان للدائرة الكبرى
∴ أب = أء = ١٠ سم ∴ س + ٧ = ١٠
∴ س = ٣ (وهو المطلوب)

١٥ ∵ ق(∠ء أ ب) = ١/٢ ق(أب⌒) = ١/٢ × ١١٠° = ٥٥°
، ∵ أبحـء رباعي دائري
∴ ق(∠هـ ب حـ) = ق(∠ء أ حـ) = ٣٠° + ٥٥°
= ٨٥° (وهو المطلوب)

١٦ ∵ س ص // ب حـ ، أحـ قاطع لهما
∴ ق(∠أ ص س) = ق(∠أ حـ ب) (بالتناظر)
، ∵ ق(∠ء أ ب) (المماسية)
= ق(∠أ حـ ب) (المحيطية)
∴ ق(∠أ ص س) = ق(∠ء أ س)
∴ أء مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، س ، ص
(وهو المطلوب)

١٨ محافظة قنا

السؤال الأول

(أ) ① (ب) ② (ب) ③ (د)

(ب) ∵ أبحـء رباعي دائري
∴ ق(∠ب أ ء) = ق(∠ء حـ هـ) = ١٠٠°
∴ ق(∠ء ب حـ) = ١٠٠° - ٧٠° = ٣٠°
(وهو المطلوب)

السؤال الثاني

(أ) ① (ب) ② (أ) ③ (جـ)

(ب) ∵ أب مماسة للدائرة م ∴ م ب ⊥ أب
∴ ق(∠أ ب م) = ٩٠°
، ∵ أحـ مماسة للدائرة م ∴ م حـ ⊥ أحـ
∴ ق(∠أ حـ م) = ٩٠°
∴ ق(∠أ ب م) + ق(∠أ حـ م) = ٩٠° + ٩٠°
= ١٨٠°
∴ أب م حـ رباعي دائري. (وهو المطلوب)

السؤال الثالث

(أ) ① (ب) ② (جـ) ③ (ب)

(ب) ∵ س أ ، س ب مماسان للدائرة
∴ س أ = س ب
∴ ق(∠س ب أ) = ق(∠س أ ب)
= (١٨٠° - ٧٠°) ÷ ٢ = ٥٥°
، ∵ أبحـء رباعي دائري
∴ ق(∠ء أ ب) = ١٨٠° - ١٢٥° = ٥٥°
∴ ق(∠س ب أ) = ق(∠ء أ ب)
وهما في وضع تبادل
∴ أء // س ب (وهو المطلوب)

السؤال الرابع

(أ) ∵ أب مماس للدائرة م ∴ م أ ⊥ أب
∴ ق(∠ب أ م) = ٩٠°
∴ في Δ ب أ م :
(ب م)² = (أب)² + (أ م)² = (١٢)² + (٥)²
= ١٦٩
∴ ب م = √١٦٩ = ١٣ سم
∴ ب حـ = ١٣ - ٥ = ٨ سم (وهو المطلوب)

(ب) في Δ أب حـ : ∵ أب = أحـ
∴ ق(∠أ حـ ب) = ق(∠أ ب حـ) = (١٨٠° - ٥٠°) ÷ ٢
= ٦٥°
∴ ق(∠أ حـ ب) = ق(∠ب ء س) = ٦٥°
∴ ب س مماس الدائرة م (وهو المطلوب)

السؤال الخامس

(أ) ∵ ق(∠ب م ء) = ق(ب حـ ء⌒) = ١٦٠°
∴ ق(ب أ ء⌒) = ٣٦٠° - ١٦٠° = ٢٠٠°
∴ ق(∠حـ) = ١/٢ ق(ب أ ء⌒) = ١/٢ × ٢٠٠°
= ١٠٠°
(وهو المطلوب)

(ب) ∵ أء // ب حـ
∴ ق(أب⌒) = ق(حـ ء⌒) ∴ أب = حـ ء
، ∵ س منتصف أب ∴ م س ⊥ أب
، ∵ م ص ⊥ حـ ء
∴ م س = م ص (وهو المطلوب)

١٩ محافظة الأقصر

المجموعة الأولى

١ (د) ٢ (جـ) ٣ (أ)
٤ (د) ٥ (أ) ٦ (ب)
٧ (جـ) ٨ (أ) ٩ (ب)

المجموعة الثانية

١٠ في Δ أ ب ء : ∵ أب = أء
∴ ق(∠أ ب ء) = ق(∠أ ء ب) = ٤٠°
∴ ق(∠أ) = ١٨٠° - (٤٠° + ٤٠°) = ١٠٠°
∴ ق(∠أ) + ق(∠حـ) = ١٠٠° + ٨٠° = ١٨٠°
∴ أبحـء رباعي دائري. (وهو المطلوب)

١١ ∵ أبحـء رباعي دائري
∴ ق(∠حـ ء هـ) = ق(∠حـ ب أ)
= ١٢٠° (المطلوب أولًا)
، ∵ أء قطر في الدائرة
∴ ق(∠أ حـ ء) = ٩٠°
، ∵ ∠حـ ء هـ خارجة عن Δ أ حـ ء
∴ ق(∠حـ أ ء) = ١٢٠° - ٩٠° = ٣٠°
(المطلوب ثانيًا)

١٢ ∵ ق(∠ب م حـ) = ٢ ق(∠ب أ حـ)
= ٢ × ٣٠° = ٦٠° (١)
(مركزية ومحيطية مشتركتان في ب حـ⌒)
، ∵ م ب = م حـ = نق (٢)
من (١) ، (٢) :
∴ Δ م ب حـ متساوي الأضلاع
∴ م ب = ب حـ = ٧ سم
∴ محيط الدائرة = ٢ × ٧ × ٢٢/٧ = ٤٤ سم
(وهو المطلوب)

١٣ ∵ هـ س = ص ء ، م هـ = م ء = نق
∴ م س = م ص
، ∵ س منتصف أب ∴ م س ⊥ أب
، ∵ ص منتصف ب حـ ∴ م ص ⊥ ب حـ
∴ أب = ب حـ (وهو المطلوب)

١٤ ∵ أب ، أحـ مماسان للدائرة م عند ب ، حـ
∴ أم ينصف ∠ب أ حـ (المطلوب أولًا)
، ق(∠ب أ حـ) = ٢ ق(∠ب أ م) = ٢ × ٢٥° = ٥٠°
، ق(∠أ ب م) = ق(∠أ حـ م) = ٩٠°
∴ من الشكل الرباعي أب م حـ :
ق(∠ب م حـ) = ٣٦٠° - (٩٠° + ٩٠° + ٥٠°)
= ١٣٠° (المطلوب ثانيًا)

١٥ ∵ ق(أء⌒) = ٢ ق(∠أ حـ ء) = ٢ × ٤٠° = ٨٠°
∴ ق(أء⌒) = ق(ء ب⌒) = ٨٠°
∴ ق(أب⌒) = ٨٠° + ٨٠° = ١٦٠°
∴ ق(∠أ م ب) = ق(أب⌒)
= ١٦٠° (وهو المطلوب)

١٦ ∵ أحـ ، أهـ مماسان للدائرة ن عند ب ، ء
∴ أب = أء = ٩ سم ∴ س + ٢ = ٩
∴ س = ٧
، ∵ أحـ ، أهـ مماسان للدائرة م عند حـ ، هـ

، ∵ أب = أء

وبالطرح : ∴ هـ ء = حـ ب = ٣ سم

∴ ص - ١ = ٣ ∴ ص = ٤ (وهو المطلوب)

٢٠ محافظة جنوب سيناء

السؤال الأول

(أ) ① (جـ) ② (أ) ③ (ب)

(ب) ∵ ص منتصف أحـ ∴ م ص ⊥ أحـ

، ∵ م س ⊥ أب ، م س = م ص

∴ أب = أحـ

∴ Δ أب حـ متساوى الساقين. (وهو المطلوب)

السؤال الثانى

(أ) ① (جـ) ② (أ) ③ (ب)

(ب) ∵ هـ و // ب حـ ، أحـ قاطع لهما

∴ ق(∠ أ و هـ) = ق(∠ أحـ ب) (بالتناظر)

، ∵ ق(∠ ء أ ب) (المماسية)

= ق(∠ أحـ ب) (المحيطية)

∴ ق(∠ أ و هـ) = ق(∠ هـ أ ء)

∴ أء مماس للدائرة المارة برؤوس Δ أ هـ و

(وهو المطلوب)

السؤال الثالث

(أ) ① (جـ) ② (أ) ③ (جـ)

(ب) ∵ أ ب حـ ء رباعى دائرى

∴ ق(∠ ب أ حـ) = ق(∠ ب ء حـ)

(زاويتان مرسومتان على القاعدة ب حـ)

∴ $\frac{1}{2}$ ق(∠ ب أ حـ) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ ب ء حـ)

∴ ق(∠ س أ ص) = ق(∠ س ء ص)

وهما مرسومتان على القاعدة س ص

∴ أ س ص ء رباعى دائرى. (وهو المطلوب)

السؤال الرابع

(أ) ∵ أء ، أو مماسان للدائرة م

∴ أء = أو = ٤ سم

، ∵ ب ء ، ب هـ مماسان للدائرة م

∴ ب ء = ب هـ = ٣ سم

، ∵ حـ هـ ، حـ و مماسان للدائرة م

∴ حـ هـ = حـ و = ٥ سم

∴ محيط Δ أب حـ = ٤ + ٤ + ٥ + ٥ + ٣ + ٣

= ٢٤ سم (وهو المطلوب)

(ب) ∵ ء هـ // س ص

∴ ق(ء س) = ق(هـ ص)

∴ ق(∠ ء ع س) = ق(∠ هـ ع ص)

وبإضافة ق(∠ س ع ص) للطرفين

∴ ق(∠ ء ع ص) = ق(∠ س ع هـ)

(وهو المطلوب)

السؤال الخامس

(أ) فى Δ أ م ب :

∵ م أ = م ب = نق

∴ ق(∠ م أ ب) = ق(∠ م ب أ) = ٥٠°

∴ ق(∠ أ م ب) = ١٨٠° - (٥٠° + ٥٠°) = ٨٠°

∴ ق(∠ أ حـ ب) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ أ م ب)

= $\frac{1}{2}$ × ٨٠° = ٤٠°

(محيطية ومركزية مشتركتان فى أب)

(وهو المطلوب)

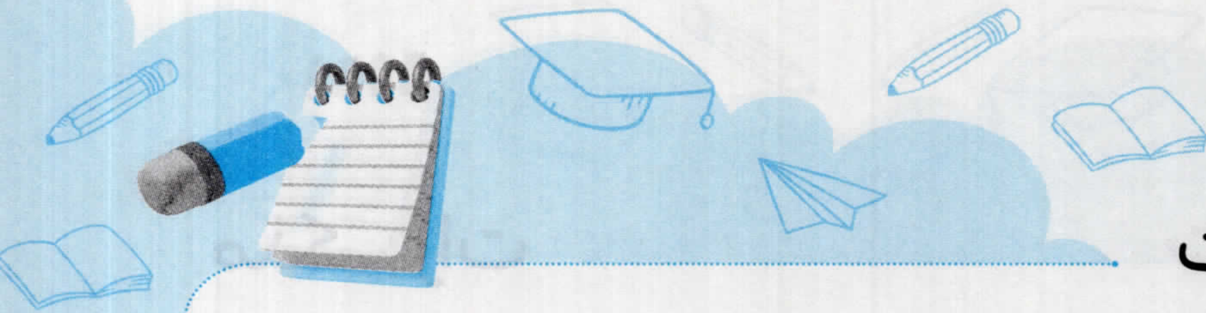
(ب) ∵ ق(∠ ء هـ ب) = $\frac{1}{2}$ [ق(ب ء) + ق(أ حـ)]

∴ ٩٠° = $\frac{1}{2}$ [ق(ب ء) + ٧٠°]

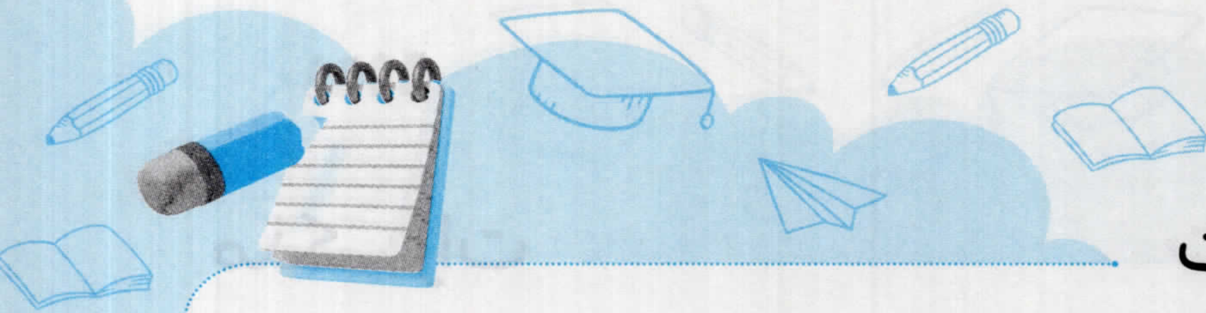
∴ ١٨٠° = ق(ب ء) + ٧٠°

∴ ق(ب ء) = ١٨٠° - ٧٠° = ١١٠°

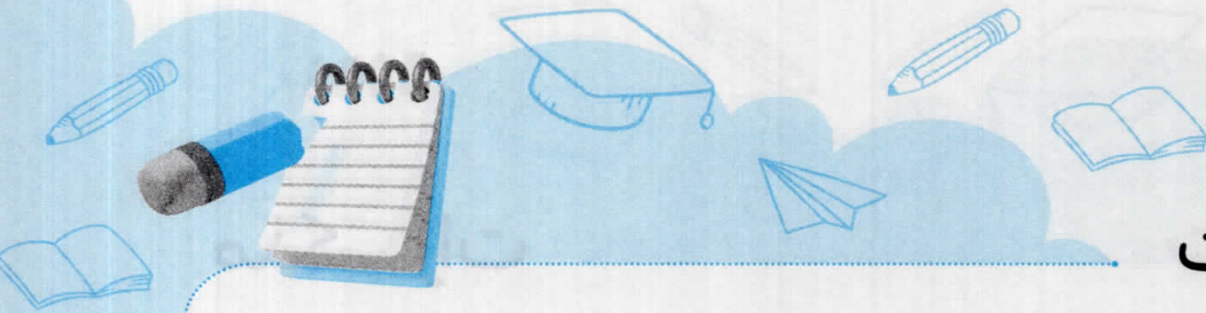
(وهو المطلوب)



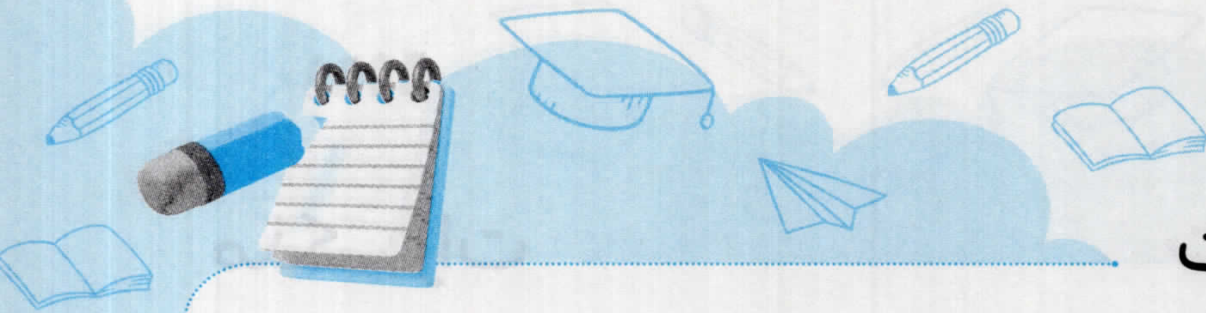
مذكـــرات



مذكــــرات



مذكرات



مذكـــرات



إجابات المعاصر
تصرف مجانًا مع الكتاب

الآن بالمكتبات



فى: **اللغة الإنجليزية**
للمرحلة الإعدادية



الصف **الثالث** الإعدادى

الفصل الدراسى الثانى

الرياضيات









الخط الساخن
١٥٠١٤

مكتبة الطلبة
للطبع والنشر والتوزيع
٣ شارع كامل صدقى - الفجالة
تليفون: ٢٥٩٠٢٩٩٧ - ٢٥٩٣٧٧٩١ - ٢٥٩٣٤٠١٢ / ٠٢
www.gpseducation.com



بسم الله الرحمن الرحيم



قام بإعداد هذه النسخة pdf

وفهرستها ورفعها :

د محمد أحمد محمد عاصم

نسألكم الدعاء